Riseの小さい円形拱の挫屈について

On the buckling of circular arch with small rise

正員　北海道開発局　札幌開発建設部　猪瀬寧雄

要旨

円形拱に uniform pressure の作用する場合，拱の rise が比較的大きい場合にはこの拱が挫屈を生ずるまでは周知の通り拱には軸力が作用するのみであり，曲げモーメントは生じないものとして計算を行なつている。しかし rise が小さくかつ挟角の比較的小さい場合には，端末の影響が荷重の増大と共に現われて来て，拱は挫屈を生ずる前に既に曲げ(Bending)を受けているので挫屈荷重は従来の方法[1]で求めたものよりも大きくなる筈である。本文はその誤差の程度を比較的 rise の小さい場合について吟味したもので，拱の rise が極度に小さい場合については[2]触れないこととした。

1. 基本方程式

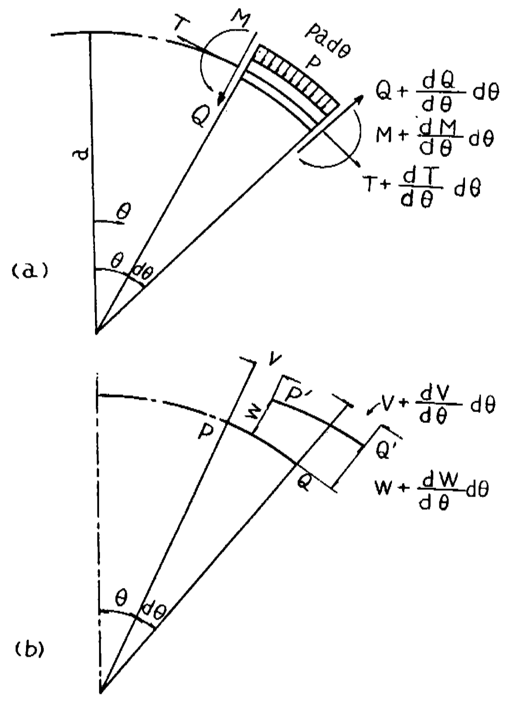


Abb. 1.

挫屈時の変形状況を考えてみるに Abb. 1. (b) のごとく $\widehat{PQ}$ なる要素は $\widehat{P'Q'}$ に移動し Q' 断面の P' 断面に対する傾きの変化 (原形の場合は $d\theta$) を考慮に入れて微小要素 $ad\theta$ の釣合の方程式を求めると次のようになる。

ただし　v : tangential displacement

　　　　w : radial displacement

法線方向の釣合

$$\frac{dQ}{d\theta}=T\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{a}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)+pa\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv}{d\theta}+\frac{w}{a}\right) \tag{1}$$

切線方向の釣合

$$\frac{dT}{d\theta}+Q\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{a}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)=0 \tag{2}$$

モーメントの釣合

$$Q=\frac{1}{a}\frac{dM}{d\theta} \tag{3}$$

(1), (2), (3) より Q を消去して

(1) より

$$\frac{1}{a}\frac{d^2M}{d\theta^2}=T\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{a}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)+pa\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv}{d\theta}+\frac{w}{a}\right) \tag{1$'$}$$

(2) より

$$\frac{dT}{d\theta}+\frac{1}{a}\frac{dM}{d\theta}\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{a}\frac{d^2w}{d\theta^2}\right)=0 \tag{2$'$}$$

変位成分の軸力 T 及び曲げモーメント M との間には次の関係がある。[3]

$$\left.\begin{aligned}T&=\frac{EA}{a}\left(\frac{dv}{d\theta}+w\right)+\frac{EI}{a^3}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}+w\right)-pa\\ M&=-\frac{EI}{a^2}\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}+w\right)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

---

1) Timoschenko, Theory of elastic stability.
2) S. Timoschenko, Theory of elastic stability.
　倉西正嗣，弾性学.
3) Timoschenko, Theory of elastic stability.

(1)′, (2)′ に (4) を代入，整理すると

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\dfrac{d}{d\theta^2}\left[EI\left(\dfrac{d^2w}{d\theta^2}+w\right)\right] \\ \quad +\left(\dfrac{EI}{a^3}+p\right)\left(\dfrac{d^2w}{d\theta^2}+w\right)+\dfrac{EA}{a}\left(\dfrac{dv}{d\theta}+w\right)=0 & (5) \\ \dfrac{d}{d\theta}\left[EA\left(\dfrac{dv}{d\theta}+w\right)\right]=0 & (6) \end{cases}$$

ここに　$I=I_0 i(\theta)$，$\dfrac{pa^3}{EI_0}=\alpha^2$

とおき (6) を積分して

$$EA\left(\frac{dw}{d\theta}+w\right)=\frac{EI_0}{a^2}C\,\text{(integration constant)}$$

この関係を (5) に入れると

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left[i(\theta)\left(\frac{dw^2}{d\theta^2}+w\right)\right] +(i(\theta)+\alpha^2)\left(\frac{d^2w}{d\theta^2}+w\right)+C=0 \qquad (7)$$

(7)が従来の考え方による円弧拱の挫屈後の変形の基本方程式で本式より Eigenwert α を求めると挫屈荷重を決定することができる。

しかし実際には p が作用すると拱には軸力と同時に曲げモーメントが作用する筈であるから，挫屈後の軸力を (4) で表わすと相当の error を生ずる可能性があり，次のような取扱をするのが正当である。

今

v_0, w_0　挫屈直前の変位成分

T_0, M_0　〃　の軸力および曲げモーメント

v, w　挫屈後の変位成分

T, M　〃　の軸力および曲げモーメント

v', w'　挫屈後の変位成分の増加

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0+v' \\ w &= w_0+w' \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} T_0 &= \frac{EA}{a}\left(\frac{dv_0}{d\theta}+w_0\right)+\frac{EI}{a^3}\left(\frac{d^2w_0}{d\theta^2}+w_0\right) \\ M_0 &= -\frac{EI}{a}\left(\frac{d^2w_0}{d\theta^2}+w_0\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4)'$$

$$\left.\begin{aligned} T &= T_0+\frac{EA}{a}\left(\frac{dv'}{d\theta}+w'\right)+\frac{EI}{a^3}\left(\frac{d^2w'}{d\theta^2}+w'\right) \\ M &= M_0-\frac{EI}{a^2}\left(\frac{d^2w'}{d\theta^2}+w'\right) \end{aligned}\right\} \qquad (4)''$$

挫屈直前の釣合は (1)′ 及び (2)′ より

$$\frac{1}{a}\frac{d^2M_0}{d\theta^2}=T_0\left(1+\frac{dv_0}{d\theta}-\frac{1}{a}\frac{d^2w_0}{d\theta^2}\right) +pa\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv_0}{d\theta}+\frac{w_0}{a}\right) \qquad (1)''$$

$$\frac{dT_0}{d\theta}+\frac{1}{a}\frac{dM_0}{d\theta}\left(1+\frac{1}{a}\frac{dv_0}{d\theta}-\frac{1}{a}\frac{d^2w_0}{d\theta^2}\right)=0 \qquad (2)''$$

(1)″, (2)″ の中に (4)′ に代入し，高次の無限小を省略し断面を一定とすると

$$\begin{cases} \dfrac{d^4w_0}{d\theta^4}+2\dfrac{d^2w_0}{d\theta^2}+w_0+(\alpha^2+\beta^2)\left(\dfrac{dv_0}{d\theta}+w_0\right)=-\alpha^2 a & (8) \\ \dfrac{d^2v_0}{d\theta^2}+\dfrac{dw_0}{d\theta}=0 & (9) \end{cases}$$

ただし　$\alpha^2=\dfrac{pa^3}{EI}$，　$\beta^2=\dfrac{a^2A}{I}$

(4)″ を (1)′，(2)′ に入れると

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a}\dfrac{d^2M_0}{d\theta^2}-\dfrac{EI}{a^3}\dfrac{d^2}{d\theta^2}\left(\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}+w'\right) \\ \quad =\left\{T_0+\dfrac{EA}{a}\left(\dfrac{dv'}{d\theta}+w'\right)+\dfrac{EI}{a^3}\left(\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}+w'\right)\right\} \\ \quad \times\left(1+\dfrac{dv_0}{ad\theta}-\dfrac{1}{a}\dfrac{d^2w_0}{d\theta^2}+\dfrac{1}{a}\dfrac{dv'}{d\theta}-\dfrac{1}{a}\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}\right) \\ \quad +pa\left(1+\dfrac{1}{a}\dfrac{dv_0}{d\theta}+\dfrac{w_0}{a}+\dfrac{dv'}{ad\theta}+\dfrac{w'}{a}\right) \\ \dfrac{dT_0}{d\theta}+\dfrac{EA}{a}\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{dv'}{d\theta}+w'\right)+\dfrac{EI}{a^3}\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}+w'\right) \\ \quad +\left(\dfrac{1}{a}\dfrac{dM_0}{d\theta}-\dfrac{EI}{a^3}\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}+w'\right)\right)\left(1+\dfrac{1}{a}\dfrac{dv_0}{d\theta}\right. \\ \quad \left.-\dfrac{1}{a}\dfrac{d^2w_0}{d\theta^2}+\dfrac{1}{a}\dfrac{dv'}{d\theta}-\dfrac{1}{a}\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}\right)=0 \end{cases}$$

本式を (1)″, (2)″ の関係を用いて整理し，高位の微小項を省略すると

$$\begin{cases} \dfrac{EI}{a^3}\left(\dfrac{d^4w'}{d\theta^4}+\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}\right)+\dfrac{T_0}{a}\left(\dfrac{dv'}{d\theta}-\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}\right)+\dfrac{EA}{a}\left(\dfrac{dv'}{d\theta}\right. \\ \quad \left.+w'\right)+\dfrac{EI}{a^3}\left(\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}+w'\right)+p\left(\dfrac{dv'}{d\theta}+w'\right)=0 & (10) \\ \dfrac{EA}{a}\left(\dfrac{d^2v'}{d\theta^2}+\dfrac{dw'}{d\theta}\right)+\dfrac{1}{a^2}\dfrac{dM_0}{d\theta}\left(\dfrac{dv'}{d\theta}-\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}\right)=0 & (11) \end{cases}$$

まず (8), (9) を解き w_0, v_0 を決定し，これを (4)′ に入れて T_0, M_0 を求め，この T_0, M_0 を (10), (11) に入れると v', w' を決定することができる。

(9) を積分して

$$\frac{dv_0}{d\theta}+w_0=C_0\ \text{(integration constant)} \qquad (12)$$

(8) より

$$\frac{d^4w_0}{d\theta^4}+2\frac{d^2w_0}{d\theta^2}+w_0=-(\alpha^2+\beta^2)C_0-\alpha^2a$$

本式を解けば

$$w_0=-(\alpha^2+\beta^2)C_0-\alpha^2a+C_1\cos\theta+C_2\sin\theta +C_3\theta\cos\theta+C_4\theta\sin\theta$$

ただし　C_1, C_2, C_3, C_4……integration constants.

両端の条件が等しいとすると w_0 は θ の偶函数となる筈であるから

$$C_2=C_3=0$$

$$\therefore\ w_0=-(\alpha^2+\beta^2)C_0-\alpha^2a+C_1\cos\theta+C_4\theta\sin\theta \qquad (13)$$

(12) に w_0 を入れ積分すると

$v_0 = C_5+(1+\alpha^2+\beta^2)C_0\theta - C_1\sin\theta + C_4(\theta\cos\theta-\sin\theta)$

v_0 は θ について奇函数であるから

$$C_5 = 0$$

ゆえに

$$v_0=(1+\alpha^2+\beta^2)C_0\theta - C_1\sin\theta+C_4(\theta\cos\theta-\sin\theta) \quad (14)$$

積分常数 C_0, C_1, C_4 は次の境界条件から求められる

$\theta=\theta_0$ にて

$$v_0 = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$w_0 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\frac{dw_0}{d\theta} = 0 \quad \text{(both ends fixed)} \qquad \text{(iii)}$$

$$\frac{d^2w_0}{d\theta^2}+w_0 = 0 \quad \text{(both ends pin)} \qquad \text{(iii)}'$$

この条件を (13), (14) に入れると

(i) より

$$(1+\alpha^2+\beta^2)C_0\theta_0 - C_1\sin\theta_0 + C_4(\theta_0\cos\theta_0-\sin\theta_0) = -\alpha^2 a\,\theta_0$$

(ii) より

$$-(\alpha^2+\beta^2)C_0 + C_1\cos\theta_0 + C_4\theta_0\sin\theta_0 = \alpha^2 a$$

(iii) より

$$-C_1\sin\theta_0 + C_4(\sin\theta_0+\theta_0\cos\theta_0) = 0$$

(iii)′ より

$$-(\alpha^2+\beta^2)C_0 + 2C_4\cos\theta_0 = \alpha^2 a$$

本式を解いて

$$C_0 = \frac{D_0}{D}a = k_0 a$$

$$C_1 = \frac{D_1}{D}a = k_1 a$$

$$C_4 = \frac{D_4}{D}a = k_4 a$$

(1) Both Ends Fixed

$$D = \begin{vmatrix} (1+\alpha^2+\beta^2)\theta_0 & -\sin\theta_0 & \theta_0\cos\theta_0-\sin\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & \cos\theta_0 & \theta_0\sin\theta_0 \\ 0 & -\sin\theta_0 & \sin\theta_0+\theta_0\cos\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$D_0 = \alpha^2\begin{vmatrix} -\theta_0 & -\sin\theta_0 & \theta_0\cos\theta_0-\sin\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_0 & \theta_0\sin\theta_0 \\ 0 & -\sin\theta_0 & \sin\theta_0+\theta_0\cos\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \alpha^2\begin{vmatrix} (1+\alpha^2+\beta^2)\theta_0 & -\theta_0 & \theta_0\cos\theta_0-\sin\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & 1 & \theta_0\sin\theta_0 \\ 0 & 0 & \sin\theta_0+\theta_0\cos\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \alpha^2\begin{vmatrix} (1+\alpha^2+\beta^2)\theta_0 & -\sin\theta_0 & -\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & \cos\theta_0 & 1 \\ 0 & -\sin\theta_0 & 0 \end{vmatrix}$$

(2) Both Ends Pin

$$D = \begin{vmatrix} (1+\alpha^2+\beta^2)\theta_0 & -\sin\theta_0 & \theta_0\cos\theta_0-\sin\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & \cos\theta_0 & \theta_0\sin\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & 0 & 2\cos\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$D_0 = \alpha^2\begin{vmatrix} -\theta_0 & -\sin\theta_0 & \theta_0\cos\theta_0-\sin\theta_0 \\ 1 & \cos\theta_0 & \theta_0\sin\theta_0 \\ 1 & 0 & 2\cos\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \alpha^2\begin{vmatrix} (1+\alpha^2+\beta^2)\theta_0 & -\theta_0 & \theta_0\cos\theta_0-\sin\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & 1 & \theta_0\sin\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & 1 & 2\cos\theta_0 \end{vmatrix}$$

$$D_4 = \alpha^2\begin{vmatrix} (1+\alpha^2+\beta^2)\theta_0 & -\sin\theta_0 & -\theta_0 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & \cos\theta_0 & 1 \\ -(\alpha^2+\beta^2) & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

以上で Integration Constant が求められたのでこれを (4)′ に入れて T_0, M_0 を求めると次のようになる。

$$T_0 = \frac{EA}{a}C_0 - \frac{EI}{a^3}\left\{(\alpha^2+\beta^2)C_0+\alpha^2 a-2C_4\cos\theta\right\}$$

$$= -\frac{EI}{a^3}\left\{\alpha^2(C_0+a)-2C_4\cos\theta\right\}$$

$$M_0 = \frac{EI}{a^2}\left\{(\alpha^2+\beta^2)C_0+\alpha^2 a-2C_4\cos\theta\right\}$$

この T_0, M_0 を (10), (11) に入れて整理すると

$$L_1 = \frac{d^4w'}{d\theta^4}+(2-\beta^2k_0)\frac{d^2w'}{d\theta^2}+\beta^2\frac{dw'}{d\theta}+(1+\alpha^2+\beta^2)w' + \beta^2\frac{d^2v'}{d\theta^2}+\left(\alpha^2+(1+k_0)\beta^2\right)\frac{dv'}{d\theta} = 0 \qquad (10)'$$

$$L_2 = \frac{d^2v'}{d\theta^2}+\left\{k_0+(1+k_0)\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{2k_4}{\beta^2}\cos\theta\right\}\frac{dv'}{d\theta} - \left\{k_0+(1+k_0)\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{2k_4}{\beta^2}\cos\theta\right\}\frac{d^2w'}{d\theta^2}+\frac{dw'}{d\theta} = 0 \quad (11)'$$

(10)′, (11)′ を連立方程式として解き，v', w' を求めれば吾々の問題は解決せられることとなる。

次に両端 Pin の場合について近似解を示すことにする。

2. 両端 Pin の場合の解

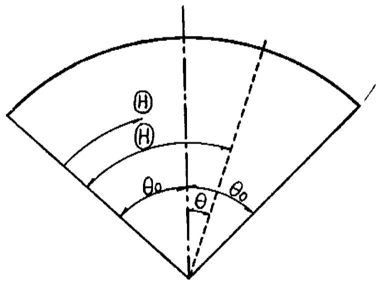


Abb. 2

(10)′, (11)′ を解くために Galerkin[1] の近似解を用いる。取扱を簡単にするために変数 θ を次のように変換する。

$$\Theta = \theta+\theta_0$$

1) Duncan, Principle of the Galerkin Method.
 〃 Galerkin's Method in Mechanics and Differential Equations.

境界条件としては

$$\theta=\pm 0,\quad v'=0,\quad w'=0$$

および $\dfrac{d^2w'}{d\theta^2}+w'=0$

故に今変位成分 v', w' を次のように示せば境界条件は満足せられる。

$$v'=\sum_{m=1}^{\infty}a_m v_m=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\sin\frac{m\pi\Theta}{2\theta_0} \tag{16-1}$$

$$w'=\sum_{m=1}^{\infty}b_m w_m=\sum_{m=1}^{\infty}b_m\sin\frac{m\pi\Theta}{\theta_0} \tag{16-2}$$

新変数 Θ を用いると (10)′, (11)′ は次のようになる。

$$\begin{cases} L_1=\dfrac{d^4w'}{d\Theta^4}+(2-\beta^2k_0)\dfrac{d^2w'}{d\Theta^2}+\beta^2\dfrac{2dw'}{d\Theta}+(1+\alpha^2+\beta^2)w' \\ \quad +\beta^2\dfrac{d^2v'}{d\Theta^2}+\left(\alpha^2+(1+k_0)\beta^2\right)\dfrac{dv'}{d\Theta}=0 & (10)'' \\ L_2=\dfrac{d^2v'}{d\Theta^2}+\left\{k_0+(1+k_0)\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{2k_4}{\beta^2}\cos(\Theta-\theta_0)\right\}\dfrac{dv'}{d\Theta} \\ \quad -\left\{k_0+(1+k_0)\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{2k_4}{\beta^2}\cos(\Theta-\theta_0)\right\}\dfrac{d^2w'}{d\Theta^2} \\ \quad +\dfrac{dw'}{d\Theta}=0 & (11)'' \end{cases}$$

(16-1), (16-2) を (10)″, (11)″ に代入して誤差を計算すると

$$\begin{cases} \varepsilon_1=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\Big[-\beta^2\left(\dfrac{m\pi}{2\theta_0}\right)^2\sin\dfrac{m\pi\Theta}{2\theta_0}+\left\{\alpha^2+(1+k_0)\beta^2\right\} \\ \quad\times\left(\dfrac{m\pi}{2\theta_0}\right)\cos\dfrac{m\pi\Theta}{2\theta_0}\Big] \\ \quad+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\Big[\left\{\left(\dfrac{m\pi}{\theta_0}\right)^4-(2-k_0\beta^2)\left(\dfrac{m\pi}{\theta_0}\right)^2+(1+\alpha^2+\beta^2)\right\} \\ \quad\sin\dfrac{m\pi\Theta}{\theta_0}+\beta^2\left(\dfrac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos\dfrac{m\pi\Theta}{\theta_0}\Big] \\ \varepsilon_2=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\Big[-\left(\dfrac{m\pi}{2\theta_0}\right)^2\sin\dfrac{m\pi\Theta}{2\theta_0}+\Big\{k_0+(1+k_0)\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} \\ \quad-2\dfrac{k_4}{\beta^2}\cos(\Theta-\theta_0)\Big\}\times\left(\dfrac{m\pi}{2\theta_0}\right)\cos\dfrac{m\pi\Theta}{2\theta_0}\Big] \\ \quad+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\Big[\left\{k_0+(1+k_0)\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-2\dfrac{k_4}{\beta_2}\cos(\Theta-\theta_0)\right\} \\ \quad\times\left(\dfrac{m\pi}{\theta_0}\right)^2\sin\dfrac{m\pi\Theta}{\theta_0}+\left(\dfrac{m\pi}{\theta_0}\right)\cos\dfrac{m\pi\Theta}{\theta_0}\Big] \end{cases}$$

Galerkin's method により

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\theta_0}\varepsilon_1 w_n d\Theta=\int_0^{2\theta_0}\varepsilon_1\sin\frac{n\pi\Theta}{\theta_0}\,d\Theta=0 & (17\cdot1) \\ \displaystyle\int_0^{2\theta_0}\varepsilon_2 v_n d\Theta=\int_0^{2\theta_0}\varepsilon_2\sin\frac{n\pi\Theta}{2\theta_0}\,d\Theta=0 & (17\cdot2) \end{cases}$$

(17·1) において

$$\int_0^{2\theta_0}\sin\frac{m\pi\Theta}{2\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{\theta_0}\,d\Theta=0 \qquad m\neq 2n$$
$$=\theta_0 \qquad m=2n$$

$$\int_0^{2\theta_0}\cos\frac{m\pi\Theta}{2\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{\theta_0}\,d\Theta=0 \qquad n=\text{偶数}$$
$$=\frac{8\theta_0}{\pi}\frac{n}{2n^2-m^2}=\frac{8\theta_0}{\pi}J_{m,n}$$
$$m=\text{奇数}$$

$$\int_0^{2\theta_0}\sin\frac{m\pi\Theta}{\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{\theta_0}\,d\Theta=\theta_0 \qquad m=n$$
$$=0 \qquad m\neq n$$

$$\int_0^{2\theta_0}\cos\frac{m\pi\Theta}{\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{\theta_0}\,d\Theta=0$$

故に (17·1) は

$$b_n=A_n a_{2n}-\sum_{m=1}^{\infty}B_{m,n}a_m \tag{18·1}$$

$$A_n=\frac{\beta^2\left(\dfrac{n\pi}{\theta_0}\right)^2}{\left(\dfrac{n\pi}{\theta_0}\right)^4-(2-k_0\beta^2)\left(\dfrac{n\pi}{\theta_0}\right)^2+(1+\alpha^2+\beta^2)}$$

$$B_{m,n}=\frac{\dfrac{8}{\pi}(\alpha^2+(1+k_0)\beta^2)\left(\dfrac{m\pi}{2\theta_0}\right)J_{m,n}}{\left(\dfrac{n\pi}{\theta_0}\right)^4-(2-k_0\beta^2)\left(\dfrac{n\pi}{\theta_0}\right)^2+(1+\alpha^2+\beta^2)}=k_{m,n}J_{m,n}$$

(17·2) は

$$\int_0^{2\theta_0}\sin\frac{m\pi\Theta}{2\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{2\theta_0}\,d\Theta=\theta_0 \qquad m=n$$
$$=0 \qquad m\neq n$$

$$\int_0^{2\theta_0}\cos\frac{m\pi\Theta}{2\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{2\theta_0}\,d\Theta=0 \qquad m\pm n=0\ \text{および偶数}$$
$$=\frac{4\theta_0}{\pi}\frac{n}{n_2-m_2}=\frac{4\theta_0}{\pi}D_{m,n}$$
$$m\pm n=\text{奇数}$$

$$\int_0^{2\theta_0}\cos(\Theta-\theta_0)\cos\frac{m\pi\Theta}{2\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{2\theta_0}\,d\Theta=0$$
$$m\pm n=0\ \text{および偶数}$$
$$=-2\theta_0\cos\theta_0\left(\frac{\overline{m-n}\,\pi}{\overline{m-n}^2\pi^2-4\theta_0^2}-\frac{\overline{m+n}\,\pi}{\overline{m+n}^2\pi^2-4\theta_0^2}\right)$$
$$=-2\theta_0\cos\theta_0\,E_{m,n} \qquad m\pm n=\text{奇数}$$

$$\int_0^{2\theta_0}\sin\frac{m\pi\Theta}{\theta_0}\sin\frac{n\pi\theta}{2\theta_0}\,d\Theta=\theta_0 \qquad 2m=n$$
$$=0 \qquad 2m\neq n$$

$$\int_0^{2\theta_0}\cos\frac{m\pi\Theta}{\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{2\theta_0}\,d\Theta=0,\ 2m\pm n=0\ \text{および偶数}$$
$$=\frac{4\theta_0}{\pi}\frac{n}{n^2-2m^2}=\frac{4\theta_0}{\pi}F_{m,n}$$
$$n=\text{奇数}$$

$$\int_0^{2\theta_0}\cos(\Theta-\theta_0)\sin\frac{m\pi\Theta}{\theta_0}\sin\frac{n\pi\Theta}{2\theta_0}\,d\Theta=0 \qquad n=\text{奇数}$$
$$=-4\theta_0^2\sin\theta_0\left[\frac{1}{\overline{2m-n}^2\pi^2-4\theta_0^2}-\frac{1}{\overline{2m-n}^2\pi^2-4\theta_0^2}\right]$$
$$=-4\theta_0^2\sin\theta_0\ H_{m,n} \qquad 2m\pm n=0\ \text{および偶数}$$

したがつて (17·2) は

$$a_n-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{8\theta_0}{\pi}\left(\frac{m}{n^2}\right)\Big[\left(k_0+(1+k_0)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)\frac{D_{m,n}}{\pi}+\frac{k_4}{\beta_2}$$
$$\cos\theta_0\,E_{m,n}\Big]a_m-\left(k_0+(1+k_0)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right)b_{\frac{n}{2}}$$
$$-\frac{16\theta_0}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m}{n^2}\left[\frac{2\pi^2k_4}{\beta^2}\sin\theta_0 m\cdot H_{m,n}+F_{m,n}\right]b_m=0$$
$$\tag{18·2}$$

(18·1), (18·2) から b_m を消去すると

$$a_n - \frac{8\theta_0}{n\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} m\left[K_0\cdot D_{mn} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{m,n}\right]a_m$$

$$-K_0\cdot A_{n/2}\cdot a_n + K_0\sum_{m=1}^{\infty} B_{m\cdot n/2}\cdot a_m$$

$$-\frac{16\theta_0}{n\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot G_{m,n}\left[A_m\cdot a_{2m} - \sum_{i=1}^{\infty} B_{i,m}\cdot a_i\right] = 0$$

where

$$K_0 = k_0 + (1+k_0)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

$$G_{m,n} = \frac{2\pi^2 k_4}{\beta^2}\sin\theta_0\, H_{m,n} + F_{m,n}$$

しかして

$$\sum_{m=1}^{\infty} m\cdot G_{m,n}\sum_{i=1}^{\infty} B_{i,m}\cdot a_i = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\left[\sum_{i=1}^{\infty} i\, G_{i,n}B_{m,i}\right]$$

したがつて

$$(1-K_0A_{n/2})\,a_n + \sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{16\theta_0}{n\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty} i\, G_{in}B_{m,i} - \frac{8\theta_0}{n\pi^2}m\right.$$

$$\left.\left(K_0\cdot D_{m,n} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{mn}\right) + K_0\cdot B_{m,n/2}\right]a_m$$

$$-\frac{16\theta_0}{n\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty} m\, G_{m,n}\, A_m\, a_{2m} = 0 \qquad (19)$$

(19) に $n=1, 2, 3, \cdots$ を入れると

$$n=1;\ (1+L_{1\cdot1})a_1 - L_{2\cdot1}a_2 + L_{3\cdot1}a_3 - L_{4\cdot1}a_4 + \cdots\cdots = 0$$

$$n=2;\ L_{1\cdot2}a_1 + (1-K_0A_1)a_2 + L_{3\cdot2}a_3 + L_{5\cdot2}a_5\ \cdots\cdots = 0$$

$$n=3;\ L_{1\cdot3}a_1 - L_{2\cdot3}a_2 + (1+L_{3\cdot3})\,a_3 - L_{4\cdot3}a_4\ \cdots\cdots = 0$$

$$n=4;\ L_{1\cdot4}a_1 + L_{2\cdot4}a_3 + (1-K_0\cdot A_1)\,a_4 + \ \cdots\cdots\cdots\cdots = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (19)'$$

$$L_{1\cdot1} = \frac{16\theta_0}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot1}B_{i\cdot1}$$

$$L_{2\cdot1} = \frac{16\theta_0}{\pi^2}\left[1\cdot G_{1,1}A_1 + \frac{2}{2}\left(K_0\cdot D_{2\cdot1} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{2\cdot1}\right)\right]$$

$$L_{3\cdot1} = \frac{16\theta_0}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot1}B_{3\cdot i}$$

$$L_{4\cdot1} = \frac{16\theta_0}{\pi^2}\left[2G_{2\cdot1}\cdot A_2 + \frac{4}{2}\left(K_0D_{4\cdot1} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{4\cdot1}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{1\cdot2} = K_0\cdot B_{1\cdot1} - \frac{1\times8\theta_0}{2\pi^2}\left(K_0\cdot D_{1\cdot2} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{1\cdot2}\right)$$

$$L_{3\cdot2} = K_0\cdot B_{3\cdot1} - \frac{3\times8\theta_0}{2\pi^2}\left(K_0\cdot D_{3\cdot2} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{3\cdot2}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$L_{1\cdot3} = \frac{16\theta_0}{3\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot3}B_{1\cdot i}$$

$$L_{2\cdot3} = \frac{16\theta_0}{3\pi^2}\left[1\cdot G_{1\cdot3}A_1 + \frac{2}{2}\left(K_0\cdot D_{2\cdot3} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{2\cdot3}\right)\right]$$

$$L_{3\cdot3} = \frac{16\theta_0}{3\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot3}B_{3\cdot i}$$

$$L_{4\cdot3} = \frac{16\theta_0}{3\pi^2}\left[2\cdot G_{2\cdot3}A_2 + \frac{4}{2}\left(K_0\cdot D_{4\cdot3} + \frac{\pi k_4}{\beta^2}\cos\theta_0\cdot E_{4\cdot3}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

次に

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot1}B_{1\cdot i} = \left[\frac{2\pi^2 k_4}{\beta^2}\sin\theta_0\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot1}J_{1\cdot i}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot1}J_{1\cdot i}\right]K_1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot1}J_{1\cdot i} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\frac{\tan\theta_0}{\theta_0} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2i^2-1}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{\overline{2i-1}^2\pi^2-4\theta_0^2} - \frac{1}{\overline{2i+1}^2\pi^2-4\theta_0^2}\right)^{1)}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot1}J_{1\cdot i} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(2i^2-1)^2}\right) = -0.15421$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot1}B_{3\cdot i} = 3\left[\frac{2\pi^2 k_4}{\beta^2}\sin\theta_0\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot1}J_{3\cdot i}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot1}J_{3\cdot i}\right]K_3$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot1}J_{3\cdot i} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{8}\frac{\tan\theta_0}{\theta_0} + 9\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2i^2-3^2}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{\overline{2i-1}^2\pi^2-4\theta_0} - \frac{1}{\overline{2i+1}^2\pi^2-4\theta_0}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot1}J_{3\cdot i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot3}B_{1\cdot i} = \left[\frac{2\pi^2 k_4}{\beta^2}\sin\theta_0\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot3}J_{1\cdot i}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot3}J_{1\cdot i}\right]K_1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot3}J_{1\cdot i} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{8}\frac{\tan\theta_0}{\theta_0} + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{(2i^2-1)}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{\overline{2i-3}^2\pi^2-4\theta_0} - \frac{1}{\overline{2i+3}^2\pi^2-4\theta_0^2}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot3}J_{1\cdot i} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot G_{i\cdot3}B_{3\cdot i} = 3\left[\frac{2\pi^2 k_4}{\beta^2}\sin\theta_0\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot3}J_{3\cdot i}\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot3}J_{3\cdot i}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot H_{i\cdot3}J_{3\cdot i} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{8}\frac{\tan\theta_0}{\theta_0} + 9\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2i^2-3^2}\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{\overline{2i-3}^2\pi^2-4\theta_0^2} - \frac{1}{\overline{2i+3}^2\pi^2-4\theta_0^2}\right)\right]$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\cdot F_{i\cdot3}J_{3\cdot i} = -0.46259$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(19) または (19)′ は $a_n\,(n=1, 2, 3, \cdots)$ について齊次連立一次方程式で $a_1, a_2, a_3, \cdots$ が同次に 0 にならないためには係数の行列式が 0 とならなければならない。

---

1) Mittag-Leffler の定理によるもので，例えば 竹内端三； 函数論 p. 355～p. 343.

$$D=\begin{vmatrix} 1+L_{1\cdot1} & -L_{2\cdot1} & L_{3\cdot1}\cdots\cdots \\ L_{1\cdot2} & 1-K_0\cdot A_1 & L_{3\cdot2}\cdots\cdots \\ L_{1\cdot3} & -L_{2\cdot3} & 1+L_{3\cdot3}\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \end{vmatrix}=0 \qquad (20)$$

(20) を解いて α^2 の根を求めると挫屈荷重が求められる。

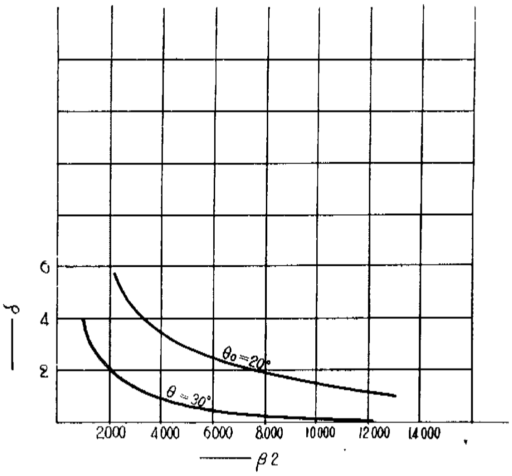
3. 結　　語

紙数の関係で数値計算は本文では省略するが，実例を調べて見ると β^2 の値としては

東京都万年橋[1)]　　$\beta^2 \doteqdot 6000$

愛知県鹿乗橋　　$\beta^2 \doteqdot 3800$

そこで β^2 の値を種々変えて，この β^2 の値に応ずる本計算法による限界挫屈荷重と従来の方法（すなわち本文 (7) 式に依るもの）による限界荷重との差 δ を計算し β^2 と δ との関係を図に示すと次のようになる。



本図で明らかなように β^2 の値が一般の橋梁に用いられているような範囲にあり，かつ挾角 $2\theta_0$ が 60° 以上のような場合には (7) の解による従来の方法も実用上充分使用できるものである事が分つた。しかし拱の rise が小さくなりかつ β^2 の値が小さくなるにつれて誤差は漸次増大し，本文による計算法を採用しなければならなくなる事は当然である。挾角が 20° 以下の rise の小さい拱の場合には本文で無視省略した 2 次以上の微小項を計算にとり入れなければならぬようになると思われる。

尚本文では both ends pin の場合について述べたものであるが， both ends fixed の場合もこれに類似の結論が得られるものと思われる。

---

1) 何れも筆者の振動測定による強度の判定を行つたもので，詳細は建設省土木研究所報告を参照せられたい。