

トンネルアーチの座屈解析

Buckling Analysis of Tunnel Arch

田村 武¹⁾・林 芳樹²⁾・射場 茂夫³⁾・佐藤 雅宏⁴⁾

Takeshi TAMURA¹⁾, Yoshiki HAYASHI²⁾, Shigeo IBA³⁾, Masahiro SATO⁴⁾

Buckling load and buckling mode of a tunnel arch in two dimensions using a circular arc model are presented in this paper. Buckling analysis is first carried out on the circular arc under the uniform external pressure; the analytical results are then compared with theoretical results in order to check the validity of the method of analysis. Further, buckling verification was done by carrying out experiments on tunnel arch model. The arch was then analyzed under the same experimental conditions and proved to be sufficiently safe against buckling.

Key Words : buckling, tunnel support, corrugate arch, numerical analysis, model experiment

1. はじめに

山岳トンネルの1次支保やシールドセグメントには地山からの土圧を受けて大きな圧縮力が発生する。多くの場合、部材の厚さが十分にあり、圧縮力による座屈破壊に対しては安全とされることから、その確認や照査はされない。しかし実際には、膨張性地山におけるトンネルにおいて支保や覆工が座屈に近い破壊をしている例も見られる。これまでトンネル構造の座屈についてはあまり検討されていなかったが、上記のようにトンネルアーチの部材厚さに対して大きな荷重が作用する場合には、当然、それに対する安全性の評価が必要となる。ここでは特に、コルゲートカルバートトンネルを想定し、座屈解析を実施した。

コルゲートカルバートトンネルはこれまでトンネル断面積の小さいものを中心であったが、近年、中規模断面のものにも適用が検討されている。コルゲート状の部材ではあるが、部材厚はあまり大きくなく単独で地表に置かれた場合にはかなり柔軟な構造物である。これが地盤内では作用する土圧と適度な相互作用を生じ、構造が容易に変形することによってより等方的な荷重分布を作りだしている。すなわち、曲げによる応力はあまり生じないが圧縮力である軸力はかなり大きくなるという構造特性を有している。したがって座屈に対する安全性が大きな課題となる。そこでここではトンネルアーチ部分に対する線形座屈解析を実施するとともに室内実験として行なわれたコルゲートアーチに対する載荷試験結果との比較を行ない、その座屈安定性を検証した。

1) フェロー 京都大学大学院工学研究科

2) 学生会員 京都大学大学院工学研究科

3) 正会員 コルゲートライナー協会

4) 正会員 樹テクノソール

2. 理論値との比較による解析手法の妥当性の検討

(1) 概説^{1), 2)}

本研究では、後述する室内試験と対応させるために、図-1 に示すような中心角 60° の円弧アーチに対して線形座屈解析を実施する。また、外力として図-2 に示すように、円の中心方向に作用する等分布荷重を与え、端点は図-2(a) に示すような両端ヒンジのものと、図-2(b) に示すような両端固定のものを考える。本章では、座屈解析手法について示し、また、本解析手法による解析結果と以下に示す理論値を比較することで、解析手法の妥当性を検証する。

座屈荷重を算定するには、以下の2つの仮定を用いる。仮定1)として、円の中心に向かう一様な大きさの荷重が作用する場合、等断面アーチは近似的に軸圧縮力のみが生じるとする。仮定2)として、アーチに軸圧縮力のみが作用する場合、アーチが座屈を生じる前に、変形はほとんど生じず、座屈前の変形を無視することができる。これによって分布荷重を受けるアーチの座屈を固有値問題として扱うことができる。これらの仮定のもとで求まる座屈応力度は以下のように表される。両端ヒンジの場合には座屈応力度は、

$$\sigma_{cr} = \frac{4E}{\lambda^2} \left(\frac{\pi^2}{\theta_0^2} - 1 \right) \sin^2 \theta_0 \quad (1)$$

と表される^{1), 2)}。ただし、 σ_{cr} は座屈応力度 $\sigma_{cr} = q_{cr} R/A$ 、 E は弾性係数、 λ は細長比 $\lambda = L/r$ 、 r は断面2次半径、 L は円弧アーチの弦の長さ、 θ_0 は中心角の半分($=30^\circ$)、 A は断面積、 R は円弧アーチの半径、 q_{cr} は座屈時に円の中心方向に作用する単位長さ当たりの荷重である。また、両端固定の場合には座屈応力度は、

$$\sigma_{cr} = \frac{4E}{\lambda^2} (k^2 - 1) \sin^2 \theta_0 \quad (2)$$

と表される^{1), 2)}。ただし、 k は座屈荷重係数と呼ばれアーチ形状に依存し、図-1 に示すように $f/L = 1/7.5$ となるアーチ形状の場合には $k = 8.621$ と表される。

(2) 解析手法^{4), 5), 6)}

・ 解析モデル

図-3 に円弧アーチが等方圧縮される場合の、弾性棒と回転ばねから成る解析モデルを示す。図-3(a)に両端ヒンジの場合の解析モデルを示し、図-3(b)に両端固定の場合の解析モデルを示す。また、この解析モデルは「剛棒—ばねモデル」³⁾と同様に覆工の曲げ剛性を回転ばねによって表しているが、棒要素が軸方向に弾性変形を生じるという点で異なることに注意が必要である。すなわち、軸力は各節点変位によって表される。そのため、未知数は節点変位のみとなる。

図-4(a)に、はりの微小部分に曲げモーメント M が生じた時のたわみ角を示す。このとき、はり理論における基礎方程式は

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3a)$$

すなわち、

$$M = -EI \times \frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right) \quad (3b)$$

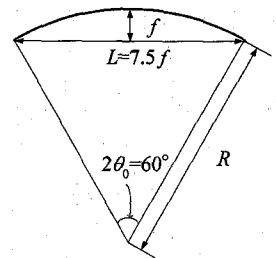
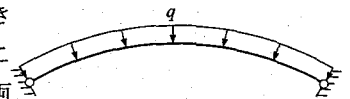
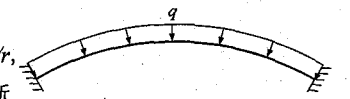


図-1 円弧アーチの形状

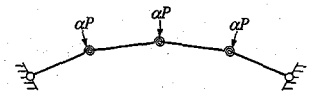


(a) 両端ヒンジの円弧アーチ

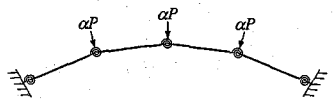


(b) 両端固定の円弧アーチ

図-2 等分布荷重が作用する円弧アーチ



(a) 両端ヒンジの円弧アーチの解析モデル



(b) 両端固定の円弧アーチの解析モデル

図-3 解析モデルの模式

と表される。ただし、 x ははりの軸方向の座標、 v ははりのたわみである。図-4(b)に回転ばねに曲げモーメント M が生じた時の回転角を示す。このとき、解析モデルにおいて曲げを表す基礎方程式は、長さ l あたりの回転角を θ とすると

$$M = K_{\theta}(-\theta) \quad (4a)$$

すなわち、

$$M = -K_{\theta} l \times \frac{\theta}{l} \quad (4b)$$

と表される。式(3b)、(4b)はともに

(曲げモーメント) = (定数) × (単位長さあたりの傾きの変化)

となっている。このことから、式(3b)と式(4b)を比較すると曲げ剛性 EI と回転ばね定数 K_{θ} の関係は

$$K_{\theta} = \frac{EI}{l} \quad (5)$$

と表される。このようにして求まる回転ばね定数 K_{θ} と弾性棒の剛性 EA を材料定数として用いる。

・ 微小変形のつり合い式

各節点の変位前の形状における力のつり合いを考えると

$$B^T S = \alpha P \quad (6)$$

が得られる。ただし、 S は部材力ベクトル、 B^T は S でつり合い式を表現するための行列で下記の式(7)にある B 行列の転置行列、 α は荷重係数、 αP は $\alpha P = (\alpha P_{x1}, \alpha P_{y1}, \dots, \alpha P_{x(m-1)}, \alpha P_{y(m-1)}, \alpha P_{xm})^T$ 、 m は弾性棒の部材数、 αP は円形リングの中心方向に作用する外力、 αP_{xi} は節点 i に作用する外力 αP の x 成分、 αP_{yi} は節点 i に作用する外力 αP の y 成分である。次に、各部材の変形条件を用いると

$$\delta = Bu \quad (7)$$

と表される。ただし、 δ は部材の圧縮量を表すベクトル、 u は未知節点変位ベクトルである。さらに、材料定数を用いると、部材力は

$$S = D\delta = DBu \quad (8)$$

と表される。ただし、 D は材料定数を表す行列である。式(6)、(8)より微小変形解析におけるつり合い式は

$$B^T DBu = \alpha P \quad (9a)$$

すなわち、

$$K_E^0 u = \alpha P \quad (9b)$$

と表される。ただし、 K_E^0 は剛性行列 $K_E^0 = B^T DB$ である。式(9b)の連立方程式を解いて得られる解を式(8)に代入することで部材力が求まる。

・ 有限変形のつり合い式

式(3)で表されるつり合い状態に、さらに荷重 $\Delta \alpha P$ を加え、新たに変位が生じた場合を考える。係数行列 $B(\alpha)$ 、部材力ベクトル $S(\alpha)$ とともに荷重パラメータ α の関数として表されるので、式(6)は

$$B^T(\alpha + \Delta \alpha) \cdot S(\alpha + \Delta \alpha) = (\alpha + \Delta \alpha) P \quad (10)$$

と表される。さらに式(10)左辺の各項は次式のように展開することができる。

$$B^T(\alpha + \Delta \alpha) = B^T(\alpha) + \Delta B^T(\alpha) \quad (11a)$$

$$S^T(\alpha + \Delta \alpha) = S^T(\alpha) + \Delta S^T(\alpha) \quad (11b)$$



(a) はりのたわみ角と曲げモーメント



(b) 回転ばねに生じる回転角と曲げモーメント

図-4 はりのたわみ角と解析モデルの回転角に対応する曲げモーメント

式(11)を用いて式(10)を展開し、2次の微小項を無視し、式(6)を用いて整理すると

$$B^T(\alpha)\Delta S(\alpha) + \Delta B^T(\alpha)S(\alpha) = \Delta\alpha P \quad (12)$$

と表される。ここで、式(12)の左辺第1項は、微小変形のつり合い式の場合と同様に変形でき、

$$B^T(\alpha)\Delta S(\alpha) = K_E(\alpha)\Delta u(\alpha) \quad (13)$$

と表される。ただし、 $K_E(\alpha)$ は $K_E(\alpha) = B^T(\alpha)DB(\alpha)$ である。一方、式(12)の左辺第2項は

$$\Delta B(\alpha)^T S(\alpha) = \sum_{i=1}^{2m-1} \left(\frac{\partial b_i(\alpha)}{\partial u(\alpha)} S_i(\alpha) \right) \Delta u(\alpha) \quad (14a)$$

すなわち、

$$\Delta B^T(\alpha)S(\alpha) = K_G(\alpha)\Delta u(\alpha) \quad (14b)$$

と表される。ただし、 m は部材数、 $B^T(\alpha)$ は $B^T(\alpha) = \{b_1(\alpha), b_2(\alpha), \dots, b_{2m-1}(\alpha)\}$ 、 $S(\alpha)$ は $S(\alpha) = (S_1(\alpha), S_2(\alpha), \dots, S_{2m-1}(\alpha))^T$ 、 $\Delta u(\alpha)$

は $\Delta u(\alpha) = (\Delta u_1(\alpha), \Delta u_2(\alpha), \dots, \Delta u_{2m-1}(\alpha))^T$ 、 $K_G(\alpha)$ は幾何剛性行列 $K_G(\alpha) = \sum_{i=1}^{2m-1} \left(\frac{\partial b_i(\alpha)}{\partial u(\alpha)} S_i(\alpha) \right)$ である。なお、 $K_G(\alpha)$ は $K_E(\alpha)$

とともに対称行列となる。式(12)、(13)、(14)より、有限変形のつり合い式は

$$(K_E(\alpha) + K_G(\alpha))\Delta u = \Delta\alpha P \quad (15)$$

と表される。ただし、 $K_E(\alpha) + K_G(\alpha)$ は接線剛性行列である。

・ 線形座屈解析

座屈解析とは式(15)の右辺の外力項の増分を0としたときに、0ベクトルではない Δu の存在を検証することである。特に、左辺の諸量を変形前の状態で近似する場合を線形座屈解析という。これは座屈が生じるまでは微小変形解析で表される微小変形のみが生じ、有限変形が生じないとしていることを意味する。このとき、式(14)、(15)より、

$$K_E^0 \Delta u(\alpha) + \alpha K_G' \Delta u(\alpha) = 0 \quad (16)$$

という一般化固有値問題が得られる。ただし、 $\alpha K_G' = K_G^0$ であり、 K_G^0 は初期状態における値と微小変形解析によって求めた部材力を用いて求めた幾何剛性行列である。ここに、微小変形解析で求まる部材力を用いるので、幾何剛性行列は $\alpha K_G'$ と表すことができる。式(16)で表される一般化固有値問題を解き、最小の固有値 $\alpha_{\min}$ を求めることで座屈荷重は

$$P_{cr} = \alpha_{\min} P \quad (17)$$

と表される。ただし、 P_{cr} は各節点に作用する荷重の限界値(座屈荷重)である。また、この値を等分布荷重に変換すると

$$q_{cr} = P_{cr} \times \frac{m}{2\theta_0 R} \quad (18)$$

と表される。ただし、 q_{cr} は等分布荷重としての座屈荷重、 R は円形リングの半径である。このようにして求まる等分布荷重としての最小の座屈荷重を、式(1)、(2)で示した理論値と比較する。また、固有値の最小値に対応する固有ベクトルによって、座屈を生じたときの各節点変位の比である座屈モードも表される。

(3) 解析結果

・ 概説

本節では、図-2に示す等方圧縮される円弧アーチの解析モデルに対する解析結果を示す。ここでは解析モデルにおける弾性棒の部材数を $m=16$ として解析を行った。表-1に理論計算及び解析において用いた円弧アーチに関する諸元を記す。ただし、ここでは式(1)、(2)に示す理論値を降伏応力度で除した値と、線形座屈解析によって求めた座屈応力度を降伏応力度で除した値と比較する。また、線形座屈解析において式(13)で表される固有値問題を解く際に式(13)を

$$K'_G \Delta u(\alpha) + \frac{1}{\alpha} K_E^0 \Delta u = 0 \quad (19)$$

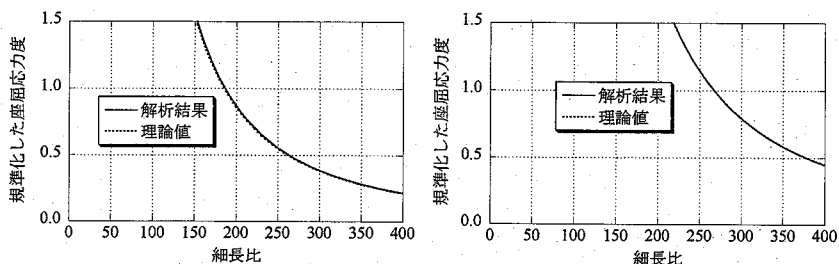
と変形し、最大の固有値 $(1/\alpha)_{\max}$ を求めることで最小の座屈荷重 q_{cr} を求めた。なお、座屈モードは各節点変位の比として求まるもので、絶対量を表すものではない。

・ 解析結果

図-5(a), (b)にそれぞれ両端ヒンジの場合と、両端固定の場合の座屈応力度の理論値と解析結果を示す。図-5(a), (b)の縦軸には座屈応力度を降伏応力度で除すことによって規準化した値を示し、横軸には細長比を示す。ただし、解析においては断面を一定とし半径を変化させることで、細長比を変化させた。図-5(a), (b)より、細長比を小さくするほど座屈応力度が大きくなり、座屈を生じにくいことが確認できる。また、両端ヒンジの場合、両端固定いずれの場合も、解析結果と理論値はほぼ一致しており、解析手法の妥当性が確認される。また、両端ヒンジの場合の座屈モードを図-6(a)に示し、両端固定の場合の座屈モードを図-6(b)に示す。これらの座屈モードはともに理論解と同様な逆対称モードとなっている。

表-1 円弧アーチに関する諸元

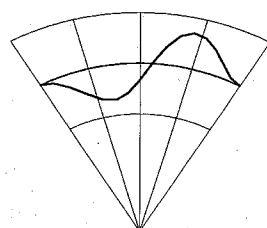
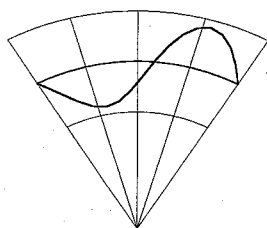
弾性係数	[kN/mm ²]	205
断面積	[mm ²]	2167
断面2次モーメント	[mm ⁴]	43600
降伏応力度	[kN/mm ²]	0.21
座屈荷重係数		8.621



(a) 両端ヒンジの場合の座屈応力度

(b) 両端固定の場合の座屈応力度

図-5 座屈応力度と細長比の関係



(a) 両端ヒンジの場合の座屈モード

(b) 両端固定の場合の座屈モード

図-6 円弧アーチの座屈モード

3. 2次元鉛玉土槽によるコルゲートセクションの座屈検証実験とその解析

(1) 実験概要

本研究では、鉛玉を用いた2次元土層を用いて、大断面コルゲート部材を対象とした座屈実験を行った。図-7に実験装置の模式図を示す。また、コルゲートセクションにはI型を用い、その断面形状を図-8に示し、部材に関する諸元を表-2に示す。実験条件としては、2章と同様に両端ヒンジと両端固定の2つの条件について行った。

表-2 実験で用いた部材に関する諸元

弾性係数	[kN/mm ²]	205
断面積	[mm ²]	2167
断面2次モーメント	[mm ⁴]	43600

(2) 実験手法

実験は、コルゲート部材を設置してから、盛土（鉛玉）施工を行った。盛土施工は、1層当り5cmとし、各施工時での荷重・変形挙動を確認するとともに、各層施工後に計測を行いながら次ステップへ移行する。また、その際に投入した鉛玉の重量を測定しておき、各層ごとの密度管理を行うものとする。なお、最終盛土高さに達した時点でも座屈の現象が現れない場合には、等分布荷重が載荷できるよう、パック詰めした鉛玉を2段程度敷き並べた後、分割鉄板等により上載荷重を載荷するものとする。ただし、この場合の最大上載荷重は、 25 kN/m^2 程度を上限とする。

(3) 実験に対する解析

ここでも、2章と同様に部材数 $m=16$ として線形座屈解析を行った。ただし、ここでは外力として図-9に示すように、実際に作用する分布荷重を模擬して与えた。

(4) 実験結果と解析結果

座屈するものと予想して実験を始めたが、予想外に強い構造であり、座屈するまでに到らなかった。実験における最終的な荷重状態を、盛土高さに換算すると1100mmとなった。また、解析では、座屈時の盛土高さは両端ヒンジの場合では7772mm、両端固定の場合では15960mmとなった。これらの値は実験における最終的な盛土高さよりもかなり大きく、実験で座屈が生じなかったことに矛盾しない。また、この場合も座屈モードは図-6に示すものになった。

4. 結論

本研究では、弾性棒ばねモデルで定式化を行った。円弧アーチに半径方向への等分布荷重が作用する場合には、両端ヒンジの場合も両端固定の場合も理論値と解析結果がほぼ一致し、本解析手法の妥当性を確認した。また、実施した実験における載荷の程度では座屈は発生しないことを確認した。ここでは、地山（鉛玉）とアーチの間の相互作用を考慮しなかったが実際には、両者の間には地盤反力係数を用いて表現されるような効果があり、アーチ周辺の土圧分布が変化する。これを同時に加味して線形座屈解析を行うと座屈荷重はさらに上昇するものと考えられる。

参考文献

- 1) S. P. Timoshenko and J. M. Gere : *Theory of Elastic Stability (2nd Edition)*, McGraw-Hill, pp.278-302, 1963.
- 2) 土木学会：座屈設計ガイドライン, pp.289-298, 1987.
- 3) 田村武, 足立紀尚, 梅田昌彦, 岡部哲也：吹き付けコンクリートの支保機構に関する数値解析的評価, 土木学会論文集, No.603/III-44, pp.11-20, 1998.
- 4) 池田清宏・室田一雄：構造系の座屈と分岐, コロナ社, pp.5-17, pp.74-98, 2001.
- 5) 田村武, 林芳樹：トンネル覆工の座屈解析, 第6回応用力学シンポジウム, 印刷中
- 6) 林芳樹：トンネル覆工の座屈に関する基礎的研究, 京都大学, 卒業論文, 2003.

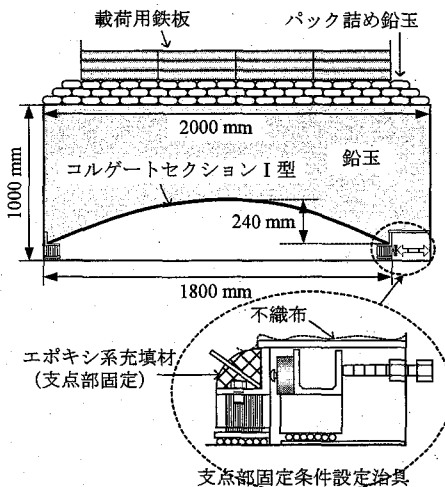


図-7 実験装置の模式図

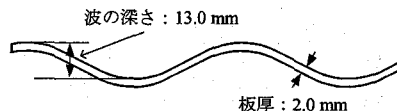


図-8 コルゲートセクション I 型の断面図

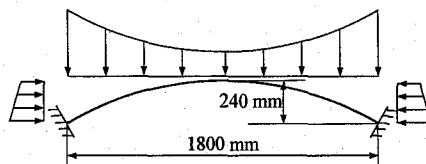


図-9 解析モデルにおいて与える外力