

平板内におけるプレストレスについて

正 員 室蘭工業大学土木教室教授 工 博 能 町 純 雄

準 員 同 上

助手

佐 藤 昌 昌

1. は し が き

広いフランジを持つ梁の有効幅については古くから Kármán¹⁾ などによつて求められているが、この同じ梁にプレストレスを作用せしめた場合のフランジ内におけるストレスの分布は実用上興味ある問題である。ここでは無限に広いフランジを持つ径間 a なる梁が、任意の位置にプレストレスを受けた場合のフランジ内の応力と有効幅について論じよう。

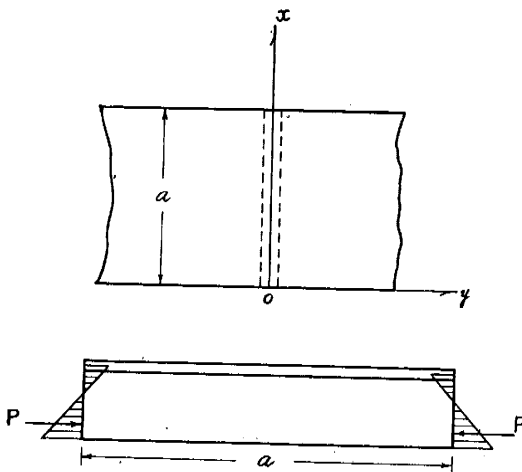


図-1

2. 坐標と断面力

次の様な直交坐標軸を設定する。先ず梁の鉛直中央面とフランジの中央面が、一つの側面と交わる線を各々 z 及び y 軸とし z と y 軸の交点 O を通つて x 軸を両軸に直角にとる。次に Ox を通る断面を考え、 Oxy なる床板と Ox を上面とする梁 Oxz とに分ければ、この両断面に作用する断面力は z 方向垂直力 S_1 、 y 方向垂直力 S_2 及び x 方向に働く剪断力 T となる。これらの断面力が梁を z 方向に曲げ、床板内に平面応力と z 方向の曲げを生ずる。すなわち剪断流理論を用いれば

a) 梁の xz 面内 z 方向の曲げ (S_1, T) ,

b) 床板の平面応力 $(S_2, T/2)$,

c) 床板の曲げ $(S_1/2)$.

上の三つについて個々に計算し、最後に適合条件を適用して各未知断面力を消去することとしよう。

a) 梁の xz 面内の曲げ

この場合梁にはプレストレスが作用しているのであるから、これと等値な状態の境界条件として一様な圧縮力 $(-p_2)$ と下面に圧縮を与える様な中立軸で零となる曲げを与える $p_1 \times \left(1 - \frac{2z}{H}\right)$ が両端に分布していると考ええる。そうすれば St. Venant の原理によりプレストレスの状態をよく表わすこととなる。

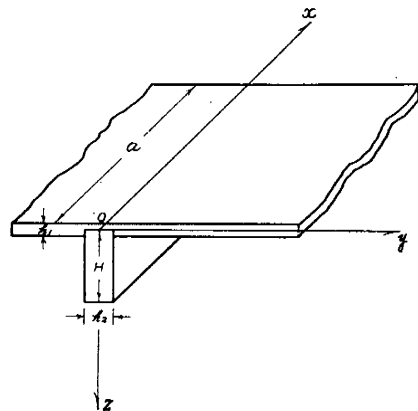


図-2

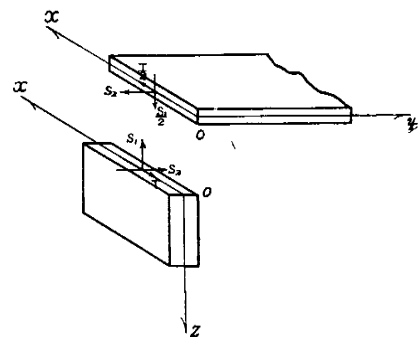


図-3

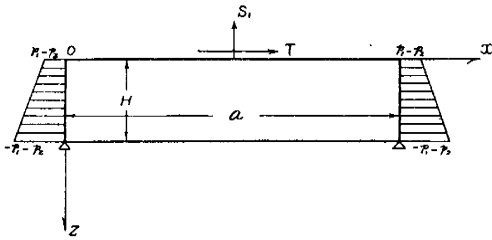


図-4

図-4に示す様な梁を Love が moderately thick plate で取扱った方法を準用し且つ平面保持の仮定を考えれば、 z 方向垂直応力 σ_z 、剪断応力 τ_{xy} 、 x 方向垂直応力 σ_x を

$$S_1 = \sum_m E_m \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad T = \sum_m F_m \cos \frac{m\pi}{a} x \quad \dots (1)$$

とすることにより次の様に書くことができる。

$$h_2 \sigma_z = \sum_m \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \left\{ \frac{E_m}{H^3} (H-z)^2 (H+2z) + \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{F_m}{H^2} (z-H)^2 z \right\}, \quad \dots (2)$$

$$h_2 \tau_{xy} = \sum_m \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \left(\frac{a}{m\pi} \right) \left\{ \frac{E_m}{H^3} 6(H-z)z + \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{F_m}{H^2} (H-z)(H-3z) \right\}, \quad \dots (3)$$

$$h_2 \sigma_x = \sum_m \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \left\{ \frac{E_m}{H^3} 6(2z-H) + \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{F_m}{H^2} (4H-6z) \right\} - \sum_m \frac{2(1-(-1)^m)}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \left\{ \frac{p_1(2z-H)}{H} + p_2 \right\}, \quad \dots (4)$$

但し h_2 は梁の厚さ

また x 方向分変位 u 、 z 方向分変位 w は

$$h_2 E' u = - \sum_m \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \left\{ \frac{E_m}{H^3} 6(2z-H) + \frac{m\pi}{a} \cdot \frac{F_m}{H^2} (4H-6z) \right\} + \sum_m \left(\frac{2}{m\pi} \right) (1-(-1)^m) \times \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \left\{ \frac{p_1(2z-H)}{H} + p_2 \right\}, \quad \dots (5)$$

$$h_2 E' w = \sum_m \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \left(\frac{a}{m\pi} \right)^4 \left\{ \frac{12 E_m}{H^3} - \left(\frac{m\pi}{a} \right) \frac{6 F_m}{H^2} \right\} - \sum_m \left(\frac{2}{m\pi} \right) (1-(-1)^m) \times \left(\frac{a}{m\pi} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \left(\frac{2 p_1}{H} \right), \quad \dots (6)$$

但し E' は梁の弾性係数

b) 床板の平面応力

床板の x 方向及び y 方向分変位を各々 u_2 、 v_2 とすれば、物体力を無視した力の平衡の方程式は

$$(1-\nu) \cdot \Delta(u_2, v_2) + (1+\nu) \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \varepsilon = 0, \quad \dots (7)$$

$$\text{上式中} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \varepsilon = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

この場合の境界条件は

$$x=0, x=a \quad \text{で} \quad \sigma_x = 0, v_2 = 0, \quad \dots (8)$$

y 方向には半無限板であるから、その厚さを h_1 とすれば

$$y=0 \quad \text{で} \quad h_1 \tau_{xy} = h_1 G \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = - \frac{T}{2}, \quad \dots (9)$$

また $\sigma_y = S_2$ の代りにこの構造の対象性を考えて

$$y=0 \quad \text{で} \quad v_2 = 0 \quad \dots (10)$$

で与えられる四境界条件が存在する。これを解けば

$$\left. \begin{aligned} u_2 &= \sum_m \frac{a}{4Gh_1} \cdot \frac{F_m}{m\pi} \left\{ \frac{(3-\nu)}{2} \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) - \frac{(1+\nu)}{2} \frac{m\pi}{a} y \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x, \\ v_2 &= \sum_m \frac{(1+\nu)}{8Gh_1} y \cdot \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) \sin \frac{m\pi}{a} x, \end{aligned} \right\} \quad \dots (11)$$

また E を床板の弾性係数とすれば

$$\sigma_x = - \frac{E}{8Gh_1} \sum_m F_m \left\{ (3+\nu)(1-\nu) \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) - (1-\nu^2) \frac{m\pi}{a} y \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad \dots (12)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{8Gh_1} \sum_m F_m \left\{ (1-\nu)^2 \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) - (1-\nu^2) \frac{m\pi}{a} y \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad \dots (13)$$

$$\tau_{xy} = - \sum_m \frac{F_m}{2h_1} \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) \cos \frac{m\pi}{a} x. \quad \dots (14)$$

c) 床板の曲げ

床板の z 方向の撓みを w_2 とすれば、上載荷重がないから平衡の方程式は

$$D \cdot \Delta^2 w_2 = 0, \quad \dots (15)$$

但し $D = Eh_1^3/12(1-\nu^2)$ (板の曲げ剛度)

この場合の境界条件は

$$x=0, x=a \quad \text{で}$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0, \quad \dots (16) \right.$$

$$\left. w_2 = 0, \quad \dots (17) \right.$$

$$y=0 \quad \text{で}$$

$$\left\{ \frac{\partial w_2}{\partial y} = 0, \quad \dots (18) \right.$$

$$\left. D \left\{ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y^2} \right\} = \frac{S_1}{2}, \quad \dots (19) \right.$$

で与えられる。従つてこの四境界条件と微分方程式 (15) を解いて

$$w_2 = \frac{a^2}{N4} \sum_m \frac{E_m}{(m\pi)^3} \left\{ \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) + \left(\frac{m\pi}{a} \right) y \exp \left(-\frac{m\pi}{a} y \right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x. \quad \dots (20)$$

故に x 方向曲げモーメント M_x , y 方向曲げモーメント M_y 及び捩りモーメント M_{xy} は

$$M_x = \frac{a}{4} \sum_m \frac{E_m}{m\pi} \left\{ (1+2\nu) \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) + (1-\nu) \frac{m\pi}{a} y \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (21)$$

$$M_y = \frac{a}{4} \sum_m \frac{E_m}{m\pi} \left\{ (2+\nu) \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) - (1-\nu) \frac{m\pi}{a} y \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (22)$$

$$M_{xy} = (1-\nu) \frac{a}{4} \sum_m \frac{E_m}{m\pi} \cdot \frac{m\pi}{a} y x \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) \cos \frac{m\pi}{a} x. \dots (23)$$

から計算することができる。

3. 適合条件

以上の各変位 u_1, w_1 及び u_2, v_2, w_2 は式中に未知断面力に関するフーリエ変換 E_m, F_m を含んでいるからこれを求める必要がある。このために Ox 線上における各変位間の相等

$$u_1 = u_2,$$

$$w_1 = w_2$$

を用いる。そうすれば次の関係を得る。

$$F_m m\pi \left\{ m\pi + \frac{16ah_1}{Hh_2 \cdot n(3-\nu)(1+\nu)} \right\} - \frac{24E_m h_1 a^2}{H^2 h_2 \cdot n(3-\nu)(1+\nu)} = -(m\pi) \frac{16h_1}{nh_2(3-\nu)(1+\nu)} (p_1 - p_2), \dots (24)$$

$$E_m \left\{ m\pi + \frac{4ah_1^3}{nh_2 \cdot H^3(1-\nu^2)} \right\} - F_m \frac{m\pi 2h_1^3}{nH^3 h_2(1-\nu^2)} = (m\pi) \frac{8p_1 h_1^3}{3nHh_2 \cdot a(1-\nu^2)}. \dots (25)$$

上式を連立に解いて E_m, F_m を次のように求めることができる。

$$E_m = \frac{p_1(m\pi)C(m\pi+A') - (p_1-p_2)(m\pi)C' \cdot B}{(m\pi)^2 + m\pi(A+A') + K}, \dots (26)$$

$$F_m = \frac{-p_1 C' m\pi + p_2 (m\pi + A) C'}{(m\pi)^2 + m\pi(A+A') + K}.$$

或いは $p_2 = ep_1$ とおけば

$$F_m = -C' p_1 \left(\frac{1-e}{m\pi} - A_m \right), \dots (27)$$

但し

$$A_m = \frac{A + A'(1-e) + \frac{K}{m\pi}(1-e)}{(m\pi)^2 + m\pi(A+A') + K},$$

$$A = \frac{4ah_1^3}{nH^3 h_2(1-\nu^2)},$$

$$A' = \frac{16ah_1}{nHh_2(3-\nu)(1+\nu)},$$

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{2h_1^3}{nH^2 h_2(1-\nu^2)}, \\ C &= \frac{8h_1^3}{3nHh_2 a(1-\nu^2)}, \\ C' &= \frac{16h_1}{nh_2(3-\nu)(1+\nu)}, \\ K &= \frac{16a^2 h_1^4}{n^2 H^4 h_2^2 (1+\nu)(3-\nu)(1-\nu^2)}, \\ n &= \frac{E}{E'}. \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

4. 床板内の平面応力と曲げ

以上の (26) (27) を (12) (13) (14) の各式に代入すれば、 $y=0$ における床板の面内応力は

$$\sigma_x|_{y=0} = \frac{(3+\nu)(1-\nu)}{h_2 n(3-\nu)} p_1 \left\{ (1-e) - \sum_m A_m \sin \frac{m\pi}{a} x \right\} \dots (29)$$

上式第1項は、 $\nu=0$ とすればフランジを有しない普通の梁の上面におけるプレストレスの値で、第2項はフランジの効果でそれが打消されることを示す。

$$\sigma_y|_{y=0} = - \frac{(1-\nu)^2}{n(3-\nu)h_2} p_1 \left\{ (1-e) - \sum_m A_m \sin \frac{m\pi}{a} x \right\}, \dots (30)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = - \frac{8p_1}{h_2(3-\nu)} \sum_m \left\{ \frac{(1-e)}{m\pi} - A_m \right\} \cos \frac{m\pi}{a} x. \dots (31)$$

(31) 式の函数は第1項が、 $x=0$ 或いは a で無限大になる性質を持っているから、この様な構造では両側の梁と床板の附根に大きな剪断応力が生くことを示す。

次に床板の曲げは (26) と (21) (22) (23) 式から、 $y=0$ では

$$M_x = \frac{a}{4} \sum_m \frac{E_m}{m\pi} (1+2\nu) \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (32)$$

$$M_y = \frac{a}{4} \sum_m \frac{E_m}{m\pi} (2+\nu) \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (33)$$

$$M_{xy} = 0 \dots (34)$$

(32) (33) 式は、これを x について Constant の項と両端で零なる二つの函数の和に分解できることは (29) 式と同様である。

5. $e=1$ なる場合

この場合の梁の両端におけるプレストレスの分布は、梁の上面で零、下面で $2p_1$ となる。従つて公式 (26) と (27) は

$$E_m = \frac{C p_1 (m\pi)(m\pi+A')}{(m\pi)^2 + m\pi(A+A') + K}, \dots (35)$$

$$F_m = \frac{p_1 A C'}{(m\pi)^2 + m\pi(A+A') + K} = C' p_1 H_m \dots (36)$$

となり、 $y=0$ における床板の面内力は

$$\sigma_x|_{y=0} = -\frac{p_1(3+\nu)(1-\nu)}{h_2 n(3-\nu)} \sum_m H_m \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (37)$$

$$\sigma_y|_{y=0} = -\frac{p_1(1-\nu)^2}{h_2 n(3-\nu)} \sum_m H_m \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (38)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = \frac{8p_1}{h_2(3-\nu)} \sum_m H_m \cos \frac{m\pi}{a} x \dots (39)$$

となり、梁と床板の附根の剪断応力の値は有限となつて安全である。しかし梁内の端部に大きい危険な剪断応力が生ずることは免れない。

6. 無限平板中に径間方向の一つのプレストレスがある場合

この場合の基本微分方程式は (7) と同じで境界条件は

$$x=0, x=a \text{ で } \sigma_x=0, v_2=0,$$

$$y=0 \text{ で } v_2=0, \frac{\partial u_2}{\partial x}=i.$$

但し i はプレストレスによるピアノ線の歪である。

そうすればこの時の面内力は

$$\sigma_x = -\frac{4iE}{(3-\nu)} \sum_m \frac{1}{m\pi} \left\{ (3+\nu)(1-\nu) \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) - (1-\nu^2) \frac{m\pi}{a} y \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (40)$$

$$\sigma_y = \frac{4iE}{(3-\nu)} \sum_m \frac{1}{m\pi} \left\{ (1-\nu)^2 \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) - (1-\nu^2) \frac{m\pi}{a} y \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) \right\} \sin \frac{m\pi}{a} x, \dots (41)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{16iG}{(3-\nu)} \sum_m \frac{1}{m\pi} \exp\left(-\frac{m\pi}{a} y\right) \cos \frac{m\pi}{a} x. \dots (42)$$

この場合も $y=0$ で τ_{xy} はプレストレスを導入した端部では無限大となつて危険な応力状態となる。

7. プレストレスの有効幅

いまプレストレスの有効幅として σ_x のみについて考えるに、有効幅を Kármán 流に次のように定義する。

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty \sigma_x dy}{\sigma_x|_{y=0}}. \dots (43)$$

そうすれば λ は一般に x の函数で、必ずしも径間全体にわたつて一様でない。もし $\sigma_x|_{y=0}$ が Constant の項を含まず両端で零なる場合は、これをフーリエ正弦級数に展開した第1項が $\sigma_x|_{y=0}$ を充分に近似し得るから、この場合には λ は一定値をとると考えて差支えない。しかし $\sigma_x|_{y=0}$ が Constant の項を含む場合には λ が x の函数となり一定の値を決め難い。

a) $e=1$ なる場合

この場合は $\sigma_x|_{y=0}$ が Constant を含まず、そのフーリエ正弦級数の第1項で比較的良好に近似できるので、 σ_x の式中 $m=1$ のみを取り

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty \sigma_x dy}{\sigma_x|_{y=0}} = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{2(1+\nu)}{(3+\nu)}. \dots (44)$$

b) 梁がなく板の径間方向にプレストレスがある場合

$$\lambda = \frac{\int_0^\infty \sigma_x dy}{\sigma_x|_{y=0}} = \frac{8a(1+\nu)}{(3+\nu)\pi^2} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi}{a} x}{m^2}. \dots (45)$$

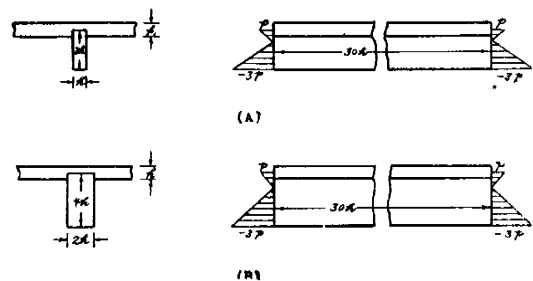
λ の分布は次の様になる。

λ の値 (単位 a)

x	0	$a/8$	$a/4$	$a/2$	$3a/4$	$7a/8$	a
λ	0	0.151	0.222	0.274	0.222	0.151	0

8. 数値計算例

図一5に示すようなプレストレスを受ける梁の平板内の σ_x について計算すれば表一1のようになる。



図一5

表一1 σ_x の値 (単位 p/h)

断面 A				
$x \backslash y$	0	$a/8$	$a/4$	$a/2$
0	0.2269	0.0423	0.0036	-0.0007
$a/3$	0	-0.0005	-0.0007	-0.0011
$a/2$	0	-0.0002	-0.0003	-0.0004
a	0	-0.0001	-0.0002	-0.0002

断面 B				
$x \backslash y$	0	$a/8$	$a/4$	$a/2$
0	0.1135	0.0321	0.0278	0.0279
$a/3$	0	0.0032	0.0062	0.0087
$a/2$	0	0.0012	0.0023	0.0033
a	0	-0.0001	-0.0002	-0.0002

9. むすび

以上誘導した結果を総合するに、平板を梁の広いフランジとしてプレストレスを導入するには、その梁と平板との附根に莫大な応剪力が生ずるからこれに対する対策

が必要であろう。但し $\nu = 1$ のときは、この応剪力は一定値となる性質をもっている。また平板内に高張力鋼でプレストレスを導入する場合も、同じくその鋼の導入部に莫大な応剪力が生ずることを解式は示している。この場合これの対策が講ぜられなければならない。この状態は、所謂プレストレスビームの横締めの問題に於いても

類似の結論が得られるであろう。

参 考 文 献

- 1) T. V. Kármán: "Festschrift August Föppl", p. 114, 1923.