水路橋にあらわれる薄肉中空円壔管の剪断有効断面について

正員　北海道大学　工博　今　　俊　三

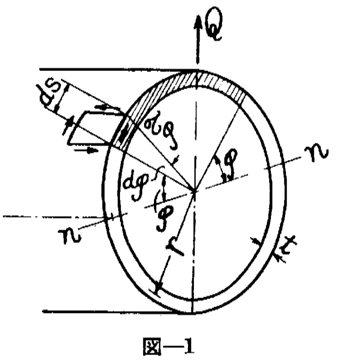
水路橋鉄管や発電所水圧鉄管などは大きな剪断曲げを受けるが，この場合の剪断力に抵抗する有効断面は何程かということが問題となる。これは剪断力 Q，総断面積 A のときの剪断力弾性エネルギー $\int \kappa \frac{Q^2}{2GA} ds$ なる式中の係数 κ の大きさの問題に帰着する。

薄肉中空円壔管の軸方向剪断曲げによつて管厚さ t なる円周方向に沿つて剪断応力 τ_φ を生じ（図—1），この場合その大きさは一般的に次式で示される。

$$\tau_\varphi = \frac{QS}{2tJ} \qquad \cdots\cdots(1)$$

ただし S：断面の中立軸 $n-n$ の廻りの τ_φ のための断面1次モーメント（図—1斜線部分）

J：$n-n$ 軸のまわりの全断面の断面2次モーメント



図—1

管厚に比較して管半径 r が大きいときは

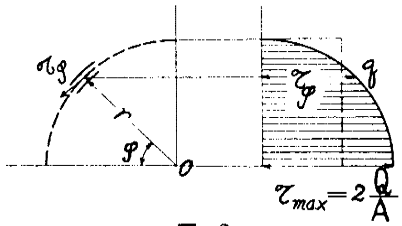
$$S=2\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi\, dA = 2\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} r\sin\varphi(trd\varphi) = 2tr^2\cos\varphi$$

$$J=\frac{\pi}{4}\left[\left(r+\frac{t}{2}\right)^4-\left(r-\frac{t}{2}\right)^4\right]$$

$$=\frac{\pi r^4}{4}\left[\left(1+\frac{t}{2r}\right)^4-\left(1-\frac{t}{2r}\right)^4\right]$$

$$=\frac{\pi r^4}{4}\left(\left[1+2\frac{t}{r}\right)-\left(1-2\frac{t}{r}\right)\right]=\pi tr^3$$

$$\therefore\quad \tau_\varphi = \frac{Q}{2t}\cdot\frac{2tr^2\cos\varphi}{\pi tr^3} = \frac{Q\cos\varphi}{\pi tr} = 2\frac{Q}{A}\cos\varphi \qquad \cdots\cdots(2)$$



図—2

(2)式によつて図—2の剪断応力 τ_φ の分布図における点 q は，$\tau_{\max}=2\dfrac{Q}{A}$ を半径とする円周上の点として作図することができる。

τ_φ の平均値 τ_{av} を求めると

$$\tau_{av} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau_\varphi d\varphi = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{Q}{A} = 1.274\frac{Q}{A} = \kappa_0\frac{Q}{A}$$

あるいは

$$=\frac{2}{\pi}\tau_{\max} = 0.637\,\tau_{\max} \qquad \cdots\cdots(3)$$

ただし

$$\kappa_0 = 1.274$$

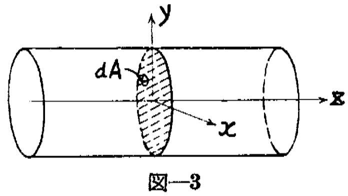
剪断力弾性エネルギーの容積積分 U_Q を一般的に求めると

$$U_Q = \frac{1}{2}\int \tau\gamma dv$$

$$=\frac{1}{2}\iiint \tau\frac{\tau}{G}\,dxdydz$$

$$=\frac{1}{2}\iint\frac{\tau^2}{G}\,dAdz$$

ここで剪断歪 γ，微小容積 dv，剪断弾性係数 G としている。



図—3

今 τ をこの問題の場合に平均値 τ_{av} で近似的に置き換えることができるものとすれば，τ_{av} は面積積分について定値となるから U_Q は次のようにあらわしうる。

$$\left.\begin{aligned} U_Q &= \frac{1}{2}\int\left(\oint\kappa_0^2\frac{Q^2}{GA^2}dA\right)dz \\ &= \frac{1}{2}\int\kappa_0^2\frac{Q^2}{GA^2}\left(\oint dA\right)dz \\ &= \int_z\kappa_0^2\frac{Q^2}{2GA}dz = \int\kappa\frac{Q^2}{2GA}dz \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

ただし

$$\kappa = \kappa_0^2 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = 1.6211$$

従つて剪断力に対する有効断面積を A_e とすれば

$$A_e = \frac{A}{\kappa} = \frac{A}{1.6211} = 0.617\,A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

すなわち，薄肉中空円壔管の剪断有効断面は，実用上その総断面積の 61.7% と見ることができる。

以上は薄肉中空円壔管の場合のみに問題を限つたが，他の断面型の場合に対してもその剪断有効断面を決める係数 κ の近似値は本論文で述べた理論的径路に従つて一般的に求めることができるものである。