

non-coplanar junction の方法について

正員 北海道大学 工博 今 俊 三
正員 開発局 建設部 平 岡 英 明

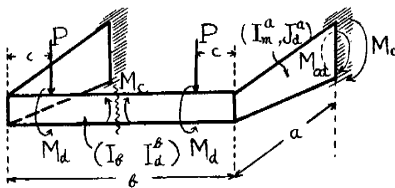
1. 緒 言

従来、下路橋の突桁径間と上路型式側径間との取付構造は、両者の主桁を同一鉛直面上において連結するいわゆる **coplanar junction** とするのが常法であつた。しかしながらこの方法によれば、側径間の上路型式区間が長大な場合には非常に不経済となるので、ここに新たに **non-coplanar junction** による方法を提唱するものである。これは既に天塩大橋の設計において実際に採用したもので、この場合は“ランガー桁の突桁径間の端横桁上に **concentric** にゲルバー桁吊桁径間の主桁を載せ、両者の桁平面には水平的離心をもたせる”という方法を採用している。

本稿には、この **non-coplanar junction** について理論的解析を述べた。

2. “Cantilever-cross girder supporting frame” の不特定応力について

- 記号 M_0 : 端モーメント
 M_{0a} : 端捻りモーメント
 M_c : b -桁の中央モーメント
 P : 吊径間の支反力 (b -桁につき対称と仮定)
 M_d : P 支反力の離心による b -桁の捻りモーメント
 I_b, J_b^a : b -桁の断面二次モーメントおよび捻り係数
 I_m^a, J_m^a : a -桁の平均断面二次モーメントおよび平均捻り係数



図—1

捻り係数の算定式

Single web の断面または開脚断面に対し

$$J_a = \frac{\mu}{3} \sum h \delta^3$$

ただし、 $\mu = 1.3$ (I 型断面)

$\mu = 1.12$ (□ 型断面)

h, δ : 板の高さおよび厚さ

閉じ断面に対し

$$J_a = \frac{4F^2}{\phi \frac{dS}{\delta}} = (\text{一様な厚さのとき}) \frac{4F^2 \delta}{S}$$

ただし、 F : 板の中心線のつつむ閉ち面積

S : 板の中心線に沿う閉ち全周の長さ

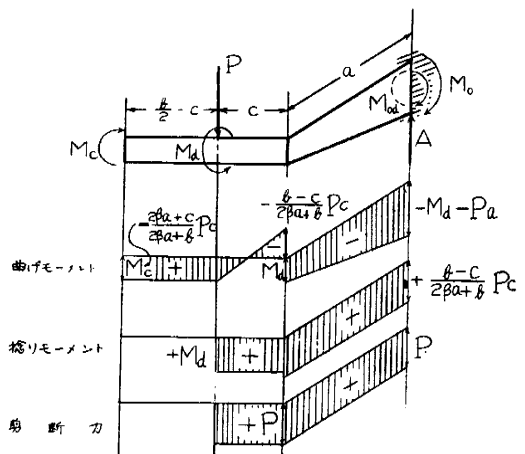
一般的に曲げモーメントを M , 捻りモーメントを $\bar{M}^a$ で表わせば、この“cantilever-cross girder supporting frame”の一次不特定量 M_c は最小仕事の原理

$$\frac{\partial A_\xi}{\partial M_c} = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial M_c} dS + \int \frac{\bar{M}^a}{GJ_a} \frac{\partial \bar{M}^a}{\partial M_c} dS = 0$$

によつて、次式のように求められる。

$$M_c = \frac{2\beta a + c}{2\beta a + b} Pc$$

$$\text{ただし、} \beta = \frac{EI_b}{GJ_a^a} \dots\dots\dots (2.1)$$



図—2

$$\left. \begin{array}{l} \text{端モーメント} \quad M_0 = -M_d - Pa \\ \text{端捻りモーメント} \quad M_{0d} = \frac{b-c}{2\beta a + b} P c \end{array} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

これによつて frame の曲げモーメント、捻りモーメント、剪断力の分布は図-2 のようになる。

3. 捻りによる Cantilever の付加応力

図-2 の外力の捻りモーメントによつて a 、 b -桁に生ずる捻り角 φ および諸力 M_b 、 M_d 、 Q_b は次のようになる。

M_b : 上あるいは下のフランジに作用する水平方向の曲げモーメント

M_d : 純粋捻りモーメント (Saint Venant の捻り)

Q_b : 上あるいは下のフランジに作用する水平方向の剪断力

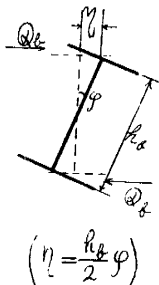


図-3

(1) b -桁に関する Timoshenko-Bleich 理論

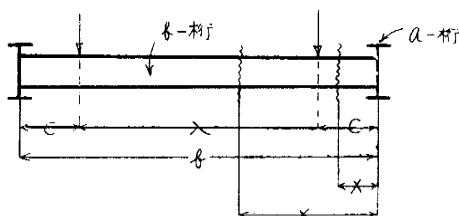


図-4

$$c > x > 0; \quad \varphi = \frac{M_d^b}{GJ_d^b} (c-x)$$

$$\left[1 - \frac{\sinh ac - \cosh \frac{a\lambda}{2} \sinh ax}{a(c-x) \cosh \frac{ab}{2}} \right]$$

$$\frac{b}{2} > x > c; \quad \varphi = \frac{M_d^b}{GJ_d^b} (x-c)$$

$$\left[\frac{\cosh \frac{a\lambda}{2} \sinh ax - \sinh ac}{a(x-c) \cosh \frac{ab}{2}} - \frac{\sinh a(x-c)}{a(x-c)} \right]$$

.....(3.1.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} M_b = -\frac{M_d^b}{ah_b} \frac{\cosh \frac{a\lambda}{2}}{\cosh \frac{ab}{2}} \sinh ax \\ M_d = M_d^b \left[\frac{\cosh \frac{a\lambda}{2}}{\cosh \frac{ab}{2}} \cosh ax - 1 \right] \\ Q_b = -\frac{M_d^b}{h_b} \frac{\cosh \frac{a\lambda}{2}}{\cosh \frac{ab}{2}} \cosh ax \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M_b = -\frac{M_d^b}{ah_b} \left[\frac{\cosh \frac{a\lambda}{2}}{\cosh \frac{ab}{2}} \sinh ax - \sinh a(x-c) \right] \\ M_d = M_d^b \left[\frac{\cosh \frac{a\lambda}{2}}{\cosh \frac{ab}{2}} \cosh ax - \cosh a(x-c) \right] \\ Q_b = -\frac{M_d^b}{h_b} \left[\frac{\cosh \frac{a\lambda}{2}}{\cosh \frac{ab}{2}} \cosh ax - \cosh a(x-c) \right] \end{array} \right.$$

.....(3.1.2)

$$\text{ただし, } a^2 = \frac{2}{h_b} \frac{GJ_d^b}{EJ_b}$$

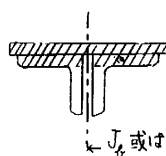


図-5

h_b : フランジ重心間の桁高
 J_b : 上あるいは下のフランジの垂直軸まわりの断面二次モーメント (図-5 参照)

(2) a -桁, すなわち, Cantilever の付加応力に関する今教授理論

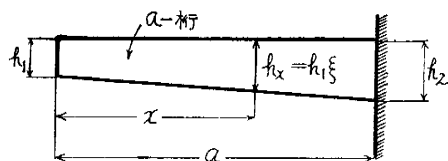


図-6

$$\text{記号: } a = \sqrt{1 + a_c^2}, \quad a_c^2 = \frac{2GJ_d^a}{h_a^2 EJ_a} \left(\frac{a}{m} \right)^2$$

$$\beta = \frac{2}{h_a^2 EJ_a} \left(\frac{a}{m} \right)^2, \quad m = \frac{h_2}{h_1} - 1$$

$$\xi = 1 = m \frac{x}{a}, \quad J_a: \text{図-5 参照}$$

$$\varphi = \frac{\beta}{a_c^2} \frac{M_d^a}{a} \left\{ \{(\bar{a}-1) + 2(1+m)^{-\bar{a}-1}\} \xi^{\bar{a}} - \{(\bar{a}+1) - 2(1+m)^{\bar{a}-1}\} \xi^{-\bar{a}} \right. \\ \left. + \frac{(\bar{a}-1)^2(1+m)^{\bar{a}} + (\bar{a}+1)^2(1+m)^{-\bar{a}}}{(\bar{a}-1)(1+m)^{\bar{a}-1} + (\bar{a}+1)(1+m)^{-\bar{a}-1}} - 1 + m - i \xi \right\}$$

$$\mathfrak{M}_b = -\frac{a}{mh_1} \frac{M_d^a}{\alpha_c^2}$$

$$\left[\frac{(\alpha+1)\{(\alpha-1)+2(1+m)^{-\alpha-1}\}\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(1+m)^{\alpha-1}} - \frac{-(\alpha-1)\{(\alpha+1)-2(1+m)^{\alpha-1}\}\xi^{-\alpha-1}}{+(\alpha+1)(1+m)^{-\alpha-1}} - 2 \right]$$

$$\mathfrak{M}_a = M_d^a$$

$$\left[\frac{\{(\alpha-1)+2(1+m)^{-\alpha-1}\}\xi^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(1+m)^{\alpha-1}} + \frac{-(\alpha+1)-2(1+m)^{\alpha-1}\xi^{-\alpha-1}}{+(\alpha+1)(1+m)^{-\alpha-1}} - 1 \right]$$

$$Q_b = -\frac{M_d^a}{h_1}$$

$$\frac{\{(\alpha-1)+2(1+m)^{-\alpha-1}\}\xi^{\alpha-2}}{(\alpha-1)(1+m)^{\alpha-1}} + \frac{-(\alpha+1)-2(1+m)^{\alpha-1}\xi^{-\alpha-2}}{+(\alpha+1)(1+m)^{-\alpha-1}}$$

.....(3.2.3)

(例)

大塩大橋の特に a -桁に関する前記 3 種の付加応力の値

$$a = 450 \text{ cm}, \quad b = 730 \text{ cm}, \quad c = 140 \text{ cm}$$

$$h_1 = 140 \text{ cm}, \quad h_2 = 182.3 \text{ cm}, \quad m = 0.3021$$

$$I_b = 536,202 \text{ cm}^4,$$

$$J_d^a = \frac{\mu}{3} \sum h z^3 (\mu - 1.3) = 4,420 \text{ cm}^4 \text{ (平均値)}$$

$$\beta = \frac{EI_b}{GJ_d^a} = 298.65$$

$$P \text{ (死荷重+活荷重+衝撃荷重)} = 57,800 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$\text{従つて} \quad M_a = \frac{2\beta a + c}{2\beta a + b} P c = 8,074,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$-|M(b\text{-桁})|_{x=0} = M_d^a = M_{0d}$$

$$= \frac{b-c}{2\beta a + b} P c = 78,960 \text{ kg} \cdot \text{cm} \approx \frac{M_c}{102}$$

すなわち、 b -桁の両端部を a -桁に固定した影響は、大塩大橋のように a -桁が single web の場合は非常に微小で、垂直曲げに対して b -桁は実用上純梁とみてさしつかえないことになる。

$$M_0 = -Pa = -26,010,000 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

(ただし $M_d = 0$ と仮定)

表—1 α -値

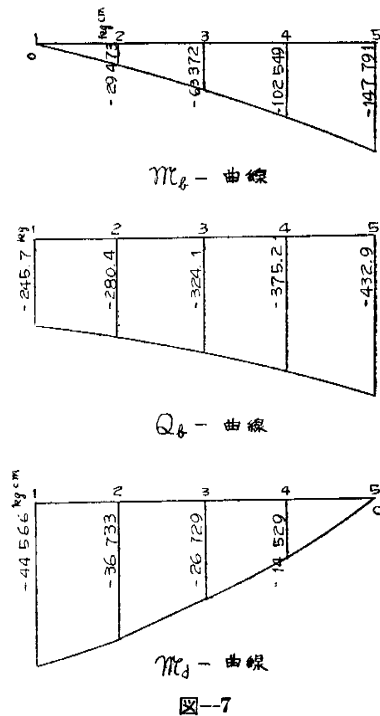
x (cm)	h_x (cm)	J_a (cm ⁴)	J_d^a (cm ⁴)	$\alpha_c^2 = 0.00440 J_d^a$	$\alpha = \sqrt{\alpha_c^2 + 1}$
0	140	19791	4413	19.4172	4.51853
112.5	150.6	"	4415	19.4260	4.51951
225	161.15	"	4420	19.4480	4.52194
337.5	171.7	"	4431	19.4964	4.52729
450	182.3	"	4444	19.5536	4.53360

表—2 $\mathfrak{M}_b, \mathfrak{M}_a, Q_b$ の値

点	x (cm)	$\mathfrak{M}_b$ (kg·cm)	$\mathfrak{M}_a$ (kg·cm)	Q_b (kg)
1	0	0	-44566	-245.7
2	112.5	-29473	-36733	-280.4
3	225.0	-63372	-26729	-324.1
4	337.5	-102549	-14529	-375.2
5	450.0	-147791	0	-432.9

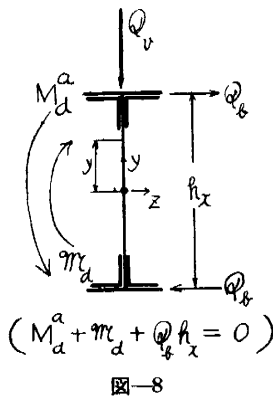
表—3 検 算

点	Q_b	h_x (cm)	$Q_b h_x$	$\mathfrak{M}_a$	$-M_d^a = Q_b h_x + \mathfrak{M}_a$
1	-245.7	140.0	-34398	-44566	-78964
2	-280.4	150.6	-42228	-36733	-78961
3	-324.1	161.65	-52228	-26729	-78957
4	-375.2	171.7	-64442	-14529	-78951
5	-432.9	182.3	-78918	0	-78918



4. α桁の全荷重合成応力と安全率

α桁横断面(図-8)は Q_v による鉛直面上の剪断曲げのほか、外力の捻りモーメント M_d^a によつてSaint Venantの捻りモーメント M_d^a 、フランジの水平曲げを誘起



する曲げ捻りモーメント (Biegungs verdrehung) $Q_h h_x$ を受け、従つてこの場合α桁横断面には次のような各種の応力を生ずる。

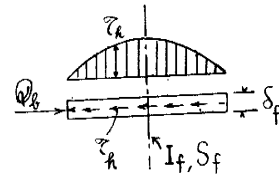
- (1) 垂直方向の曲げモーメントにより

$$\sigma_y = \frac{M_y}{I_y} y \quad \dots\dots\dots(4.1)$$

- (2) フランジの水平曲げモーメントにより
(曲げ捻り)

$$\sigma_h = \frac{M_h}{J_a} z \quad \dots\dots\dots(4.2)$$

- (3) フランジの水平剪断力により (曲げ捻り)



$$\tau_h = \frac{Q_h S_f}{\delta_f I_f} \quad \dots\dots\dots(4.3)$$

ただし I_f : フランジプレートの断面二次モーメント ($I_f \approx I_a$)

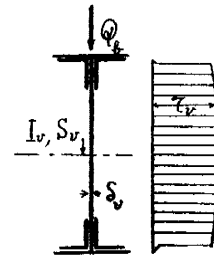
S_f : フランジプレートの重心軸に関する断面一次モーメント

- (4) Saint Venant の捻りにより

$$\tau_t = \frac{M_d^a}{J_d^a} \delta \quad \dots\dots\dots(4.4)$$

ただし、 δ : 問題の板の厚さ

- (5) 垂直方向の剪断曲げにより



$$\tau_v = \frac{Q_v S_v}{\delta_v I_v} \quad \dots\dots\dots(4.5)$$

以上によりα桁の応力分布図は図-11 のようになる。

このα桁横断面に作用する多軸応力を、単軸換算の比較応力理論式

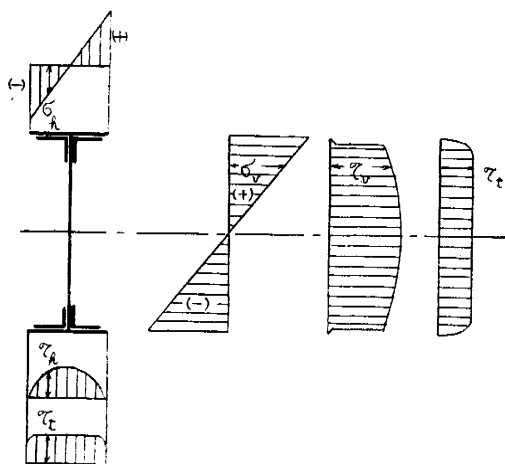
$$\sigma_c = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

に代入すれば、フランジプレートおよびウェブプレートの任意点の比較応力、従つてまた降伏点に対する安全率は次のようになる。

(ただし、 σ_F : 降伏点、 $\sigma_F = 2,400 \text{ kg/cm}^2$ SS41)

- i) フランジプレート

$$\left. \begin{aligned} \text{比較応力} \quad \sigma_{cf} &= \sqrt{(\sigma_y + \sigma_h)^2 + 3(\tau_h + \tau_t)^2} \\ \text{降伏点安全率} \quad \nu_{Ff} &= \frac{\sigma_F}{\sigma_{cf}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(4.6)$$

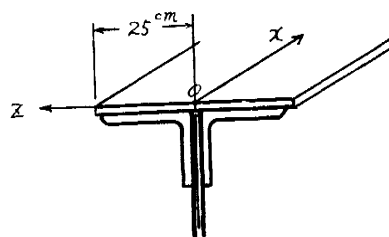


図—11

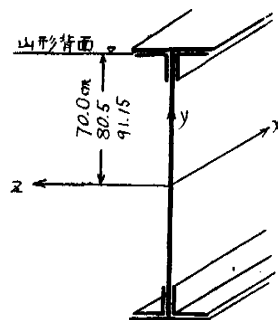
ii) ウェブプレート

$$\left. \begin{aligned} \text{比較応力} \quad \sigma_{of} &= \sqrt{\sigma_v^2 + 3(\tau_v + \tau_t)^2} \quad \dots\dots(4.7) \\ \text{降伏点安全率} \quad \nu_F &= \sigma_F / \sigma_{of} \end{aligned} \right\}$$

従つて、天塩大橋 a-桁のフランジプレートおよびウェブプレートの比較応力および降伏点安全率を、前記主荷重



図—12



図—13

に対して求めると、それぞれ表—4および表—5のようになる。

表—4 a-桁フランジプレートの比較応力と降伏点安全率 (図—12 参照)

x (cm)	z (cm)	σ_v (kg/cm ²)	σ_h (kg/cm ²)	τ_h (kg/cm ²)	τ_t (kg/cm ²)	σ_{of} (kg/cm ²)	$\nu_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_{of}}$
0 (自由端)	0.00	0	0	3.88	39.40	74.96	32.01
	6.25	0	0	3.65	39.40	74.56	32.18
	12.50	0	0	2.90	39.40	73.26	32.76
	18.75	0	0	1.70	39.40	71.19	33.72
	25.00	0	0	0	0	0	∞
225	0.00	316.4	0	5.12	23.58	320.28	7.49
	6.25	316.4	12.59	4.81	23.58	332.65	7.21
	12.50	316.4	25.19	3.84	23.58	344.88	6.96
	18.75	316.4	37.78	2.24	23.58	357.01	6.72
	25.00	316.4	50.38	0	0	366.79	6.54
450	0.00	544.8	0	6.84	0	544.93	4.40
	6.25	544.8	29.37	6.43	0	574.31	4.18
	12.50	544.8	58.74	5.13	0	603.57	3.98
	18.75	544.8	88.11	2.99	0	632.92	3.79
	25.00	544.8	117.48	0	0	662.3	3.62

表—5 α -桁ウェブプレートと比較応力と降伏点安全率 (図—13 参照)

x (cm)	y (cm)	σ_v (kg/cm ²)	τ_v (kg/cm ²)	τ_t (kg/cm ²)	σ_{vw} (kg/cm ²)	$\nu_F = \frac{\sigma_F}{\sigma_y}$
0 (由端白)	0.0	0	374.7	12.12	669.96	3.58
	17.5	0	371.9	12.12	657.54	3.65
	35.0	0	361.3	12.12	646.74	3.71
	52.5	0	305.7	12.12	550.44	4.36
	*60.0	0	278.8	52.52	573.83	4.18
	70.0	0	130.0	0	260.00	9.23
225	0.0	0	326.5	7.26	586.67	4.09
	20.13	77.3	323.7	7.26	578.42	4.15
	40.25	154.6	313.3	7.26	576.34	4.16
	60.38	231.9	296.1	7.26	574.33	4.18
	*70.00	263.8	236.7	31.44	536.6	4.47
	80.50	309.1	110.0	0	363.1	6.61
450	0.0	0	239.2	0	500.9	4.79
	22.78	133.4	286.4	0	513.7	4.67
	45.57	266.8	276.3	0	547.9	4.38
	68.35	400.2	259.4	0	601.9	3.99
	*80.00	468.4	203.6	0	586.3	4.09
	91.15	533.7	94.9	0	558.4	4.30

* フランジ山形鋼の垂直脚の中央点

5. 結 び

non-coplanar junction による “Cantilever cross girder supporting frame” の理論的解析を、天塩大橋を実例として示したが、これによつても cantilever (α -桁) 部分は設計上十分な安全率を有することがわかつた。

なお、この α -桁の主荷重応力 (死荷重 + 活荷重 + 衝撃荷重) に対して、本構造のように更に捻りが作用することによつて生ずる降伏点安全率の減少は

(1) フランジプレートで約 5~22% (プレートに本平端の影響が大きい)

(2) ウェブプレートで約 2~15% (α -桁自由端のプレート端部の影響が大きい) 程度である。

今後、このような non-coplanar junction の扱法を用いる場合は、以上述べた理論をもとにして容易にその説明をなし得るであらう。