斜板橋の解法について

正員　開発局土木試験所　工博　岡　元　北　海

斜板橋の解法については従来階差方程式によつて解かれ，計算の繁雑さは多大の労苦を伴なつた。

斜板橋の理論解法を得たので発表する。

1. 矩形平面板の一般解

厚さが他の寸法に比較して，小さい均質等方性平板が外力を受け，かつそれにより生ずる厚さ方向の変位，すなわち，撓みが厚さに比し小さければ平板の面に垂直方向の力の釣合条件すなわち，中立面の撓みの微分方程式は次のように表わされる。

$$\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}=\frac{P(x\cdot y)}{D}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ただし，ζ：　中立面の撓み，$P(x\cdot y)$：板の面に垂直に作用する分布荷重

D：　$Eh^3/12(1-\nu^2)$：板の剛度

E＝板の材料のヤング係数

ν＝板の材料のポアソン比　h＝板の厚さ

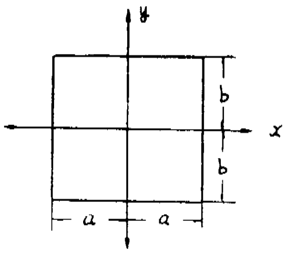
(1) 式の特解を ζ_0 とすれば一般解 ζ_1 は，次のように表わされる。

すなわち，

$$\zeta_1=f_1(x+iy)+g_1(x-iy)$$
$$+\left(\frac{x}{y}\left\{f_2(x+iy)+g_2(x-iy)\right\}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)'$$

之より (1) 式の解は

$$\zeta=\zeta_0+\zeta_1\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$



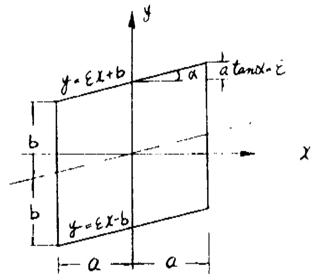
図—1

図—1 および (2) 式より，満載等分布荷重を受ける場合，(1) 式の解は次の如くなる。

$$\zeta=\frac{Pb^4}{24D}\left(\frac{y^4}{b^4}-6\frac{y^2}{b^2}+5\right)+f_1(x+iy)$$
$$+g_1(x-iy)+x\left[f_2(x+iy)+g_2(x-iy)\right]\quad\cdots\cdots\cdots(2)'$$

2. 斜板橋の一般解

前節の結果より，図—2 のごとく，x 軸に α の角度も持つ，斜板の解は (2)′ より次のごとくなる。



図—2

すなわち，

$$\zeta=\frac{P}{240(1+\varepsilon^2)^2}\left[(y-\varepsilon x)^4-6b^2(y-\varepsilon x)^2\right.$$
$$\left.+5b^4\right]+f_1(x+iy)+g_1(x-iy)$$
$$+(x+\varepsilon y)\left[\frac{1}{1+i\varepsilon}f_2(x+iy)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{1-i\varepsilon}g_2(x-iy)\right]\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

上式において，$y=\varepsilon x+b$，および$y=\varepsilon x-b$ なる辺単純支持とすれば，それぞれの辺で次の条件を満足せねばならない。

すなわち，

$$\zeta=0,\ \text{および}\ \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=0.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(4) の条件式を (3) 式に代入すれば演算の結果次の式をうる。

$$\zeta=\frac{P}{24D(1+\varepsilon^2)^2}\left[(y-\varepsilon x)^4-6b^2(y-\varepsilon x)^2+5b^4\right]$$
$$+(x+\varepsilon y)\sum_n\left(\varepsilon C_n\cos^2\frac{n\pi}{2}-iD_n\sin^2\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon+i)(x+iy)+(x+\varepsilon y)\sum_n\left(\varepsilon C_n\cos^2\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$+iD_n\sin^2\frac{n\pi}{2}\Big)\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon-i)(x-iy)-$$

$$\sum_n\Big(i\varepsilon A_n\cos^2\frac{n\pi}{2}+B_n\sin^2\frac{n\pi}{2}\Big)\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon$$

$$+i)(x+iy)+\sum_n\Big(i\varepsilon A_n\cos^2\frac{n\pi}{2}-B_n\sin^2\frac{n\pi}{2}\Big)$$

$$\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon-i)(x-iy) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5) 式において，i を追い出して整理すれば

$$\zeta=\frac{P}{24D(1+\varepsilon^2)^2}\left[(y-\varepsilon x)^4-6b^2(y-\varepsilon x)^2+5b^2\right]$$

$$+2(x+\varepsilon y)\,\varepsilon\sum_{n=2,4,6,\cdots\cdots}C_n\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)$$

$$\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)+2(x+\varepsilon y)$$

$$\sum_{n=1,3,5,\cdots\cdots}D_n\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)$$

$$-\varepsilon\sum_{n=2,4,6}A_n\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)$$

$$-\sum_{n=1,3,5,\cdots\cdots}B_n\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y) \quad\cdots\cdots(6)$$

式中，A_n, B_n, C_n, D_n の 4 つの未知数は $x=\pm a$ なる辺が自由辺なる条件より求められる。

3. 斜板橋の解法

図—2 において，$x=\pm a$ なる辺自由辺とすれば，境界条件は次のようになる。

すなわち，

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right|_{x=\pm a}=0\\&\left|\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\partial y^2}\right|_{x=\pm a}=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

(7) 式の第 1 条件式は計算の便宜上，$\nu=0$ とすれば (7) 式は，

$$\left.\begin{aligned}&\left|\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right|_{x=\pm a}=0\\&\left|\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+(2-\nu)\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2y^2}\right|_{x=\pm a}=0\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)'$$

よつて，(6) 式に (7)′ 式を代入すれば次の式をうる。

すなわち，

$$\sum_{n=2,4,6}g_n C_n+\sum_{n=1,3,5}h_n D_n+\sum_{n=2,4,6}i_n A_n$$

$$+\sum_{n=1,3,5}j_n B_n=R(y) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

および

$$\sum_{n=2,4,6}g_n' C_n+\sum_{n=1,3,5}h_n' D_n+\sum_{n=2,4,6}i_n A_n$$

$$+\sum_{n=1,3,5}j_n' B_n=R'(y) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

上式において

$$g_n=2\frac{n}{\pi b}\varepsilon\left(\varepsilon f_n^{(a)}+\phi_n^{(a)}\right)+\varepsilon\frac{x+\varepsilon y}{2b^2}$$

$$n^2\left\{\psi_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)+2\varepsilon\tau_n^{(a)}\right\}$$

$$h_n=2\frac{n}{\pi b}\left(-\varepsilon\phi_n^{(a)}+f_n^{(a)}\right)+\frac{x+\varepsilon y}{2b^2}$$

$$\left.\begin{aligned}&n^2\left\{\tau_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)-2\varepsilon\psi_n^{(a)}\right\}\\&i_n=-\varepsilon\frac{n^2}{4b}\left\{\phi_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)+2\varepsilon f_n^{(a)}\right\}\\&j_n=-\frac{n^2}{4b}\left\{f_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)-2\varepsilon\phi_n^{(a)}\right\}\\&R(y)=-\frac{\varepsilon^2}{2\pi^2(1+\varepsilon^2)^2}\left\{(y-\varepsilon x)^2-b^2\right\}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(8)'$$

および

$$g_n'=\frac{n^2}{\pi b^2}\Big[\varepsilon(1+\varepsilon^2)\left(\varepsilon\tau_n^{(a)}+\varphi_n^{(a)}\right)+(1-\nu)\varepsilon$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\varphi_n^{(a)}(\varepsilon^2-1)-2\varepsilon\tau_n^{(a)}\right)+\varepsilon\left(\tau_n^{(a)}(\varepsilon^2-1)\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\varepsilon\varphi_n^{(a)}\right)\right\}\Big]+(1-\nu)\varepsilon\frac{n^3}{4b^3}(a+\varepsilon y)$$

$$\left\{f_n^{(a)}(\varepsilon^2-3\varepsilon)+\phi_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)\right\}$$

$$h_n'=\frac{n^2}{\pi b^2}\Big[(1+\varepsilon^2)\left(-\varepsilon\varphi_n^{(a)}+\tau_n^{(a)}\right)+(1-\nu)$$

$$\left\{\frac{1}{2}\left(\tau_n^{(a)}(\varepsilon^2-1)+2\varepsilon\varphi_n^{(a)}\right)+\varepsilon\left(\varphi_n^{(a)}(1-\varepsilon^2)\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\varepsilon\tau_n^{(a)}\right)\right\}\Big]+(1-\nu)\frac{n^3}{4b^3}(a+\varepsilon y)$$

$$\left\{f_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)-\phi_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)\right\}$$

$$i_n'=-(1-\nu)\varepsilon\frac{n^3}{8b^2}\left\{\tau_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)+\varphi_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)\right\}$$

$$j_n'=-(1-\nu)\varepsilon\frac{n^3}{8b^2}\left\{\tau_n^{(a)}(3\varepsilon^2-1)-\varphi_n^{(a)}(\varepsilon^3-3\varepsilon)\right\}$$

$$R'(y)=+\frac{\varepsilon(y-\varepsilon a)}{\pi^3(1+\varepsilon^2)}\left\{1+\frac{(1-\nu)}{1+\varepsilon^2}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)'$$

(8)′, (9)′ において，$\varphi_n^{(a)}$, $\tau_n^{(a)}$, $f_n^{(a)}$, $\phi_n^{(a)}$ は，それぞれ φ_n, τ_n, f_n, ϕ_n の x の代りに a の値を代入した値である。

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n&=\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\\\tau_n&=\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\\\phi_n&=\sin\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\sinh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\\f_n&=\cos\frac{n\pi}{2b}(\varepsilon x-y)\cosh\frac{n\pi}{2b}(x+\varepsilon y)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(10)$$

(8) (9) は，y の変数が入つているが y の値のいかんに関せず成立を必要とする。

通常，(8) (9) 式の形では，y の変数を追出しえないので y の任意の値を代入した時の誤差をそれぞれ，$\phi^{(1)}(y)$，および $\phi^{(2)}(y)$ とすれば，

(8), (9) 式は，

$$\psi^{(1)}(y)=R(y)-\sum_{n=2,4,6\cdots\cdots} g_n\ C_n-\sum_{n=1,3,5\cdots\cdots} h_n\ D_n$$
$$-\sum_{n=2,4,6\cdots\cdots} i_n\ A_n-\sum_{n=1,3,5\cdots\cdots} j_n\ B_n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\psi^{(2)}(y)=R'(y)-\sum_{n=2,4,6\cdots\cdots} g_n'\ C_n-\sum_{n=1,3,5\cdots\cdots} h_n'\ D_n$$
$$-\sum_{n=2,4,6\cdots\cdots} i_n'\ A_n-\sum_{n=1,3,5\cdots\cdots} j_n'\ B_n \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(11), (12) において，$\psi^{(1)}(y)$, および $\psi^{(2)}(y)$ は，0 または，少なくとも最小になるようにするを必要とする。

従つて

$$\int_{\varepsilon a-y}^{\varepsilon a+y} \psi^{2(1)}(y)\,dy=\min, \text{ および}$$
$$\int_{\varepsilon a-y}^{\varepsilon a+y} \psi^{2(2)}(y)\,dy=\min \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

よつて，(13) の条件を満足するよう (11), (12) 式の A_n, B_n, C_n, D_n を定めねばならない。

これより次の四の条件式をうる。

すなわち，

$$\sum_{n=1,3,5\cdots} B_n \int_B j_n(y)\,j_m(y)\,dy+\sum_{n=2,4,6\cdots} A_n \int_B i_n(y)\,j_m(y)\,dy$$
$$+\sum_{n=1,3,5\cdots} D_n \int_B h_n(y)\,j_m(y)\,dy+\sum_{n=2,4,6\cdots} C_n \int_B g_n(y)\,j_m(y)\,dy$$
$$=\int_B R(y)\,j_m(y)\,dy \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

および

$$\sum_{n=1,3,5\cdots} B_n \int_B j_n(y)\,i_m(y)\,dy+\sum_{n=2,4,6\cdots} A_n \int_B i_n(y)\,i_m(y)\,dy$$
$$+\sum_{n=1,3,5\cdots} D_n \int_B h_n(y)\,i_m(y)\,dy+\sum_{n=2,4,6\cdots} C_n \int_B g_n(y)\,i_m(y)\,dy$$
$$=\int_B R(y)\,i_m(y)\,dy \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

同様に (12), (13) より

$$\sum_{n=1,3,5\cdots} D_n \int_B h_n'(y)\,h_m'(y)\,dy+\sum_{n=2,4,6\cdots} C_n \int_B g_n'(y)\,h_m'(y)\,dy$$
$$+\sum_{n=1,3,5\cdots} B_n \int_B j_n'(y)\,h_m'(y)\,dy$$
$$+\sum_{n=2,4,6\cdots} A_n \int_B i_n'(y)\,h_m'(y)\,dy$$
$$=\int_B R'(y)\,h_m'(y)\,dy \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

および

$$\sum_{n=1,3,5\cdots} D_n \int_B h_m'(y)\,g_m'(y)\,dy+\sum_{n=2,4,6\cdots} C_n \int_B g_n(y)\,g_m'(y)\,dy$$
$$+\sum_{n=1,3,5\cdots} B_n \int_B j_n'(y)\,g_m'(y)\,dy$$
$$+\sum_{n=2,4,6\cdots} A_n \int_B i_n'(y)\,g_m'(y)\,dy$$
$$=\int_B R'(y)\,g_m'(y)\,dy \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

よつて，(14), (15), (16), (17) より，A_n, B_n, C_n, D_n を求めればよい。