

凍土トンネルの概略設計手法

The Outline Design Technique for Frozen Soil Tunnel

櫛田幸弘¹・富田一隆²・山本 稔³

Yukihiro Kushida, Kazutaka Tomida and Minoru Yamamoto

¹正会員 (株) 精研 東京支店 凍結本部 (〒112-0002 東京都文京区小石川1-12-14)

E-mail:kushida@seikenn.co.jp

²(株) 精研 東京支店 凍結本部 (〒112-0002 東京都文京区小石川1-12-14)

³名誉会員 工博 東京都立大学名誉教授 (〒194-0041 東京都町田市玉川学園1-15-2)

In the outline design for frozen soil tunnel, the tunnel has been handled as a fixed beam for short span, and as a ring for long span which exceed tunnel radius. But in such a case, there is a problem that both ends of frozen cylinder have been influenced by a bearing condition of the tunnel. Therefore, modeling the frozen soil tunnel as a cylindrical shell is desirable.

This report summarized the process of development of the outline design technique for both ends fixed frozen soil cylinder, using the approximate solutions under various tunnel loads based on the shell theory.

Key Words : design technique, frozen soil wall, cylindrical shell, loads on tunnel

1. はじめに

都市内の地下利用が進むにつれトンネルの建設位置は深くなり、地下施設として高い機能が求められるようになり、地下構造が複雑となって地中接合、接続に対する要求は高まる傾向にある。

シールドトンネルのように軸方向に長い構造物であれば、軸に直交して切断したリングを2次元問題として構造解析ができる。しかし、円筒の直径に対して長さが比較的小さい場合には、円筒の両端面の支承条件が影響するから、端末条件を含めたシェル理論による必要がある。

例えば近接した構造物間をトンネル接続するに当たり、トンネルの周辺地盤を固めた後に補強ゾーンの中を素掘りし、接続構造物を構築する技術が用いられる。このとき補強ゾーンの外郭部は円筒シェルの曲げ問題の対象になる。

土被りが深く、水圧が高い場合には止水性の優れた地盤凍結工法が用いられることが増えると予想される。コンピューターによる数値解析が普及している現今では、数値実験によって解を直接うることができるが、凍結工法の概略設計では、現状、補強区間の極端に短い場合(掘削半径以下)は両端固定梁、それ以上になるとリングとして検討が行われている。

このような場合、シェル理論を用いた理論的解析手法が合理的であり有効と思われる。トンネル荷重載荷状態の近似解より、概略設計する手法を開発した。

2. 等圧が作用する円筒シェルの解析解

円筒シェルの解析では、Meissner¹⁾ が基本方程式を、等圧が作用する場合の解をGeckeler²⁾ が与えている。円筒シェルの一般理論³⁾として図-1を参照して、説明を省略し、記号およびひずみ、曲率の変化、ねじり率をまとめると

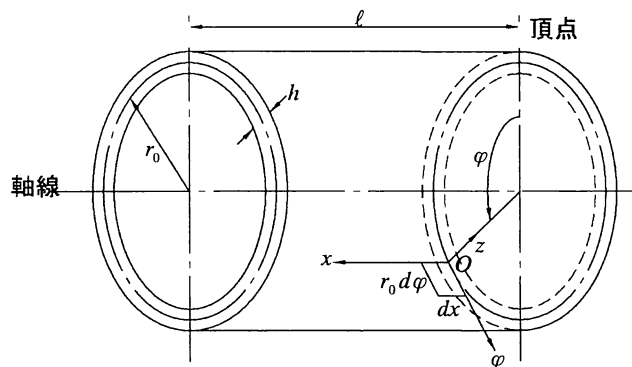


図-1 円筒シェル

u, v, w : x, φ, z 方向の変位. 中央面では u_0, v_0, w_0 であるが, h が小さいため $w = w_0$ とする.

$\varepsilon_x, \varepsilon_\varphi, \gamma_{x\varphi}$: x, φ 方向の直ひずみ, $x\varphi$ 面のせん断ひずみ. z 軸に関するひずみは取扱わない. 中央面では $\varepsilon_{0x}, \varepsilon_{0\varphi}, \gamma_{0,x\varphi} = \gamma_{0,\varphi x} = \gamma_0$ で表す.

$\sigma_x, \sigma_\varphi, \tau_{x\varphi}$: x, φ 方向の直応力, x 面上の φ 方向せん断応力. z 軸に関する応力は取り扱わない.

$\chi_x, \chi_\varphi, \chi_{x\varphi}$: zx 面内の曲率の変化, φz 面内の曲率の変化および $x\varphi$ 面の x 方向に対するねじり率. 右手系による.

$$\chi_{x\varphi} = \chi_{\varphi x}$$

x 方向の曲率の変化 χ_x は

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (a)$$

x 方向のひずみ ε_x は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \varepsilon_{0x} - \chi_x z$$

$$\text{ここに} \quad \varepsilon_{0x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (b)$$

φ 方向のひずみ ε_φ は

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\partial v_0}{r_0 \partial \varphi} - \frac{z}{r_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{w}{r_0} \quad (c)$$

φ 方向の曲率の変化 χ_φ は

$$\chi_\varphi = \frac{1}{r_0^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \quad (d)$$

式(c), (d)から

$$\begin{aligned} \varepsilon_\varphi &= \varepsilon_{0\varphi} - \chi_\varphi z \\ \text{ここに} \quad \varepsilon_{0\varphi} &= \frac{\partial v_0}{r_0 \partial \varphi} - \frac{w}{r_0} \end{aligned} \quad (e)$$

x 軸回りのねじり率 $\chi_{x\varphi}$ は

$$\chi_{x\varphi} = \frac{\partial^2 w}{r_0 \partial x \partial \varphi} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (f)$$

φ 軸回りのねじり率 $\chi_{\varphi x}$ は

$$\chi_{\varphi x} = \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = \chi_{x\varphi} \quad (g)$$

$z = z$ におけるせん断ひずみ $\gamma_{x\varphi}$ は $\gamma_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{r_0 \partial \varphi}$ を用い,

$$\gamma_{x\varphi} = \gamma_0 - 2 \frac{z}{r_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = \gamma_0 - 2z \chi_{x\varphi} \quad (h)$$

となる.

弾性法則および応力と変位の関係を示すと,

$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$ とすれば, 弾性法則は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_\varphi), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_x), \\ \gamma_{x\varphi} = \gamma_{\varphi x} &= \frac{1}{G} \tau_{x\varphi}, \quad \tau_{x\varphi} = \tau_{\varphi x} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned} \right\}$$

ここに, E ; 弾性率, ν ; ポアソン比, G ; 剛性率である. 応力で解いて, 式(a)から式(h)を代入すれば

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi) = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\varepsilon_{0x} + \nu \varepsilon_{0\varphi}) - z (\chi_x + \nu \chi_\varphi) \right\} \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v_0}{r_0 \partial \varphi} - \frac{w}{r_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r_0^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x) = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ (\varepsilon_{0\varphi} + \nu \varepsilon_{0x}) - z (\chi_\varphi + \nu \chi_x) \right\} \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial v_0}{r_0 \partial \varphi} - \frac{w}{r_0} \right) + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{Ez}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\tau_{x\varphi} = G \gamma_{x\varphi} = G (\gamma_0 - 2z \chi_{x\varphi}) = G \left\{ \gamma_0 - \frac{2z}{r_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right\}$$

となる.

中央面の単位長さ当たりの断面力(軸力: N , 曲げモーメント: M)は, 厚さ方向の断面幅の変化を無視して

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v_0}{r_0 \partial \varphi} - \frac{w}{r_0} \right) \right\} \\ N_\varphi &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial v_0}{r_0 \partial \varphi} - \frac{w}{r_0} \right) + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right\} \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{r_0 \partial \varphi} \right) \\ M_x &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r_0^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\} \\ M_\varphi &= -D \left\{ \frac{1}{r_0^2} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \\ M_{x\varphi} &= D(1-\nu) \frac{1}{r_0} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \\ M_{\varphi x} &= -M_{x\varphi} \quad \text{ここに,} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

また, 断面力のつり合いをまとめると, せん断力を Q , 単位面積当たりの外力を X, Y, Z として

x 方向の力のつり合いは

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{r_0 \partial \varphi} + X = 0 \quad (i)$$

φ 方向の力のつり合いは

$$\frac{\partial N_\varphi}{r_0 \partial \varphi} + \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} - \frac{Q_\varphi}{r_0} + Y = 0 \quad (j)$$

z 方向の力のつり合いは

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{r_0 \partial \varphi} + \frac{N_\varphi}{r_0} + Z = 0 \quad (k)$$

x 軸回りのモーメントのつり合いは

$$-\frac{\partial M_\varphi}{r_0 \partial \varphi} + \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + Q_\varphi = 0 \quad (l)$$

φ 軸回りのモーメントのつり合いは

$$-\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{r_0 \partial \varphi} - Q_x = 0 \quad (m)$$

となる。式(i)から式(m)に式(1)を用い、せん断力を求めると

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{D}{r_0} \left\{ r_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\nu}{r_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1-\nu)}{r_0} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial \varphi} \right) \right\} \\ Q_\varphi &= -\frac{D}{r_0} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right) + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} \right. \\ &\quad \left. + (1-\nu) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。

(1) 等圧が作用する場合の微分方程式と解

等圧 p が作用する場合の微分方程式を求めると、荷重と構造の対称性から $v_0 = 0$, $u_0 = u_0(x)$, $w = w(x)$, $N_x = 0$ とおき、これらを式(1)に代入して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\nu}{r_0} w &= 0, \quad N_\varphi = \frac{E h}{1-\nu^2} \left(-\frac{w}{r_0} + \nu \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \\ N_{x\varphi} = N_{\varphi x} &= 0, \quad M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{r_0^2} w \right) \\ M_\varphi &= -D \left(\frac{w}{r_0^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{\varphi x} = -M_{x\varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (n)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\nu}{r_0} w \quad \text{を } N_\varphi \text{ に代入して } N_\varphi = -E h \frac{w}{r_0} \quad (o)$$

つり合い方程式は、 $Q_\varphi = 0$ を考慮して

$$r_0 \frac{\partial Q_x}{\partial x} + N_\varphi + r_0 p = 0, \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0$$

両式より Q_x を消去して、式(n)の M_x と式(o)の N_φ とを代入すると次の4階の常係数微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\nu}{r_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E h}{D r_0^2} w = \frac{p}{D} \quad (3)$$

式(3)の左辺の第2項には ν/r_0^2 が掛かり、微小として省略すると

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{E h}{D r_0^2} w = \frac{p}{D} \quad (4)$$

となり文献(4)の式が得られる。式(3)を解くにあたり

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\nu}{4 r_0^2} + \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{r_0^2 h^2}}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\nu}{4 r_0^2} + \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{r_0^2 h^2}}}$$

とすれば、式(3)の解は

$$\begin{aligned} w &= A_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + A_2 e^{(\alpha-i\beta)x} \\ &\quad + A_3 e^{(-\alpha+i\beta)x} + A_4 e^{(-\alpha-i\beta)x} + \frac{p r_0^2}{E h} \\ &= B_1 \cosh \alpha x \cos \beta x + B_2 \cosh \alpha x \sin \beta x \\ &\quad + B_3 \sinh \alpha x \cos \beta x + B_4 \sinh \alpha x \sin \beta x + \frac{p r_0^2}{E h} \quad (5) \end{aligned}$$

となる。式(5)が式(3)を満足していることは、代入して明らかにできる。

等圧が作用する両端固定の円筒シェルは、スパンの中央に関して対称変形であるから、式(5)の x をスパン中央からの距離と考えれば、式(5)の右辺は偶関数で、 $B_2 = B_3 = 0$ となる。したがって式(5)は

$$w = B_1 \cosh \alpha x \cos \beta x + B_4 \sinh \alpha x \sin \beta x + \frac{p r_0^2}{E h} \quad (6)$$

となる。

境界条件は $x = \pm \ell/2$ において $w = dw/dx = 0$ である。

ここに両端固定の円筒シェルを対象にしたのは、凍土によるシェルが止水構造であることを考慮したものである。式(6)と境界条件から B_1, B_4 を求めると変位式が決まる。断面力は前述の断面力式(1)、式(2)に変位式を代入して求められる。

式(4)による解も同様である。

(2) 理論解による変位形状

前節の理論解を用い、凍土円筒シェルへの適用をねらって、シェルの形状 (h/r_0 および ℓ/r_0) をパラメータとしてその影響を吟味する。

なお、無次元化するため、次のような処理をする。

$$\alpha \ell = \frac{\ell}{r_0} \sqrt{-\frac{\nu}{4} + \frac{r_0}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}}, \quad \beta \ell = \frac{\ell}{r_0} \sqrt{\frac{\nu}{4} + \frac{r_0}{h} \sqrt{3(1-\nu^2)}}$$

この表示によって式(6)の B_1, B_4 は

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{p r_0^2}{E h} \times \frac{\alpha \cosh \frac{\alpha \ell}{2} \sin \frac{\beta \ell}{2} + \beta \sinh \frac{\alpha \ell}{2} \cos \frac{\beta \ell}{2}}{\alpha \cos \frac{\beta \ell}{2} \sin \frac{\beta \ell}{2} + \beta \cosh \frac{\alpha \ell}{2} \sinh \frac{\alpha \ell}{2}} \\ B_4 &= \frac{p r_0^2}{E h} \times \frac{\alpha \sinh \frac{\alpha \ell}{2} \cos \frac{\beta \ell}{2} - \beta \cosh \frac{\alpha \ell}{2} \sin \frac{\beta \ell}{2}}{\alpha \cos \frac{\beta \ell}{2} \sin \frac{\beta \ell}{2} + \beta \cosh \frac{\alpha \ell}{2} \sinh \frac{\alpha \ell}{2}} \end{aligned}$$

変位 w はスパン中央に原点をとり、 $t = x/\ell$ において

$w(t) = B_1 \cosh(\alpha \ell \cdot t) \cos(\beta \ell \cdot t) + B_4 \sinh(\alpha \ell \cdot t) \sin(\beta \ell \cdot t) + \frac{p r_0^2}{E h}$ となる。

ここで、凍土 ($E = 6.3 \times 10^5 \text{ kN/m}^2, \nu = 0.35$) シェルに 500 kN/m^2 の等圧が作用した場合を想定して、直径 5m ($r_0 = 2.5\text{m}$)、長さ 5m ($\ell = 5.0\text{m}$)、すなわち $\ell/r_0 = 2$ に固定し、厚さ h を $h = 0.15 \sim 1.0\text{m}$ 、すなわち $h/r_0 = 0.06 \sim 0.4$ まで変化させたときの変位の比較を図-2 に、また、直径 5m ($r_0 = 2.5\text{m}$)、厚さ h を $h = 1.0\text{m}$ 、すなわち $h/r_0 = 0.4$ に固定し、長さ ℓ を $\ell = 3.75 \sim 15\text{m}$ 、すなわち $\ell/r_0 = 1.5 \sim 6$ まで変化させたときの変位の比較を図-3 に示す。なお、図には凍土リング(両端自由)に等圧の作用した場合を併記する。図-2 より $h/r_0 \leq 0.06$ となると、また、図-3 より $\ell/r_0 \geq 6$ となると中央部の変位はリングの場合と変わらなくなることが見て取れる。

また、径長比 ℓ/r_0 が小さく、径厚比 h/r_0 の比較的大きな ($h/r_0 \geq 0.1$) 地中構造物や凍土シェルの適用範囲を対象とすると、軸方向変位は中央を中心とした山形状となることが判明した。

式(4)による解析でも、結果は図-2～図-3 に重なり違いは極々僅かである。

3. 等圧が作用する円筒シェルの近似解

円筒シェルの場合、等圧以外の荷重条件では近似解によるほかなく、変位の適合条件式(あてはめ式)にポテンシャルエネルギー極小の定理を用いて近似解を求めることになる。等圧以外の荷重条件への適用拡張を目指して、まず、前章の等圧が作用する円筒シェルの近似解析を試みる。

(1) あてはめ式の選定

変位のあてはめ式は、簡明で取扱いが容易であり

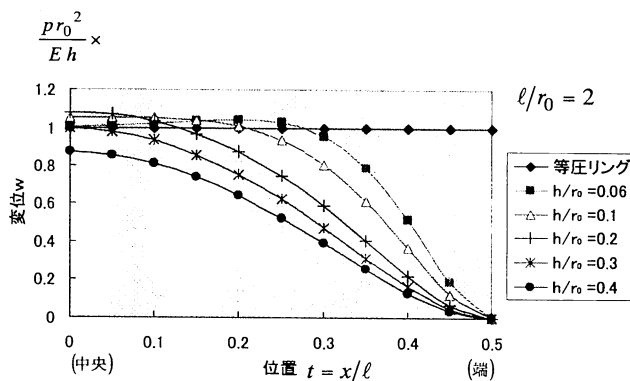


図-2 h/r_0 による変位の相違

しかも理論解のたわみに近い形状を表現できるものが望ましい。変位 w がスパン中央に対して対称、両端において $w = dw/dx = 0$ を満たすものとして、代数関数、三角関数、双曲線関数、指数関数およびそれらの組み合わせが考えられる。理論解の形式から双曲線関数と固定ばりの解である代数関数とに関し比較検討してみると、両者に大きな相違は生じないことが判った。また、理論解に近い形状を求める(特に、 h/r_0 が小さいか ℓ/r_0 が大きい場合)には関数の組み合わせが必要であることも判明した。

前章と同様ここでもスパンの中央に x の原点を移し $t = x/\ell$ として、次式をあてはめ式に採用する。

$$\frac{w}{\ell} = \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 \cdot \sum_0^m a_m \cos 2m\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \quad (7)$$

ここに、 m は整数、 a_m は未定係数である。

いま、 $m = 3$ としたときの解を求める。具体的に示せば式(8)となる。第1項は固定ばりのたわみ式の形式である。

$$\frac{w}{\ell} = \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 \left\{ a_0 + a_1 \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + a_2 \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + a_3 \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\} \quad (8)$$

(2) ポテンシャルエネルギー

ポテンシャルエネルギー W は、 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{\varphi z}$ を無視して次式で与えられる。

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \tau_{x\varphi} \gamma_{x\varphi}) dV - \int_A (X u_0 + Y v_0 + Z w) dA$$

ここに、 V, A は円筒シェルの容積と中央面の面積である。応力式を代入して

$$W = \frac{E h}{2(1-\nu^2)^2} \int_A \left\{ (\varepsilon_{0x} + \nu \varepsilon_{0\varphi})^2 - 2\nu (\varepsilon_{0x} + \nu \varepsilon_{0\varphi})(\varepsilon_{0\varphi} + \nu \varepsilon_{0x}) + (\varepsilon_{0\varphi} + \nu \varepsilon_{0x})^2 + \frac{1}{2}(1-\nu)(1-\nu^2)\gamma_0^2 \right\} dA$$

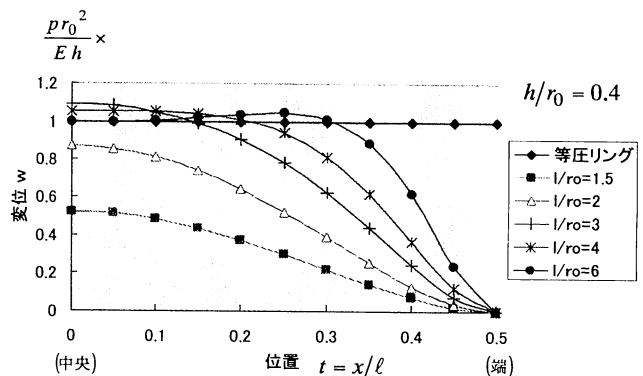


図-3 ℓ/r_0 による変位の相違

$$\begin{aligned}
& + \frac{D}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ (\chi_x + \nu \chi_\varphi)^2 - 2\nu (\chi_x + \nu \chi_\varphi)(\chi_\varphi + \nu \chi_x) \right. \\
& \quad \left. + (\chi_\varphi + \nu \chi_x)^2 \right\} dA + (1-\nu) D \int_A \chi_{x\varphi}^2 dA \\
& - \int_A (X u_0 + Y v_0 + Z w) dA \\
& = \frac{E h}{2(1-\nu^2)} \int_A \left\{ \varepsilon_{0x}^2 + 2\nu \varepsilon_{0x} \varepsilon_{0\varphi} + \varepsilon_{0\varphi}^2 + \frac{1}{2}(1-\nu) \gamma_0^2 \right\} dA \\
& + \frac{D}{2} \int_A \left\{ \chi_x^2 + 2\nu \chi_x \chi_\varphi + \chi_\varphi^2 + 2(1-\nu) \chi_{x\varphi}^2 \right\} dA \\
& - \int_A (X u_0 + Y v_0 + Z w) dA \\
& \text{となる.}
\end{aligned}$$

(3) 近似解の解析

式(8)は, $t = \pm 1/2$ において $w = 0$ であることは自明である, また,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{w}{\ell} \right) &= -4t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \\
& \times \left\{ a_0 + a_1 \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + a_2 \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + a_3 \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\} \\
& + 4\pi t \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 \left\{ a_1 \sin 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + 2a_2 \sin 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + 3a_3 \sin 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{この式は, } t = 0, t = \pm \frac{1}{2} \text{ において } \frac{d}{dt} \left(\frac{w}{\ell} \right) = 0$$

となり境界条件を満足する.

等圧が作用する円筒シェルは, 構造と荷重条件が軸対称であり, 軸力 N_x がないとすれば,
 $X = Y = 0, Z = p$ (一定), $v_0 = 0, u_0 = u_0(x), w = w(x)$
 かつ $N_x = 0$ である.

ひずみと曲率の変化を求め, これらをポテンシャルエネルギー式に代入して $dA = 2\pi r_0 dx = 2\pi r_0 \ell dt$ を用い, W を書き直せば,

$$\begin{aligned}
W &= \frac{2\pi E h \ell^3}{r_0} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^4 \left\{ a_0 + a_1 \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + a_2 \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + a_3 \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\} dt \\
& + \frac{8\pi D r_0}{\ell} \int_0^{1/2} \left[-2a_0 \left(\frac{1}{4} - 3t^2 \right) \right. \\
& \quad - 2a_1 \left\{ \frac{1}{4} - \left(3 - \frac{4\pi^2}{16} \right) t^2 - \frac{4\pi^2}{2} t^4 + 4\pi^2 t^6 \right\} \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \\
& \quad \left. - 2a_2 \left\{ \frac{1}{4} - \left(3 - \frac{16\pi^2}{16} \right) t^2 - \frac{16\pi^2}{2} t^4 + 16\pi^2 t^6 \right\} \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2a_3 \left\{ \frac{1}{4} - \left(3 - \frac{36\pi^2}{16} \right) t^2 - \frac{36\pi^2}{2} t^4 + 36\pi^2 t^6 \right\} \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \\
& + \pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \left(\frac{1}{4} - 9t^2 \right) \left\{ 2a_1 \sin 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + 4a_2 \sin 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + 6a_3 \sin 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\} \Bigg] dt \\
& + \frac{8\pi \nu D \ell}{r_0} \int_0^{1/2} \left[-2a_0 \left(\frac{1}{4} - 3t^2 \right) \right. \\
& \quad - 2a_1 \left\{ \frac{1}{4} - \left(3 - \frac{4\pi^2}{16} \right) t^2 - \frac{4\pi^2}{2} t^4 + 4\pi^2 t^6 \right\} \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \\
& \quad - 2a_2 \left\{ \frac{1}{4} - \left(3 - \frac{16\pi^2}{16} \right) t^2 - \frac{16\pi^2}{2} t^4 + 16\pi^2 t^6 \right\} \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \\
& \quad - 2a_3 \left\{ \frac{1}{4} - \left(3 - \frac{36\pi^2}{16} \right) t^2 - \frac{36\pi^2}{2} t^4 + 36\pi^2 t^6 \right\} \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \\
& \quad \left. + \pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \left(\frac{1}{4} - 9t^2 \right) \left\{ 2a_1 \sin 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 4a_2 \sin 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + 6a_3 \sin 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\} \right] \\
& \times \left[\left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 \left\{ a_0 + a_1 \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + a_2 \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + a_3 \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\} \right] dt \\
& + \frac{2\pi D \ell^3}{r_0^3} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^4 \left\{ a_0 + a_1 \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + a_2 \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + a_3 \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\}^2 dt \\
& - 4\pi r_0 \ell^2 p \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 \left\{ a_0 + a_1 \cos 2\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right. \\
& \quad \left. + a_2 \cos 4\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) + a_3 \cos 6\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right) \right\} dt
\end{aligned}$$

となる.

W の右辺は 70 の積分項に分離でき, 各項の積分は数値積分可能である. これを未定係数毎にまとめたようにおく.

$$\begin{aligned}
W &= a_0^2 \times A_{00} + a_1^2 \times A_{11} + a_2^2 \times A_{22} + a_3^2 \times A_{33} \\
& + 2a_0 a_1 \times A_{01} + 2a_0 a_2 \times A_{02} + 2a_0 a_3 \times A_{03} \\
& + 2a_1 a_2 \times A_{12} + 2a_1 a_3 \times A_{13} + 2a_2 a_3 \times A_{23} \\
& - 2a_0 \times C_0 - 2a_1 \times C_1 - 2a_2 \times C_2 - 2a_3 \times C_3
\end{aligned}$$

ここに, $A_{00} \sim A_{33}, C_0 \sim C_3$ は数値積によって定まる.
 W が a_0, a_1, a_2, a_3 に対して極値をとる条件から

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & A_{03} \\ A_{01} & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{02} & A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{03} & A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

となる.

この4元1次方程式を解いて a_0, a_1, a_2, a_3 を求める。 w が定まれば断面力は式(1), 式(2)によって求まる。また, $m=2$ としたときは, 前記の行列式を3行3列式として, $m=1$ としたときは, 2行2列式として, $m=0$ としたときは, 1行式として, それぞれの a_i を求め, w_i を定めことができる。

(4) 理論解と近似解の比較

凍土円筒シェル ($E = 6.3 \times 10^5 \text{ kN/m}^2, \nu = 0.35$) に 500 kN/m^2 の等圧が作用した場合を想定して, 直径 5 m ($r_0 = 2.5 \text{ m}$), 長さ 5 m ($\ell = 5.0 \text{ m}$), すなわち径長比 $\ell/r_0 = 2$ に固定し, 厚さ h を $h = 0.15, 1.0 \text{ m}$ すなわち径厚比 $h/r_0 = 0.06, 0.4$ としたときの変位の比較を図-4, 図-5に, また直径 5 m ($r_0 = 2.5 \text{ m}$), 厚さ h を $h = 1.0 \text{ m}$, すなわち径厚比 $h/r_0 = 0.4$ に固定し長さ ℓ を $\ell = 15, 3.75 \text{ m}$, すなわち径長比 $\ell/r_0 = 6, 1.5$ としたときの変位の比較を図-6, 図-7 に示す。

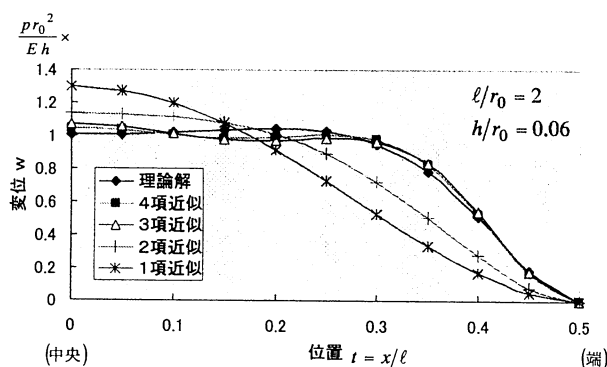


図-4 理論解, 近似解の変位の比較(1)

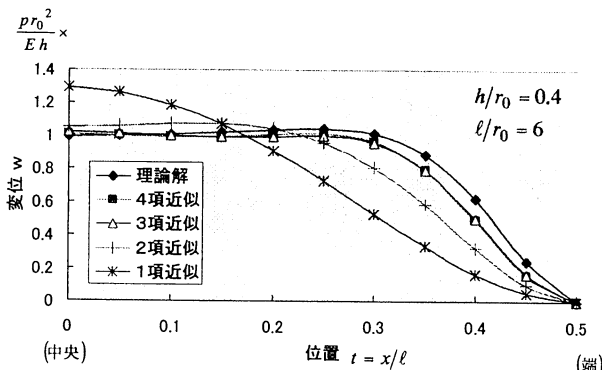


図-6 理論解, 近似解の変位の比較(3)

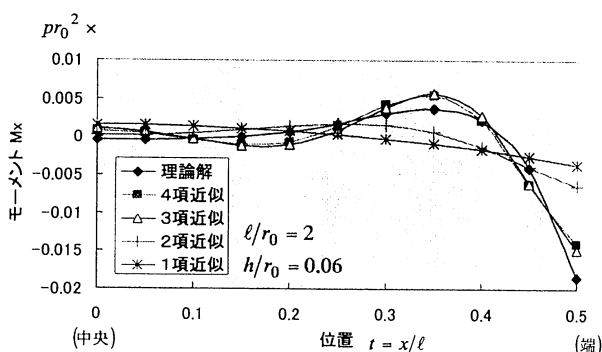


図-8 理論解, 近似解のモーメント M_x の比較(1)

これらの図より, 径厚比が小さいか, 径長比が大きい場合には変位形状は台形となり, この場合あてはめ式(7)の m を大きくする(項数を増やす)と近似解が理論解とよく合い, あてはめ式(7)の適合性が確認できる。第4項まで採った場合, スパン中央における理論解との誤差は+4.1%であり, 簡易計算の実用範囲では十分な精度を有している。

一方, 本稿の目的である地中構造物や凍土円筒で実用上対象となる径厚比が大きい, 径長比が小さい場合には変位形状は山形となり, 近似解の採用項数による違いは僅かで, 第1項のみの近似解で十分近似可能であることが判る。図-5 の例では最大変位, 最大断面力は理論解に対し, 約3%および7%それぞれ大きく求まっており, 第1項だけのあてはめ式が簡明で設計に適している。

なお, 図-4, 図-5 と同じ条件に対応したモーメント M_x を図-8, 図-9 に示す。モーメント M_x は h/r_0 が

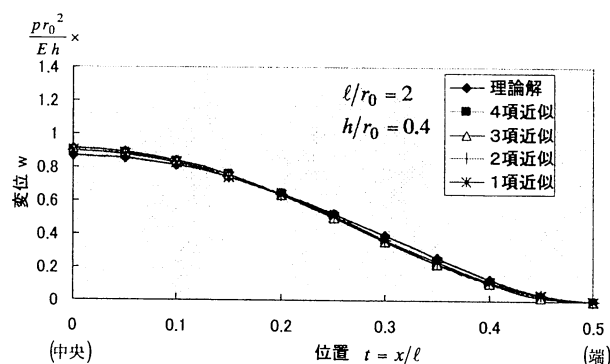


図-5 理論解, 近似解の変位の比較(2)

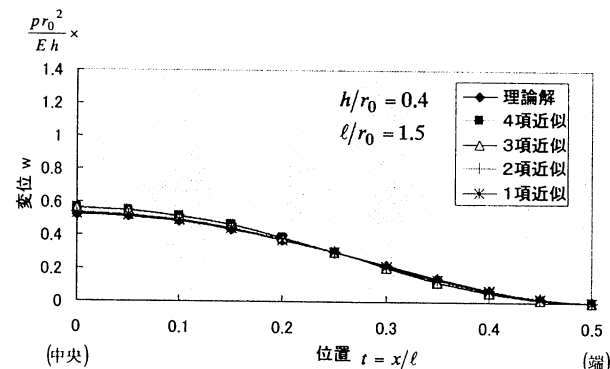


図-7 理論解, 近似解の変位の比較(4)

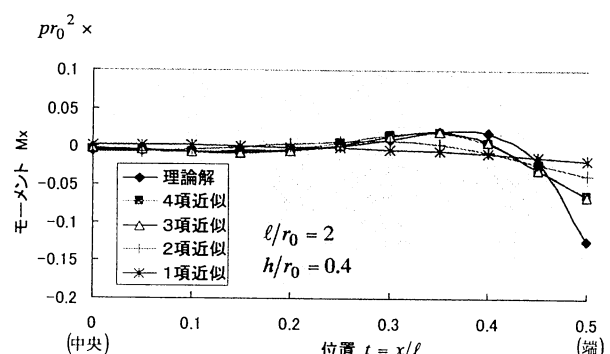


図-9 理論解, 近似解のモーメント M_x の比較(2)

大きくなると増大する。軸力 N_φ は変位と $N_\varphi = Eh/r_0 \cdot w(t)$ の関係があり、変位図と相似するので省略する。

以下の研究は変位が山形形状となる径長比が小さく、径厚比が大きい場合に限って進める。

4. 凍土円筒シェルを対象とする各種の設計荷重に対するあてはめ式の適合性の検証

各荷重条件に対するあてはめ式には、等圧の場合のあてはめ式(8)の第1項、即ち、固定ばりのたわみ式形式である次式に断面変形状を表現する三角関数を乗じて作成する。

$$\frac{w}{\ell} = a_0 \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 = a_0 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \quad (9)$$

ここで $t = \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2}$

あてはめ式の作成にあたり、図-10のように荷重を作用させた場合の模擬実験を行って、近似解と実験値を比較し、あてはめ式の適合性を検証する。

実験は両端固定の亚克力円筒(φ257×220ℓ×15h)に等間隔4点鉛直上下荷重を載荷し、内面の変位を測定する。この値と鉛直・水平2軸対称荷重および逆対称荷重の近似解を重ね合わせた値と比較検証する。まず、夫々の近似解を求める。

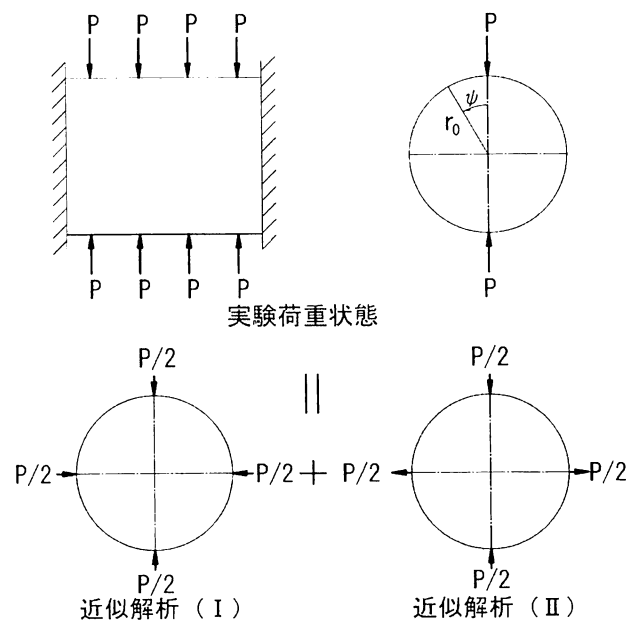


図-10 模擬実験と近似解

(1) 近似解の解析

図-10の下図(I)の $\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ にそれぞれ $p/2$ の圧縮荷重を載荷した場合のあてはめ関数は、式(9)を基本とし、 a_i, b_i を未定係数として

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= a_1 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \cos 4\varphi \\ v_{01} &= b_1 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \sin 4\varphi \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

(II)の $\varphi = 0, \pi$ に $p/2$ の圧縮荷重を、 $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$ に $p/2$ の引張荷重を載荷した場合のあてはめ関数は、

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= a_2 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \cos 2\varphi \\ v_{02} &= b_2 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

とする。

ポテンシャルエネルギー W の荷重項(最終項)のみ示すと、(I)の場合は(a)式に $\varphi = 0, \pi/2$ を代入し、 $X=Y=0$ を用いれば

$$\begin{aligned} -\int Z w_1 dA &= -\frac{P}{2} a_1 \ell \left\{ \left(\frac{1}{8} \right)^2 \left(\frac{7}{8} \right)^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{5}{8} \right)^2 \right\} \times 4 \\ &\quad - \frac{P}{2} a_1 \ell \left\{ \left(\frac{1}{8} \right)^2 \left(\frac{7}{8} \right)^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{5}{8} \right)^2 \right\} \times 4 \\ &= -\frac{137}{512} P \ell \cdot a_1 \end{aligned}$$

(II)の場合は、同様に $X=Y=0$ として

$$\begin{aligned} -\int Z w_2 dA &= -\frac{P}{2} a_2 \ell \left\{ \left(\frac{1}{8} \right)^2 \left(\frac{7}{8} \right)^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{5}{8} \right)^2 \right\} \times 4 \\ &\quad - \frac{P}{2} a_2 \ell \left\{ \left(\frac{1}{8} \right)^2 \left(\frac{7}{8} \right)^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^2 \left(\frac{5}{8} \right)^2 \right\} \times 4 \\ &= -\frac{137}{512} P \ell \cdot a_2 \end{aligned}$$

となる。(I)の場合は、3章と同様の計算から

$$\begin{aligned} a_1 \left\{ \frac{2}{105} (1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + \frac{4}{5} \left(\frac{r_0}{\ell} \right) + \frac{4}{105} (16-\nu) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \right. \\ \left. + \frac{5}{14} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^3 \right\} - b_1 \frac{8}{105} (1-\nu) \left\{ 2 + (1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \right\} \frac{\ell}{r_0} = \frac{137}{512} \frac{P \ell}{\pi D} \\ - a_1 \left\{ 4 + 2(1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \right\} + b_1 \left\{ 1 + 8(1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 \right\} = 0 \end{aligned}$$

を解いて、(II)の場合は、5章(2)節を参照して

$$a_2 \left\{ \frac{2}{105} (1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + \frac{4}{5} \left(\frac{r_0}{\ell} \right) + \frac{4}{105} (4-\nu) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \right\}$$

$$+ \frac{1}{70} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^3 \left\} - b_2 \frac{4}{105} (1-\nu) \left\{ 2 + (1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \right\} \frac{\ell}{r_0} = \frac{137}{512} \frac{P \ell}{\pi D} \right. \\ \left. - a_2 \left\{ 2 + (1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \right\} + b_2 \left\{ 1 + 2(1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 \right\} \right\} = 0$$

を解いて、 a_1, b_1, a_2, b_2 を求め、夫々の変位式に代入して、 $w_1, \nu_{01}, w_2, \nu_{02}$ が求まる。

(2) 実験値と近似計算値の比較

実験計測値と実験条件を代入した近似計算値 (I)+(II) の中央断面における内面変位を図-11 に示す。実験値の変位形状は近似計算値と近似し、値は $\varphi=0, \pi$ ではほぼ等しく $\pi/2, 3\pi/2$ では絶対値は小さいものの大きめ (近似計算値の 147%) となった。

以上より、固定ばりのたわみ式形式を基本とする式に断面変形状を表現する三角関数式を乗じた形のあてはめ式とポテンシャルエネルギー極小の定理から求めた近似解で、凍土設計の実用計算等には十分な精度で変位量を近似できることが確認できた。

5. 凍土円筒シェルを対象とする各種の設計荷重に対するあてはめ式と近似解

凍土円筒シェルの設計には、図-12のシールドトンネル荷重⁵⁾を採用する。

(1) 相等しい鉛直・水平等分布荷重

鉛直・水平方向に等分布荷重 $p = (p_v + p_h)/2$ が作用する円筒シェルは、等圧が作用する場合と同じで、あてはめ式は式(8)の初項に当たる式(9)で与えられる。

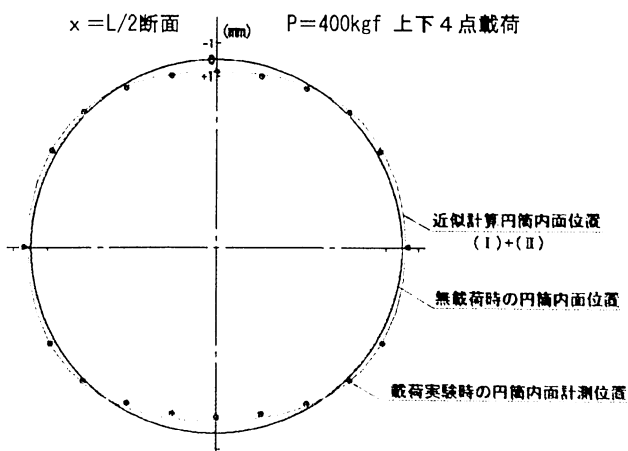


図-11 実験値と近似計算値の比較(中央断面)

$$w_{11} = a_0 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \left\{ \right. \\ \left. \text{また } \nu_{011} = 0, \quad N_x = 0 \right\}$$

ここで、 a_0 は3章の解析より次式として求まる。

$$a_0 = \frac{p \ell^3}{30D} \frac{1}{\frac{2(1-\nu^2)}{105} \frac{\ell^4}{r_0^2 h^2} + \frac{4}{5} - \frac{4\nu}{105} \frac{\ell^2}{r_0^2} + \frac{1}{630} \frac{\ell^4}{r_0^4}}$$

(2) 相反する等大の鉛直・水平等分布荷重

荷重 $p_v = (p_v - p_h)/2$, $p_h = -(p_v - p_h)/2$ の場合は、鉛直・水平方向に反対向きの等分布荷重が作用する円筒シェルであり、シェル軸を通る鉛直面と水平面に対して荷重と構造とが対称、かつ斜め 45° の方向に対して逆対称である。また、 $x = \ell/2$ 断面に対して対称であるから、変位のあてはめ式は次式のように作成する。

$$w_{12} = a_1 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \cos 2\varphi \left\{ \right. \\ \nu_{012} = b_1 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \sin 2\varphi \left\{ \right. \\ \left. \text{また } N_x = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = 0 \right\}$$

a_1, b_1 は3章と同様な解析から得た次式を解いて求まる。

$$a_1 \left\{ \frac{2}{105} (1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + \frac{4}{5} \left(\frac{r_0}{\ell} \right) + \frac{4}{105} (4-\nu) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{70} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^3 \right\} - b_1 \frac{4}{105} \left\{ 2(1-\nu) + (1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \right\} \frac{\ell}{r_0} \\ = \frac{1}{5} (1-\nu^2) \frac{p_v - p_h}{E} \left(\frac{r_0}{h} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2$$

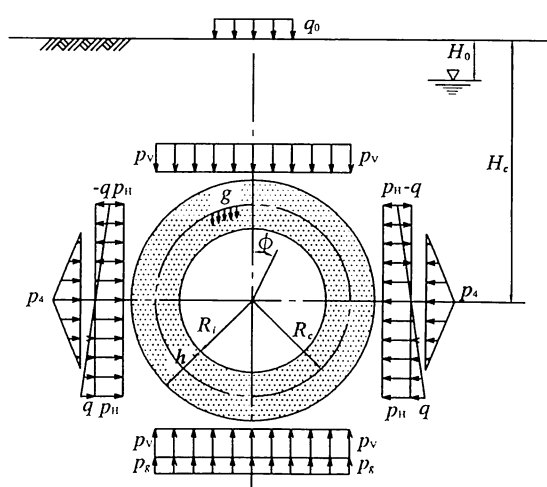


図-12 設計荷重

$$-a_1 \left\{ 2 + (1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \right\} + b_1 \left\{ 1 + 2(1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 3 \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 \right\} \\ = \frac{21}{4} (1+\nu) \frac{p_V - p_H}{E} \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 \left(\frac{\ell}{h} \right)$$

(1)節と(2)節の組合わせにより、鉛直および水平の等分布荷重が作用する場合が得られる。

(3) 水平等変分布荷重

図-12 に従い、最大荷重を q とする。この荷重はシェル断面の鉛直直径軸に対して対称、水平直径軸に対して逆対称であり、かつ、 $x = \ell/2$ のシェル断面に対して対称である。あてはめ式は次式とする。

$$\left. \begin{aligned} w_2 &= a_2 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \cos 2\varphi \cos \varphi \\ v_{02} &= b_2 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \sin 2\varphi \cos \varphi \\ \text{また } N_x &= 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \right\}$$

ここで a_2, b_2 は次式を解いて求まる。

$$\left. \begin{aligned} a_2 \left\{ 10 - 2\nu + (1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 42 \left(\frac{r_0}{\ell} \right)^2 + \frac{8}{3} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^2 \right\} \\ - b_2 2(1-\nu) \left\{ 2 + (1+\nu) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 \right\} &= 0 \\ -a_2 2 \left\{ (1+\nu) + 2 \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \right\} + b_2 \left\{ 5(1+\nu) + 6 \left(\frac{r_0}{\ell} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{h}{\ell} \right)^2 \right\} - \frac{21}{2} (1+\nu) \frac{q}{E} \left(\frac{r_0}{h} \right) \left(\frac{r_0}{\ell} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(4) 自重および自重反力等分布荷重

この荷重条件に対してシェルの変形は、シェルの中心軸を通る鉛直軸に対して対称であるが、水平軸に対しては対称でない。しかし、シェルは水平方向に長い楕円形状の変形をするから、簡単に水平軸に対しても対称性を仮定し、あてはめ式に次式をあて

$$\left. \begin{aligned} w_3 &= a_3 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \cos 2\varphi \\ v_{03} &= b_3 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \sin \varphi \\ \text{また } N_x &= 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \right\}$$

ここで a_3, b_3 は次式となる。

$$a_3 = \frac{\frac{21}{4} \pi (1-\nu^2) \frac{g}{E} \left(\frac{r_0}{h} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2}{(1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 42 \left(\frac{r_0}{\ell} \right)^2 + 2(4-\nu) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^3} \\ b_3 = \frac{7(1-\nu^2) \frac{g}{E} \left(\frac{r_0}{h} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2}{(1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 6(1-\nu) \left(\frac{r_0}{h} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\ell}{r_0} \right)}$$

(5) 地盤反力荷重

シェル断面の水平軸に対して対称で、端部で 0、中央で $k\delta(1-\cos\varphi/\sin\beta)$ となる三角形分布荷重

$$p_4 = R = k\delta \left(1 - \frac{\cos\varphi}{\sin\beta} \right) \cdot 16 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2$$

が作用する。 k は地盤反力係数、 δ は変位を与える任意定数、 β は反力の分布角で通常は $\beta = \pi/4$ としている。

この荷重による円筒シェルの変位は、円筒軸を通る鉛直面と水平面に対して対称であり、 $x = \ell/2$ の断面に対しても同様である。あてはめ式は次式とする。

$$\left. \begin{aligned} w_4 &= a_4 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \cos 2\varphi \\ v_{04} &= b_4 \ell \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2 \sin 2\varphi \\ \text{また, } N_x &= 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \right\}$$

ここで a_4, b_4 は次式を解いて求まる。

$$\left. \begin{aligned} a_4 \left\{ (1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 42 \left(\frac{r_0}{\ell} \right)^2 + 2(4-\nu) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{\ell}{r_0} \right)^3 \right\} \\ - b_4 \left\{ 2(1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 4(1-\nu) \left(\frac{\ell}{r_0} \right) \right\} \\ + \frac{64}{\pi} \left(\frac{4+\pi}{16} - \frac{1+\sqrt{2}}{15} \right) \frac{(1-\nu^2)k\delta}{E} \left(\frac{r_0}{h} \right) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 &= 0 \\ -a_4 \left\{ (1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 2(1-\nu) \right\} \\ + b_4 \left\{ 2(1-\nu^2) \left(\frac{\ell}{h} \right)^2 + 3(1-\nu) \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 + (1-\nu) \right\} \\ + \frac{32}{\pi} \left(\frac{\pi}{16} - \frac{8\sqrt{2}-7}{30} \right) \frac{(1-\nu^2)k\delta}{E} \left(\frac{r_0}{h} \right)^2 \left(\frac{\ell}{h} \right) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(6) 水平直径点の変位 δ の算定

円筒シェルに作用する荷重により水平直径点には

変位 δ_1 が起こり、変位の大きさに応じた地盤反力が生じる。これにより変位は δ_2 押し戻され、水平直径点の変位 δ は、 $\delta = \delta_1 - \delta_2 = \sum w_i$ となる（ここで、等圧による変位 w_{11} は除く）。荷重 p_4 による変位 δ を、円筒シェルの $x = \ell/2, \varphi = \pi/2$ の位置において算定する。

$$16\delta\left(\frac{x}{\ell}\right)^2\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2 = (w_{12} + w_2 + w_3) + w_4$$

$$= \{(a_1 + a_3) + a_4\} \cdot \ell \cdot \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\left(1-\frac{x}{\ell}\right)^2$$

ここで a_4 は δ の関数であり、 $a_4 = a_4' \cdot \delta$ とおけば

$$\delta = \frac{\ell}{16} \left\{ (a_1 + a_3) + a_4' \cdot \delta \right\} \quad \therefore \delta = \frac{(a_1 + a_3)\ell}{16 - a_4' \ell}$$

として求まる。

6. 近似解による応力の算定

(1) 凍土円筒シェルの変位および応力

前章の近似解析を用いて、各荷重による a_i, b_i が定まれば、 w_i, v_{0i} が求まり、各荷重による断面力は式(1)、式(2)の各式に w_i, v_{0i} を代入して求まる。設計荷重による凍土円筒シェルの変位 $w(t, \varphi), v_0(t, \varphi)$ および各断面力は、重畳の原理により各荷重による変位、断面力を加え合わせて求める。応力は断面力より算定する。

(2) z 方向の応力

2章のシェル理論解析では z 軸に関する応力は取り扱わないとし、3章では σ_z を無視して解析を進めたが、半径方向の応力が 0 となるのは円筒の内縁であり、外縁にはトンネル荷重が直応力として作用する。その外縁応力 σ_{zo} を改めて記述すると

i) 相等しい鉛直・水平等分布荷重

$$\sigma_{z11} = -p$$

ii) 相反する等大の鉛直・水平等分布荷重

$$\sigma_{z12} = -(p_v \cos^2 \varphi + p_H \sin^2 \varphi)$$

iii) 水平等変分布荷重

$$\sigma_{z2} = -(-q \cos \varphi \sin^2 \varphi)$$

iv) 自重および自重反力等分布荷重

$$\sigma_{z3} = 0$$

v) 地盤反力荷重

$$\sigma_{z4} = -R \sin^2 \varphi$$

ここで

$$R = \begin{cases} 0 & (0 \leq \varphi \leq \pi/4) \\ k\delta \left(1 - \frac{\cos \varphi}{\sin \beta}\right) \cdot 16 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 & \left(\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ k\delta \left(1 - \frac{\cos(\pi - \varphi)}{\sin \beta}\right) \cdot 16 \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 & \left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}\right) \\ 0 & (3\pi/4 \leq \varphi \leq \pi) \end{cases}$$

を重ね合わせて、

$$\sigma_{zo} = \sigma_{z11} + \sigma_{z12} + \sigma_{z2} + \sigma_{z3} + \sigma_{z4}$$

となる。なお、内縁応力は $\sigma_{zi} = 0$ である。

(3) 主応力分布と最大主応力差の発生位置

以上の応力計算により、次の三軸主応力が求まる。

外縁応力； $\sigma_{xo}(x, \varphi), \sigma_{\varphi o}(x, \varphi), \sigma_{zo}(x, \varphi)$

内縁応力； $\sigma_{xi}(x, \varphi), \sigma_{\varphi i}(x, \varphi), \sigma_{zi}(x, \varphi)$

計算例として、円筒シェルの形状を内径 $r_i = 2.0m$ 、長さ $\ell = 3.75m$ 、厚さ $h = 1.0m$ 、凍土および地盤定数を $E = 6.3 \times 10^5 kN/m^2$ 、 $\nu = 0.35$ 、 $k = 5.0 \times 10^4 kN/m^2$ 、 $K = 0.5$ 、深度が $H_c = 30m$ （鉛直； $p_v = 560kN/m^2$ 、水平； $p_H = 445kN/m^2$ ）のときの頂部の外縁、内縁主応力分布を図-13、図-14に示す。端部外縁頂部で最大引張応力、内縁で最大圧縮応力が発生し、中央部で主応力差が最大となる位置は、頂部内縁となった。

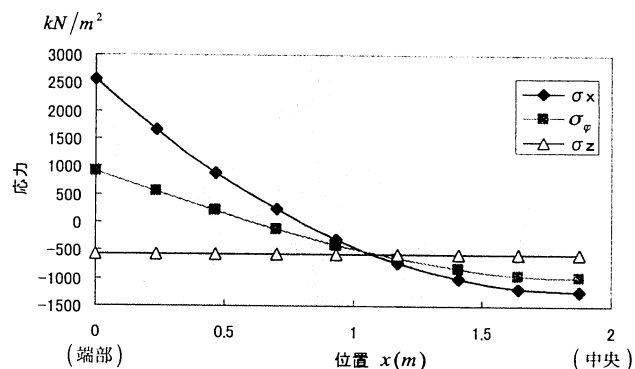


図-13 頂部外縁の主応力分布

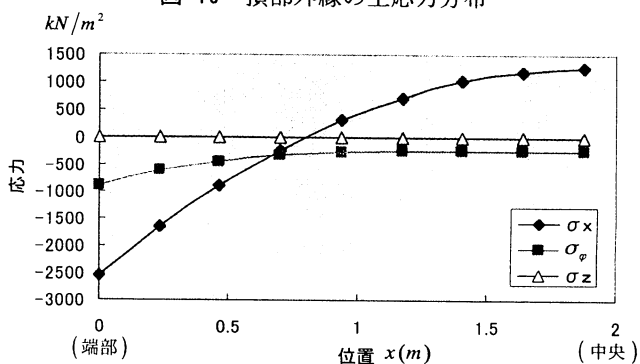


図-14 頂部内縁の主応力分布

7. 数値解析手法による計算結果と近似解の比較

近似解析例を、数値解析手法の一つである有限要素法(FEM)を用いて計算し、その結果と比較する。

使用したのは3次元弾性FEM解析ソフトで、等圧の作用する場合の試算により、理論解と良い一致をみることが確認されている。

近似解析例と同じ条件(ただし、端部完全拘束)で得られた頂部の変位曲線を図-15に、三軸方向の頂部の内、外縁の主応力分布を図-16、図-17に示す。

変位曲線は近似解と同様に山形ではあるが、端部は支持形状を示し(この傾向は4章の模擬実験でも確認されている)、中央部の変形量は約1.45倍となっており、0~0.5mの範囲を除き、中央の差異分を下にスライドするとほぼ重なる。

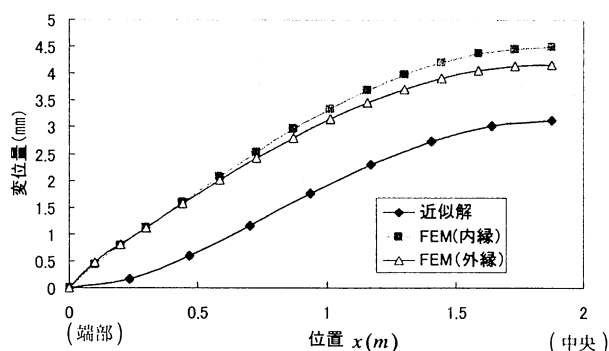


図-15 FEM解析による頂部の変位分布

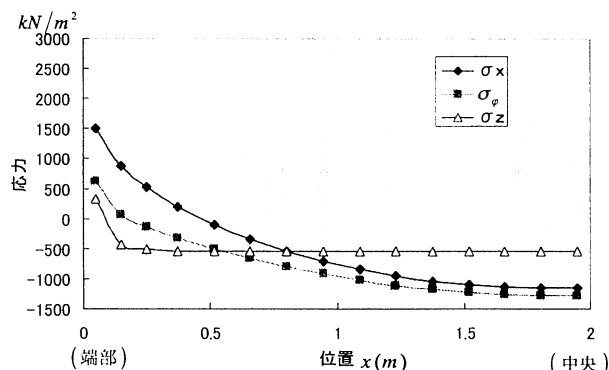


図-16 頂部外縁の主応力分布(FEM)

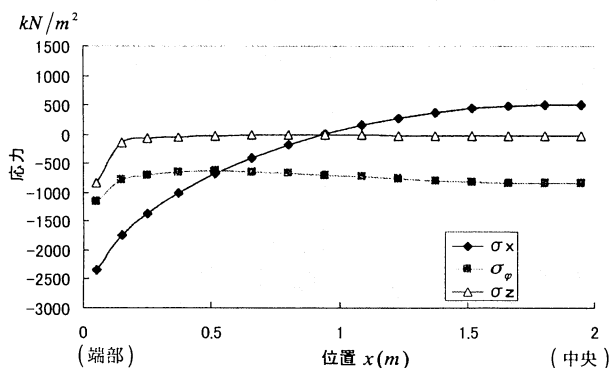


図-17 頂部内縁の主応力分布(FEM)

主応力分布を比較すると、よく一致するとは言いがたいが、端部の応力 σ_x, σ_ϕ に関しては、FEM解の分布を外挿すると値はほぼ一致する。 σ_z に関しては近似解ではx軸方向に関して一定であるが、FEM解では固定端部付近では外縁には引張応力、内縁には圧縮応力が発生するので、一定とはならないため差が出ている。中央部の応力にも差があるが、最大主応力差で見ると、内縁では10%程近似解析解で大きく求まっている。

何れの解析結果からでも、凍土円筒シェルの降伏条件としては、端部では最大引張応力、中央部では最大主応力差によると考えられる。近似解析結果を用いた場合も、大きな誤差は生じず、近似解では若干大きめの値となっているので、設計上は安全側の解を与えることになる。次章で、設計凍土厚を算定する方法を示す。

8. 凍土厚の算定

シェル理論を用いて、三軸方向の主応力が求まった。一方、凍土の応力-ひずみ曲線は非線形⁶⁾で、土の挙動と酷似している。したがって、凍土円筒シェルの設計凍土厚は、端部は引張応力によって、中央部はMohr-Coulombの破壊規準を用いてせん断応力によって検討し、決定するのが妥当である。

端部の最大引張応力 $\sigma_{t, \max} = \sigma_{x0}(0,0)$ から、凍土の設計曲げ強度を σ_{ub} 、安全率を SF_t とすると

$$SF_t = \frac{\sigma_{ub}}{\sigma_{t, \max}}$$

となる。また、中央部の最大主応力差は、先の例では頂部内縁で最大となり、凍土の内部摩擦角を ϕ とすると、凍土円筒シェルの降伏せん断応力 $\tau_{\max}$ は次式となる。

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\phi i}(\ell/2, 0) - \sigma_{xi}(\ell/2, 0)}{2} \cos \phi \quad (10)$$

なお、凍土の内部摩擦角は先行研究⁶⁾により粘土で $\phi = 0^\circ$ 、砂で $\phi = 18^\circ$ という値が得られている。

凍土の設計せん断強度を $\sigma_{u\tau}$ 、降伏せん断応力に対する安全率を SF_τ とすると

$$SF_\tau = \left| \frac{\sigma_{u\tau}}{\tau_{\max}} \right|$$

となる。

任意の凍土厚 h を代入して探り計算し、設計安全率を満足する設計凍土厚を決定できる。先の計算例で砂質凍土の設計曲げ強度を $\sigma_{ub} = 2700 \text{ kN/m}^2$ 、せん断強度を $\sigma_{u\tau} = 1800 \text{ kN/m}^2$ とすると、 $h = 1.0 \text{ m}$ で安全率は $SF_t = 1.05$ 、 $SF_\tau = 2.55$ となり、設計安全率

を1.5 確保したい場合、 $h = 1.33\text{ m}$ として $SF_t = 1.50$ となる。これにより設計凍土厚は $H = 1.35\text{ m}$ と決定できる。

9. むすび

凍土や地中構造物の設計において、円筒シェルの各種設計荷重における変位、応力を、近似解析手法により求め、凍土厚を算定する概略設計法の開発の過程を取りまとめた。

円筒シェルは等圧の場合には理論解が得られ、シェル理論の1変数問題として4階の常係数線形微分方程式を解くことに帰し、微分方程式は次式となる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\nu}{r_0^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E h}{D r_0^2} w = \frac{p}{D}$$

その解は

$$w = B_1 \cosh \alpha x \cos \beta x + B_4 \sinh \alpha x \sin \beta x + \frac{p r_0^2}{E h}$$

境界条件は $x = \pm \frac{\ell}{2}$ において $w = \frac{dw}{dx} = 0$
ここに

$$\alpha = \sqrt{-\frac{\nu}{4 r_0^2} + \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{r_0^2 h^2}}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\nu}{4 r_0^2} + \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{r_0^2 h^2}}}$$

である。

そして、この解が次の変位の適合条件式(あてはめ式)にポテンシャルエネルギー極小の定理を用いることによって精度よく近似できることを示した。

$$\frac{w}{\ell} = \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 \cdot \sum_0^m a_m \cos 2m\pi \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)$$

ここに、 m は整数、 a_m は未定係数である。

両端固定の凍土円筒シェルの実設計 ($h/r_0 \geq 0.4$) では、 $m=0$ とおいたあてはめ式、即ち固定ばりのたわみ式形式である

$$\frac{w}{\ell} = a_0 \left(\frac{1}{4} - t^2 \right)^2 = a_0 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right)^2$$

$$\text{ここで } t = \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2}$$

が有用であり、等圧の作用する場合に良い精度で近似できること、また、各種の設計荷重に対するあてはめ式をこのあてはめ式を基本とする式に断面変形状を表現する三角関数を乗じた形で作成可能なことを示し、各種トンネル設計荷重における変形、応力の近似解を得た。

最後に近似解析で求めた三軸方向主応力を用いて、設計凍土厚を決定する方法を示した。従来計算法と比較して合理的に凍土厚が求まり、数値解析法に比べて非常に簡便で、凍土トンネルの概略設計手法として有効である。

謝辞：本研究を進めるにあたり、模擬検証実験において装置の作成、実験データの取得、整理に(株)精研凍結本部工事部の阿部裕介氏に、また、FEM解析に技術部の吉田聡志、野口淳平氏の協力を頂いた、ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Meissner E. : *Physik. Z.*, vol.14, p. 343, 1913.
- 2) Geckeler, J.W. : *Forschungsarb.*, No.276, Berlin, 1926.
- 3) Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S.(長谷川節訳) : 板とシェルの理論(下) pp.439-503, ブレイン図書, 1973.
- 4) 土木学会: 構造力学公式集, 昭和 61 年版, p.380, 1986.
- 5) 土木学会: トンネル標準示方書[シールド工法編]・同解説, 第2編 覆工, 1996.
- 6) 小林 進, 山本英夫, 伊豆田久雄: 凍結土の三軸圧縮強度特性について(1), 日本雪氷学会講演予稿集, pp.149, 1989.