

降伏条件の違いによる塑性領域の相違

DIFFERENCE OF PLASTIC ZONE BY YIELD CONDITIONS

伊藤隆至*・西岡隆**

By Takashi ITOH, Takashi NISHIOKA

A.A.Griffith is the only one that clarified physical mechanism of brittle failure. In this paper, the authors suggest new application of his yield condition for reason that Griffith's theory is not adapted to rock. The plastic zone produced in the excavation of tunnel by using yield conditions is discussed in consideration of brittleness. The authors got the following conclusions. : 1) Plastic zone decreases with increasing brittleness or increasing tensile strength. 2) Rock failure mechanism can be estimated by failure parameter. 3) Rock burst growing index is suitable for studying rock burst. 4) The rock burst is not explained only by strain energy. 5) The peaks of plastic zone are not the very same as portions of rock burst.

Keywords : yield condition, plastic zone, brittleness, failure parameter, rock burst growing index

1. まえがき

これまでに、三軸圧縮試験を行った組合せ応力下での破壊条件が多数発表されてきたが、いずれも破壊機構の物理的モデルが完全には示されず、経験式の域に留まっている。それは強度破壊の物理的意味が複雑であるからだと言われている。

A.A.Griffith¹⁾²⁾は、供試体の脆性破壊が潜在するクラックの成長によって生じると考え、最も危険な潜在クラックの先端から引張クラックが成長する条件をエネルギー収支によって求めた。

しかしながら、この理論に基づく破壊条件では、一軸引張強度に対する一軸圧縮強度の比、すなわち脆性度が常に8となるため、ガラスのような等方・均質な物質と違って、不均質な岩石では適用が難しい。

そこで、本研究では、Griffith理論の欠点である脆性度を一般化したMohrの規準を用い、主動破壊、受動破壊を考慮した降伏条件を採用する。ただし、ここで述べる降伏条件は脆性破壊のように降伏が起こらないときは破壊条件を、降伏が起こるときは降伏条件を与えるものとする。

さらには、脆性度によって異なる降伏条件により、地山にトンネルを掘削した場合の塑性領域がどのように異なってくるのかを示し、塑性領域内部における破壊機構が脆性破壊であるのか、それとも延性破壊であるのかを示す。その例として、山はね現象についてエネルギーを用いて考察する。

ただし、本研究において、温度やひずみ速度の影響は考慮しないものとする。

* 学生会員 筑波大学大学院 工学研究科 構造工学専攻 (〒305 つくば市天王台 1-1-1)

** 正会員 工博 筑波大学 構造工学系 教授 (〒305 つくば市天王台 1-1-1)

2. 降伏条件

一般に、等方性物質の降伏は体積変化によることはなく、形状変化によるという実験事実に基づいて、降伏関数を Drucker-Prager 流に表すと次のようになる。³⁾⁴⁾

$$f(J_1, J_2, J_3) = \alpha J_1 + J_2^{\frac{1}{2}} - \kappa$$

ただし、 J_1 は応力の第一不変量、 J_2, J_3 は偏差応力の第二、第三不変量である。

α, κ の値については諸説があるが、特に代表的なものとして、 $\alpha = 0$ ならば Von Mises, $\alpha \neq 0$ ならば Drucker-Prager の規準がある。

本研究では、主動破壊、受動破壊を考慮して、係数 α, κ を以下のように与えた。ただし、 $\Theta = \sin^{-1}(-3\sqrt{3}J_3'/2J_2'^{\frac{3}{2}})/3$ とする。

$$\alpha = \frac{\sin \zeta}{\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos \Theta - \sin \Theta \sin \zeta)}, \quad \kappa = \frac{3\xi \cos \zeta}{\sqrt{3}(\sqrt{3} \cos \Theta - \sin \Theta \sin \zeta)}$$

ζ は内部摩擦角に相当するもので、 ζ および ξ が平均主応力によらず一定値をとるならば、Mohr-Coulomb の降伏条件となる。⁵⁾

ここでは、以下に ζ, ξ の値について誘導過程を述べる。

いま、Griffith 理論を一般化した Mohr の包絡線 (図 1 の f') は、次のように表すことができる。⁶⁾ ただし、 σ_t は一軸引張強度を表し、 n は脆性度を表す。

$$\tau_n^2 = \frac{n}{2} \sigma_t \left(-\sigma_n + \frac{n}{8} \sigma_t \right) \dots \dots \dots (1)$$

いま、この包絡線上にある点 $P(\sigma_n, \tau_n)$ の接線 AB の σ 軸となす角、および τ 軸と交差するときの τ 座標の値を求めると、以下のようになる。

$$\zeta = \tan^{-1} \left(-\frac{\partial \tau_n}{\partial \sigma_n} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{n \sigma_t}{4 \tau_n} \right), \quad \xi = \sigma_n \tan \zeta + \tau_n \dots \dots \dots (2)$$

また、点 P の座標は、偏差応力 σ'_1, σ'_3 及び平均主応力 σ_m を用いて、さらには、G.C.Nayak と O.C.Zienkiewicz が提唱した手法を用いて、以下のよう表すことができる。⁷⁾

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} + \sigma_m - \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \sin \zeta = \frac{1}{2} R \sin \Theta + \sigma_m + \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \Theta \sin \zeta \\ \tau_n &= \left| \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \cos \zeta \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \Theta \cos \zeta \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

これを利用して、式 (2) は以下のよう表すことができる。

$$\zeta = \sin^{-1} \left(\frac{n \sigma_t}{2\sqrt{3} R \cos \Theta} \right), \quad \xi = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \zeta}} \left(\frac{1}{2} \sin \Theta \sin \zeta + \frac{\sqrt{3}}{2} R \cos \Theta + \sigma_m \sin \zeta \right) \dots \dots \dots (4)$$

よって、式 (1) に式 (3), (4) を代入し、 R は σ_m を中心軸とすることから次の式が得られる。

$$R = \frac{\sqrt{5n^2 \sigma_t^2 - 8n \sigma_t \sigma_m}}{2\sqrt{3}} \dots \dots \dots (5)$$

従って、式 (4) に式 (5) を代入すると、以下の式が得られる。

$$\zeta = \sin^{-1} \left(\frac{n \sigma_t}{\sqrt{2n^2 \sigma_t^2 - 8n \sigma_t \sigma_m}} \right), \quad \xi = \frac{n^2 \sigma_t^2 - 4n \sigma_t \sigma_m}{4\sqrt{n^2 \sigma_t^2 - 8n \sigma_t \sigma_m}}$$

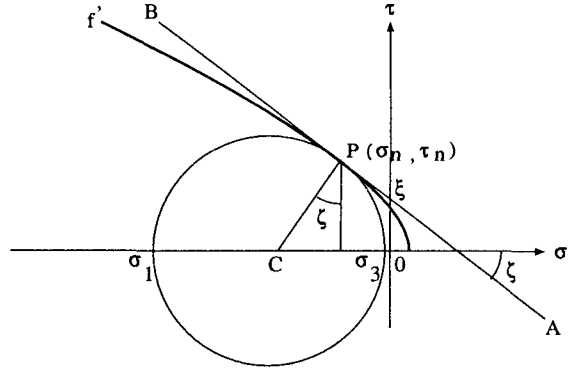


図 1 Griffith 理論に基づく Mohr の包絡線

3. トンネル周辺地山の応力状態と塑性領域

図2に示される平面ひずみ状態における円孔周辺の応力場の半径方向応力 σ_{rr} 、周方向応力 $\sigma_{\theta\theta}$ 、せん断応力 $\tau_{r\theta}$ は、Airy の応力関数をそれぞれ境界条件のもとで解くことによって、式(6)のように与えられる。⁸⁾ ただし、 r_0 は平面ひずみ状態における二次元無限弾性体内に開けられたトンネルの半径を表し、 h は地表面からトンネル中心までの距離を表す。また、 s はトンネル中心位置での鉛直土圧 ρgh を表し、 X はトンネル中心からの距離の逆数を示す無次元パラメーター r_0/r である。 k 、 ν についてはそれぞれ地山の側方土圧係数、ポアソン比を表す。また、 θ については、反時計回りを正とした。

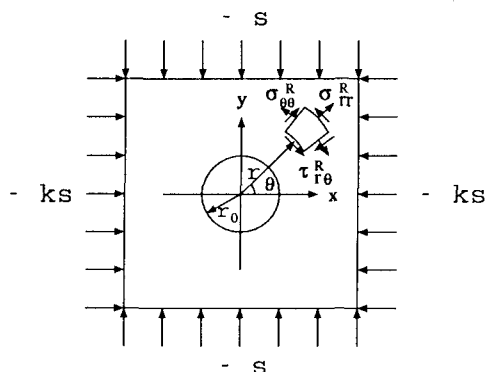


図2 トンネル周辺の応力場

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= -s \left[\frac{1}{2}(1+k)(1-X^2) - \frac{1}{2}(1-k)(1-4X^2+3X^4) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= -s \left[\frac{1}{2}(1+k)(1+X^2) + \frac{1}{2}(1-k)(1+3X^4) \cos 2\theta \right] \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{s}{2}(1-k)(1+2X^2-3X^4) \sin 2\theta \dots\dots\dots (6)\end{aligned}$$

これより、トンネル周辺の半径方向応力 σ_{rr} は、掘削によって応力が解放されるために無限大からトンネル方向に向かって応力の減少が生じ、トンネル周辺の周方向応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は、半径方向応力の減少に励起されてトンネル壁で最大となる。また、トンネル周辺のせん断応力 $\tau_{r\theta}$ は、半径方向応力や周方向応力に比べて比較的発生しにくく、側方土圧係数が1.0のときには、全く発生しない結果が得られる。⁵⁾

図3は、明瞭な結果を得る目的から、土被り1500m、トンネル半径5m、側方土圧係数1.5、ポアソン比0.3、単位体積重量2.6 tf/m³、ヤング率9.8 GPa、一軸引張強度4.9 MPa、脆性度10のときのトンネル周辺地山の応力場より偏差応力の第二不変量を求め、降伏条件で用いる係数 α 、 κ を算出し、 $J_2' \leq \kappa - \alpha J_1$ となった(塑性)領域を黒く塗り潰して表したものである。

overburden height (m)	1500.0
radius of tunnel (m)	5.0
coefficient of lateral pressure	1.5
poisson's ratio	0.3
unit weight (tf/m ³)	2.6
modulus of deformation (GPa)	9.8
tensile strength (MPa)	4.9
brittleness	10

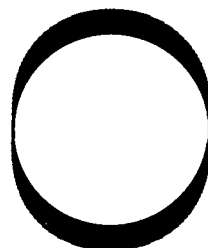


図3 降伏条件と塑性領域

これから、トンネル上壁および下壁に塑性領域が卓越しているのが分かる。また、解析により、側方土圧係数が1よりも小さいときにはトンネル側壁部分に塑性領域が集中する傾向にあり、1のときにはトンネル壁全周に塑性領域が生じ、1よりも大きいときにはトンネル上壁および下壁に塑性領域が集中する傾向となる。また、側方土圧係数の値にかかわらず、脆性度が大きくなると塑性領域が全体的に減少することが分かった。一軸引張強度が大きくなる場合も同様の結果となった。

4. 破壊パラメータと山はね発生指数

岩石のように、脆性の高い物質でも、拘束圧の影響によって破壊機構が変化する（すなわち、平均主応力が増すことによって、脆性破壊から延性破壊に移行する）ことが分かっている。ここでは、その破壊機構を適切なパラメータを用いて表す。

また、地山にトンネルを掘削する際、極めて重大な災害を引き起こす可能性のあるものに山はね現象がある。ここでは、破壊機構について述べるのみに留まらず、山はねといった現象についても考察する。山はね現象といっても、破壊様式や規模にはいろいろなものが挙げられるが、ここで取り上げる山はね現象は、特に、破壊現象は極めて脆性的であり、破壊後に破片が飛び出す時のエネルギーは周辺岩盤から供給されるのではなく、破片自身が蓄えているものである。ただし、温度やひずみ速度の影響については全く考慮しないものとする。

図4は縦軸に偏差応力の第二不変量の1/2乗を、横軸に平均主応力をとったもので、図中に示される f は本研究で用いた降伏条件である。今、地山の一次応力状態が弾性領域内にあって、その平均主応力が σ_a であるとし、また、トンネル掘削によって再編成された二次応力状態が塑性領域にあるとして、その平均主応力が σ_b であるとする、降伏時における包絡線の平均主応力に対する傾きは、 $\partial J_2^{1/2} / \partial \sigma_m$ となる。この傾きが大きければ、わずかの平均主応力の減少に対し、容易に脆性的に破壊する。そこで、破壊パラメータ(P_f)なるものを以下のように定義する。ただし、 α は降伏条件で用いたものに等しい。

$$P_f = \sin \left\{ \tan^{-1} \left(-\frac{\partial J_2^{1/2}}{\partial \sigma_m} \right) \right\} = \sin \left\{ \tan^{-1} (3\alpha) \right\} \dots\dots\dots (7)$$

図5は、破壊機構を大まかに三つのパターンに分類して表示したものであるが、これは、拘束圧が増すことによって円柱供試体の破壊機構が1（脆性破壊）から2（すべり破壊）、3（延性破壊）へと変わってことを考慮して表示したものである。いま、破壊パラメータ(P_f)を用いて、破壊機構を次のように表す。

- 1の場合 $P_f = 2/3 \sim 1$.
- 2の場合 $P_f = 1/3 \sim 2/3$
- 3の場合 $P_f = 0. \sim 1/3$

地山が一次応力状態から二次応力状態に移行する際に生じる体積弾性ひずみエネルギーの差は、 $|\sigma_a^2 - \sigma_b^2|/2K$ である。ただし、 K は体積弾性係数であり、 $K = E/3(1 - 2\nu)$ である。

従って、山はね (rock burst) 発生指数 (E_{rb}) を式 (7) と体積ひずみエネルギーを用いて、以下のように定義した。

$$E_{rb} = P_f \times \frac{1}{2K} |\sigma_a^2 - \sigma_b^2| \dots\dots\dots (8)$$

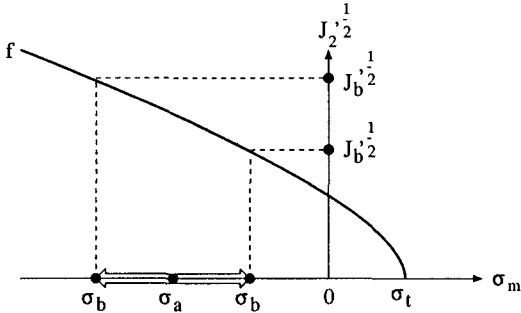


図 4 降伏条件とエネルギー収支

1	2	3
brittle failure	sliding failure	ductile failure

図 5 破壊パラメータと破壊機構

この式の意義は、単にひずみエネルギーが大きければ山はね現象が起こりやすいといった従来の考え方では矛盾する(例えば降伏条件が Von Mises 型となるような場合、いくらひずみエネルギーが大きくても塑性流動しか生じない。) 場合を考え、山はねの起こる現象を二つの成分(脆性破壊する確率、飛び出す破片自身が蓄えている体積ひずみエネルギー)の掛け合わせとして考えた点である。

5. 解析結果および考察

山はねが起こる理由の一つに引張応力の存在が挙げられるが、摂理といった地山の不均一性を考慮しない場合、土被りが大きくなるほど側方土圧係数がかなり小さくないとトンネル周辺地山に引張応力は生じない。従って、地山が等方均質であると仮定した場合の山はね現象は、壊れやすい岩石のすべり破壊が問題であると考えられる。また、山はねは、脆性でマッシブな岩石ほど著しく、剥離はだいたい側壁に集中して起こり、E.Tschernig など⁹⁾¹⁰⁾の報告から、地殻構造応力が作用しているところに起こることが分かっている。

ここでは、実際に地山の物性値を与えて破壊パラメータおよび山はね発生指数を算出し、考察する。

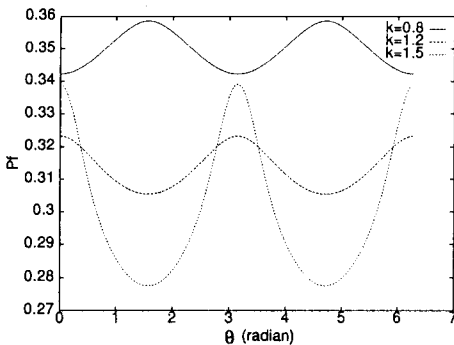


図 6 トンネル周辺部における破壊パラメータ

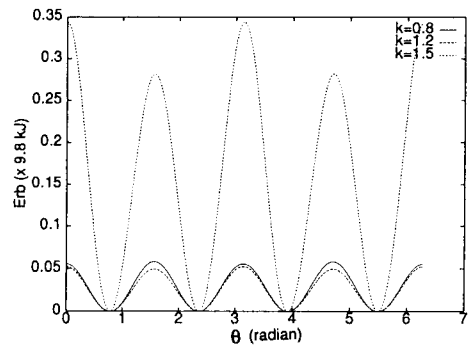


図 7 トンネル周辺部における山はね発生指数

図 6, 7 は、土被り 1500 m、トンネル半径 5 m、ポアソン比 0.3、単位体積重量 2.6 tf/m³、ヤング率 9.8 GPa、一軸引張強度 4.9 MPa、脆性度 10 で側方土圧係数を 0.8, 1.2, 1.5 とした場合のトンネル周辺部における破壊パラメータおよび山はね発生指数を表したものである。

図 6 から、側方土圧係数が大きくなるにつれて、破壊パラメータの最大値はトンネル上端および下端部分から側壁部分へ移行し、最小値はトンネル側壁部分から上端および下端部分へ移行するのが分かる。また、側方土圧係数が 1 から遠ざかるにつれて破壊パラメータの最大値と最小値の差が開くことが分かる。従って、側方土圧係数が大きいほど、トンネル側壁部分の破壊機構が脆性破壊に近づくことやトンネル上端および下端部分の破壊機構が延性破壊に近づくことが分かる。さらには、解析により、脆性度を大きくしたり、土被りを小さくすると、トンネル周辺部における破壊パラメータの値が全体的に大きくなることが分かった。

図 7 から、山はね発生指数の値が最も大きいのはトンネル側壁部分であり、次に大きいのは上端および下端部分、最も小さいのはトンネル水平位置より上方および下方斜め 45 度の部分であるのが分かる。また、側方土圧係数が大きくなるにつれて山はね発生指数の最大値と最小値の差が開くことが分かる。従って、側方土圧係数が大きいほど、トンネル側壁部分に山はねが起こりやすいことが分かる。さらには、解析により、脆性度を大きくしたり、土被りを大きくすると、トンネル周辺部における山はね発生指数の値が全体的に大きくなることが分かった。

塑性領域との関係を考えて図 3 より明らかなように、塑性領域が卓越するところでは山はね発生指数の値は小さく、むしろそうでないところで山はね発生指数の値が大きくなることが分かる。

図 8 は、山はねがひずみエネルギーを多く蓄えているからこそ起こるといった従来の考え方の下で解析

した結果で、地山物性値として土被り 1500 m, トンネル半径 5 m, ポアソン比 0.3, 単位体積重量 2.6 tf/m³, ヤング率 9.8 GPa, 一軸引張強度 4.9 MPa, 脆性度 10 で側方土圧係数をそれぞれ 0.8, 1.2, 1.5 とした。エネルギー量の相違こそあれ図 7 と比較して分かるように、従来から考えられてきた山はね現象の力学的メカニズムの解釈としてのひずみエネルギー論は、実際の現象が地質構造応力の作用下で、側壁部に起こるといったことを満足しないものとする。

従って、本研究で用いた山はね発生指数は山はね現象解明の手段として有効であると考える。

6. 結論

本研究では、脆性度が異なる降伏条件の違いにより、地山にトンネルを掘削した際の塑性領域がどのように変わるのかを示し、また塑性領域内部における破壊機構が脆性破壊であるのか、それとも延性破壊であるのかを確率で示した。さらには、山はね現象についてもエネルギーを用いて考察した。

本研究で得られた結論は以下の通りである。

1. 脆性度や一軸引張強度が大きくなるにつれて、塑性領域は小さくなる。
2. 破壊パラメータは、トンネル掘削時の地山の破壊機構を大まかではあるが評価することができる。
3. 山はね発生指数は、山はね現象を解明する有効な手段である。
4. 従来から考えられてきたひずみエネルギー論のみでは山はね現象を捉えることはできない。
5. 塑性領域の卓越した部分と山はねの起こる部分とは一致しない。

参考文献

- 1) Griffith, A.A. : The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, Phil. Trans. R. Soc., Ser., A221, pp.163-198, 1920.
- 2) Griffith, A.A. : The Theory of Rupture, Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech., pp.55-63, 1924.
- 3) Drucker, D.C. and Prager, W. : Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, Quart. Appl. Meth., Vol.10, pp.157-165, 1952.
- 4) Jaeger, J.C. : Elastic, Fracture and Flow with Engineering and Geological Application, John Wiley & Sons INC., 1956.
- 5) 西岡隆・松本嘉司 : 形状弾性ひずみエネルギーによるトンネル周辺地山の安定解析, 土木学会論文集, 第 394 号, pp.105~114, 1988.6.
- 6) 日本材料学会 : 岩の力学 ~基礎から応用まで~, 丸善, 1993.
- 7) Nayak, G.C. and Zienkiewicz, O.C. : Convenient Form of Stress Invariants for Plasticity, Proc. ASCE. S.T. Div., Vol.98, No. ST4, pp.949-954, 1972.
- 8) Timoshenko, S. and Goodier, J. N. : Theory of Elasticity, McGraw Hill, 1933. ほか
- 9) Hermann Kastner (金原弘 訳) : トンネルの力学, 森北出版, 1974.
- 10) Tschernig, E. : Neuere Beobachtungen über Gebirgsdruckscheinungen im alpinen Blei-Zinkrezbau. Internationale Gebirgsdrucktagung Leoben 1950, Wien : Urban 1950.

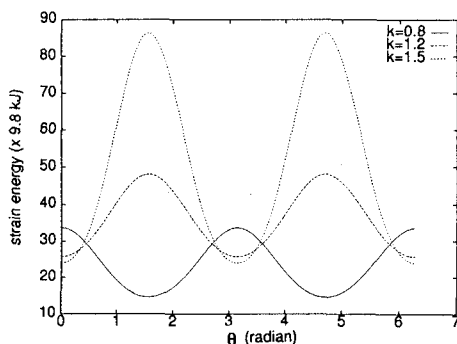


図 8 トンネル周辺部におけるひずみエネルギー