

砂地盤における落し戸実験解析への個別要素法の適用性について

APPLICABILITY OF THE DISTINCT ELEMENT METHOD TO INVESTIGATION BY THE TRAP DOOR TEST USING SANDY SOIL

梶山 孝司*・松井 幹雄**・渡辺 勉***・清水 英治****

Takashi SUGIYAMA, Mikio MATUI, Tsutomu WATANABE and Eiji SHIMIZU

The Distinct Element Method (DEM) proposed by Candall (1971) has been attracting attention from engineers, because of its effectiveness in the study on the deformation of granular substances such as sand. One of the merits of this analytical technique is its capability to offer useful data which are difficult to obtain through experiments. Displacement of each particle and reaction due to contact between particles are example of such data. The authors et al. have been investigating arch action by means of the trap door test using sandy soil. If the method is proved to be a powerful analytical strategy, the microscopic behavior of soil particles forming an arch can be revealed with a satisfactory accuracy.

This paper discusses the applicability of the DEM, comparing experimental and analytical results.

Keywaord : trap door, DEM, loosening pressure, arch action, model test

1. はじめに

地下空間の建設技術としてトンネル工法は長い歴史を有し、都市トンネルにおいては密閉型のシールド工法が主流となり、大断面トンネルの施工も可能となってきている。また、施工法の発達および経済的な問題により都市においても NATM 工法が採用されるケースも増加している。トンネルなどの地下空間を掘削する際に、適度な地山変位を許せば覆工や支保工の規模を最適にできることが経験的に知られている。そして、安全で経済的な支保構造の設計を考えると、構造物に作用する土圧と地山変位との関係を表す地山特性曲線 (Fenner-Pacher Curve) が必要であると言われている。著者らは、この地山特性曲線のよく知られている事例として砂地盤における落し戸実験により基礎的な研究を行っている。これまでに落し戸実験は数多く実施され(例えば、小野¹⁾、村山²⁾)、微小の降下量で落し戸に作用する荷重は最小値になる。これは、土粒子の移動とともに応力の再配分が起こり地山にアーチ作用が生じるためであると言われている。

一方、Candall(1971)の提案した個別要素法 (Distinct Element Method 以下 DEM と略す)³⁾ は、砂のような粒状体の変形問題の解析法として有効であることがわかってきている。DEM の利点は、個々の粒子における変位量や粒子間接触抗力などの実験では測定困難な情報を得られることである。DEM が落し戸実験の解析法として適用できるのなら、落し戸の微小降下時の土粒子の変位量や応力再配分によるアーチ作用の発生機構などの微視的な挙動が解明できるのではないかと考えられる。

この論文は、砂地盤による落し戸実験の DEM 解析について、落し戸降下量～作用荷重の関係(すなわち、地山特性曲線)を比較し、DEM の適用性について考察を行ったものである。

* 学生会員 千葉工業大学大学院

** 正会員 前田建設工業(株)情報システム部

*** 正会員 工博 千葉工業大学助教授 土木工学科 **** 正会員 工博 千葉工業大学教授 土木工学科

2. 落し戸実験の概要

2・1 実験装置および実験方法

図-1に実験装置の概略を示す。寸法は、幅1.5m、高さ1.1m、奥行き0.3mの土槽で、落し戸幅(B)は30.4cmである。前面に透明アクリル板($t=20\text{mm}$)、その他の面は鉄板($t=6\text{mm}$)を使用し、補強材で補強し剛な構造となっている。落し戸は、スクリージャッキにより降下し、落し戸下部中心にロードセル(容量500kgf 定格出力 4000×10^{-6} ひずみ)を設置し降下時の落し戸作用荷重を測定する。また、図-2のように、落し戸上とその外側に土圧計を設置し、落し戸降下時の局所的な土圧の変化を測定する。土圧計の容量は、①と⑦が 0.5kgf/cm^2 、②～⑥が 0.2kgf/cm^2 で、定格出力は全て 10000×10^{-6} ひずみである。

試料は気乾状態の豊浦標準砂($w = 0.1 \sim 0.2\%$)を使用する。図-3に実験で使用した豊浦標準砂の粒径加積曲線を示す。粒径加積曲線は、ふるい分け試験を3回行い図中にプロットし、滑らかな曲線となるように描いた。地盤の作製方法は自由落下法によりふるいからの落下高($h=50 \sim 52\text{cm}$)を一定に保ちながら試料を詰める。ふるいは $840\mu\text{m}$ を使用し2段構造になっている。試料の単位体積重量は $1.59 \sim 1.61\text{gf/cm}^3$ となり密な状態である。地盤作製後、落し戸を一定の速度 $V(0.1\text{ cm/min})$ で降下させ、所定の降下量になったら各測定値をデータレコーダに出力する。

2・2 実験結果

(a) 落し戸実験結果

実験は、落し戸幅 $B=30.4\text{cm}$ 、土被り高さ $H=30.0\text{cm}$ (土被り比 $H/B=1$)の条件で3回実施した。図-4(a),(b)は、落し戸降下時の土圧計の測定結果例である。横軸に落し戸降下量、縦軸に初期土圧に対する比をとってある。初期土圧は落し戸を降下する直前の実測値である。図-4(a)より、落し戸上の局所的な土圧

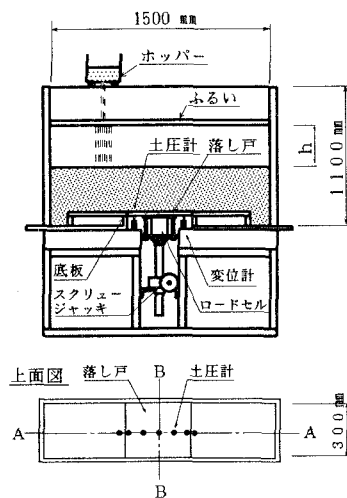


図-1 落し戸実験装置概略

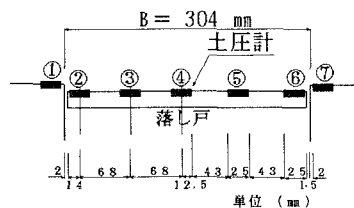


図-2 土圧計配置図

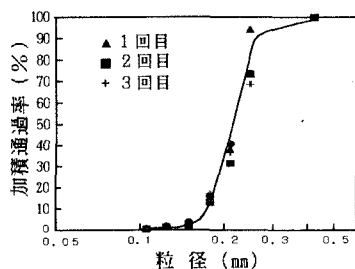


図-3 豊浦砂の粒径加積曲線

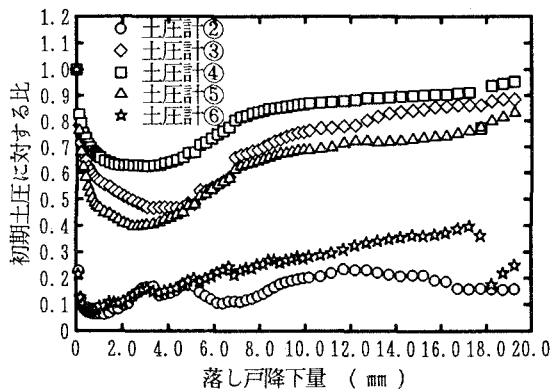


図-4 (a) 落し戸実験結果 (土圧計②～⑥)

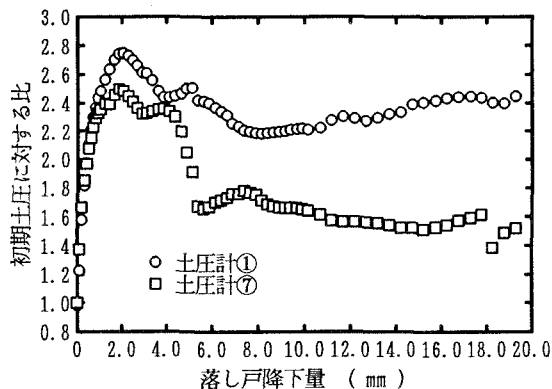


図-4 (b) 落し戸実験結果 (土圧計①, ⑦)

は、中心にある土圧計④が最も大きく、土圧計③、⑤、土圧計②、⑥の順に小さくなっている。すなわち、落し戸上の土圧分布は中心から端部に向かって減少している。特に、端部（土圧計②、⑥）は低下が著しく、最小値における落し戸降下量は他の箇所の土圧計（③、④、⑤）と比べて小さい。落し戸降下による作用荷重の減少は地盤のアーチ作用によるものだといわれ、このアーチ作用により落し戸上の土圧分布はアーチ状になることがわかる。図-4(b)より、落し戸外側の土圧（土圧計①、⑦）は落し戸降下とともに急激に増加している。これは、アーチ作用によるアーチ反力によるものと、落し戸端部において、落し戸側の土粒子と外側の土粒子との相対変位が大きいために、土圧計①および⑦の箇所に局部的に応力が集中していると考えられる。

図-5は、落し戸降下量～落し戸作用荷重比の関係を示したもので、横軸に落し戸降下量（S）、縦軸に初期荷重に対する落し戸作用荷重の比をとってある。図中には、同条件で3回（実験A、BおよびC）行った実験結果をそれぞれ、ロードセルにより測定したものと、土圧計より算出したものをとってある。土圧計から算出した落し戸作用荷重は、土圧計間の土圧分布の勾配は一定と仮定し、各区分についての作用荷重を計算し、その合計の値である。両者を比較すると、ロードセルの方が小さく、特に落し戸降下量 $S=8\text{mm}$ 付近までは両者の差が大きくなっている。また、ロードセルの各測定値には、ばらつきがみられる。これらは、土槽前面および後面の壁面摩擦の影響であると考えられる。

(b) 壁面摩擦の影響

壁面摩擦の影響をみるため、図-6に示すように土槽奥行き方向（B-B断面 図-1参照）に土圧計を配置し落し戸実験を実施した。実験条件は、2・1、2・2節と同等である。図-7は、この時の実験結果を示したもので、横軸に落し戸降下量、縦軸に初期値に対する比をとってある。図-7において、土圧計B、CおよびDの差はほとんどみられず、もちろん、これらの値は図-4(a)の土圧計④の測定値とほぼ等しい。壁面に最も近い土圧計A、Eは、土圧計B、CおよびDに対して土圧はかなり減少しており壁面摩擦の影響が顕著に現れている。また、土圧計A、Eは最小値を得た以後の増加率は大きくなり、落し戸の降下とともに壁面摩擦抵抗は減少し、落し戸降下量 $S=12\text{mm}$ 付近で、土圧計B、CおよびDに接近している。図-5において、 $S=8\text{mm}$ 以後で、ロードセルと土圧計より求めた落し戸作用荷重が接近しているのも、この壁面摩擦の性質によるものであると考えられる。

図-7において、もし、土圧計B、Dが土圧計Cの測定値より小さければ、壁面摩擦は、土圧計B～D間まで影響していると考えられる。しかし、土圧計B、CおよびDの測定値は、ほぼ等しいことより、壁面摩擦の影響は、土圧計B～D間の領域において、無視できると考えられる。すなわち、図-5に示す

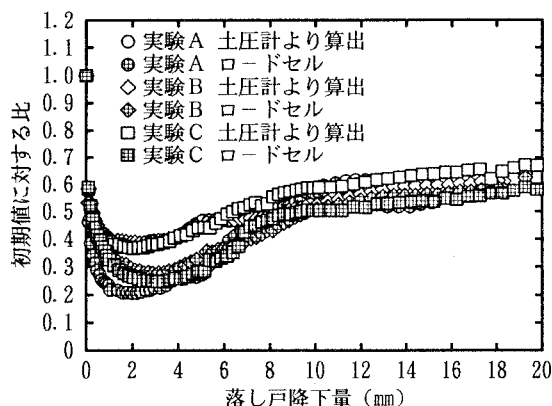


図-5 落し戸降下量～作用荷重比の関係

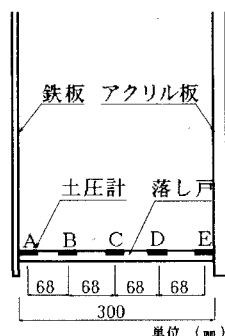


図-6 B-B断面

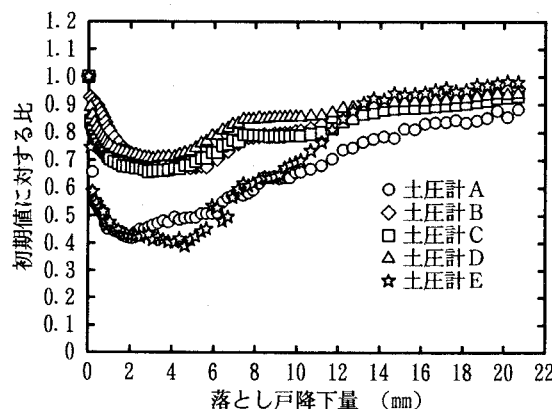


図-7 落し戸実験結果（B-B断面）

A-A断面上（図-1参照）に配置した土圧計より求めた落し戸作用荷重は、壁面摩擦の影響を無視できると考えられ、以後、落し戸作用荷重は土圧計より算出した値を用いる。

3. 個別要素法（DEM）による解析方法

3. 1 個別要素法の概要

Candall(1971)の提案した個別要素法（DEM）は、1つ1つの多角形剛体要素の運動方程式を微小時間ごとに時間差分近似によって陽的に解いて行く解析法である。1解析ステップ中の要素の移動は、拘束のない加速度運動であり、1要素に作用する力は外力と重力と接触抗力の合力で与えられる。接触抗力は、各ステップごとに隣接する要素において接触判定を行い、接触している場合のみ要素に作用する抗力として合力に加えられる。接触モデルは、図-8に示すように、要素間の法線方向および接線方向にフォークト型のばねとダッシュポットでモデル化し、接触抗力は接触モデルに生じる要素間の相対変位と相対変位速度で決定される。要素間のすべりについてはクーロンの摩擦則に従う。

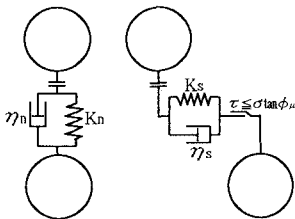


図-8 要素間接触モデル

DEM は、微小時間ごとに各要素の変位を計算し、所定の変位量になるまで繰り返し計算を行う。そのため、演算時間も長時間を要し、これがDEMの問題点の1つとなっている。本章では、落し戸実験をDEM解析するにあたり、演算時間を短く、かつ解析結果の精度を損なわないためには、材料定数、解析条件をいかに設定すればよいか検討を行う。

3. 2 解析モデル

2次元DEM解析による要素形状は、多角形、円形、楕円形がある。本解析においては、円要素を用いる。円要素を用いることにより、要素の接触判定に関する計算量を大幅に減らすことができ演算時間も短縮できる。図-9に落し戸実験の解析モデルを示す。落し戸幅（B）を30cmとし、土盛り高（H）は実験値と比較するため30cmに近い値になるように設定する。実験に使用している土槽寸法は、幅150cmであるが、モデルでは円要素数を減らすため幅110cmとした。土槽底板は線要素①、②、⑫、⑬で落し戸は線要素③～⑪とし、線要素③～⑪を同時に降下させることにより落し戸実験をモデル化する。落し戸の線要素の細分化は実験の土圧計（図-2参照）と比較するためであり、それぞれ線要素②、③、⑤、⑦、⑨、⑪、⑫と土圧計①、②、③、④、⑤、⑥、⑦が対応している。

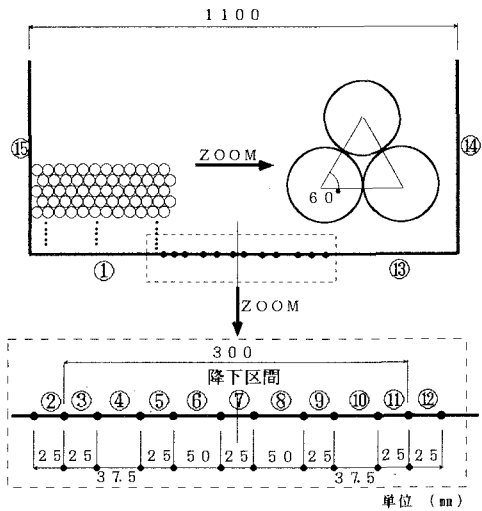


図-9 落し戸実験解析モデル

また、線要素③～⑪に作用する荷重の合計が落し戸作用荷重となる。円要素の配列は、図-9に示すような円要素間の接触角を60°とし規則的に配置したもの（以下、規則配列と呼ぶ）と、円要素半径を変え配列は不規則なもの（以下、ランダム配列と呼ぶ）、の2種で行う。最初に、円要素を配置し無載荷状態でパッキングを行い、全ての円要素が安定状態になるのを確認してから落し戸（線要素③～⑪）を同時に降下させる。

3. 3 材料定数について

DEM解析の材料定数は、粒子間の法線および接線方向にフォークト型モデルを挿入しているため、法線および接線方向のばね定数 K_n および K_s と粘性定数 γ_n および γ_s である。また、要素間の接線方向のすべりをクーロンの摩擦則を適用しているため粒子間摩擦角 ϕ_μ も必要である。材料定数は本来実験から求めるべ

きであるが、個々の粒子におけるばね定数や粘性定数を求めることは容易なことではない。アルミ棒などの積層体を用いての要素試験の実験結果と解析結果との比較により、これら材料定数の求め方について研究が行われてはいるが、材料定数の決定法については確立されていない。

ばね定数 K_n の決定法として、弾性円柱の接触理論解⁴⁾を用いることが多いが、その理論解から求めた K_n より小さい値を用いた解析結果の方が実験結果の再現性に優れている⁵⁾との報告もある。一方、運動方程式を差分近似する際に解の収束性と安定性を得るために、時間増分 (Δt) の推定法の目安として(1)式が提案⁴⁾されている。

$$\Delta t < \sqrt{2m/K_n} \quad \text{----- (1)}$$

ここで Δt : 時間増分 m : 要素質量 K_n : 法線方向ばね定数

(1)式より、ばね定数が大きいほど解の安定のために時間増分を小さくしなければならず、そのために解析ステップ数も増加し演算時間も増加してしまう。既往の研究によると、 K_n の範囲は $10^5 \sim 10^8$ (N/m) のオーダーであり、演算時間を考慮するならば、 K_n は小さい値を用いるべきである。規則配列、円要素半径 $R = 1.0$ cm、要素質量 $m = 5.6 \times 10^{-1}$ (kg)、 $K_n = 9.8 \times 10^5$ (N/m)、 $\Delta t = 10^{-4}$ (sec) として解析を実行したところ、パッキング状態より安定せず、解析結果も良好なデータは得られなかった。そこで、同条件で $K_n = 9.8 \times 10^6$ (N/m)、 $\Delta t = 10^{-5}$ (sec) として実行したところ解の安定性はよく、解析結果も得られたので $K_n = 9.8 \times 10^6$ (N/m) とした。ばね定数比 $S (=K_s/K_n)$ や粒子間摩擦角 ϕ_μ の変化がせん断強度 (内部摩擦角 ϕ) に与える影響は小さい⁷⁾とされ、また、 K_n は木山ら⁴⁾の用いたばね定数とほぼ等しいことから、木山らにならない $S = 0.25$ 、 $\phi_\mu = 30^\circ$ と設定した。この K_n より時間増分を(1)式より求めると 3.38×10^{-4} (sec) となるが、以後の解析において種々の条件下で行うため、余裕を見て $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ (sec) とした。

粘性定数の決定に際しては、基礎となる運動方程式が減衰振動を表し、最も減衰が速いのは(2)式の時であるとされている⁶⁾。また、粘性定数はその値を変化させても解析結果にほとんど影響せず、媒質の粘性よりも解の安定に効果があるとの研究成果⁸⁾より、(2)式により η_n を決定するのが解析する上で有利だと考えられる。また、 η_s は木山らにならない(3)式より求めた。

$$\eta_n = \sqrt{2m \cdot K_n} \quad \text{----- (2)}$$

$$\eta_s = \eta_n \sqrt{S} \quad \text{----- (3)}$$

表-1に、規則配列、円要素半径 $R = 1.0$ cm における材料定数をまとめて示す。要素密度 ρ は、解析における円要素の集合体の単位体積重量と実験におけるそれが、等しくなるように設定した。

3. 4 落し戸降下速度の影響

DEM は運動方程式を微小時間刻み (Δt) で差分近似したものであり、落し戸 (線要素③~⑩) を所定の降下量にするまでの所要ステップ数は、落し戸降下速度 (V) により決定される。解析で落し戸降下速度を大きくとれるのなら演算時間を短縮できる。図-10は、規則配列、円要素半径 $R = 1.0$ cm における落し戸降下速度の比較である。横軸に落し戸降下量、縦軸は初期値に対する比である。 $V =$

表-1 解析に用いた材料定数 (円要素半径 $R = 1.0$ cm)

	円要素-円要素	円要素-線要素
ばね定数 K_n (N/m)	0.98×10^7	1.96×10^7
ばね定数 K_s (N/m)	2.45×10^6	4.90×10^6
粘性係数 η_n (N·S/m)	3.30×10^3	6.60×10^3
粘性係数 η_s (N·S/m)	1.65×10^3	3.30×10^3
摩擦係数 $\tan \phi$	0.57735	0.26795
密度 ρ (g/cm ³)	1.7676	
時間増分 Δt (sec)	1.0×10^{-5}	

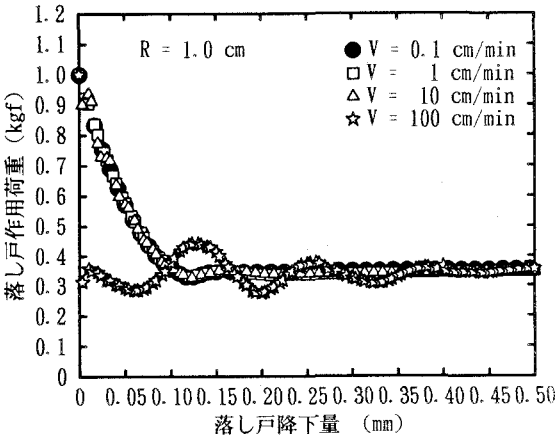


図-10 落し戸降下速度による比較 (DEM)

0.1、1.0 および10(cm/min)の曲線の軌跡はほとんど一致しているが、 $V = 100(\text{cm/min})$ は、落し戸降下開始直後に落し戸作用荷重は急激に減少し、増加減少を繰り返しながら一定の値に収束している。実験の落し戸降下速度は0.1(cm/min)であるが、解析において $V = 10(\text{cm/min})$ としても、落し戸降下量が小さいうちは変動しているがこの降下速度以下であれば降下速度の影響は無視できると考えられる。

3. 5 円要素半径 (R) による影響

DEM では、各ステップで個々の要素の接触判定、接触抗力を計算し、所定の時間になるまで繰り返し計算を行う。たとえば、落し戸降下速度 $V = 10(\text{cm/min})$ 、時間増分 $\Delta t = 10^{-5}(\text{sec})$ とした場合、落し戸降下量 $S = 0.5\text{mm}$ 時までの所要ステップ数は30000回となる。そのため、円要素半径を小さくし要素数を多くすれば、1ステップ当たりの計算回数が増加し、演算時間も増加する。また、コンピューターのメモリーの容量により要素数は制限されてしまうため、実際の土粒子の大きさにすることは物理的、時間的に不可能である。図-11は、規則配列における円要素半径(R)による比較である。図-11より、円要素半径(R)が小さくなるに従い曲線の軌跡が収束していくのがわかる。落し戸幅 $B = 30\text{cm}$ に対して $R = 1.0\text{cm}$ 以下であれば円要素半径の影響は無視できると考えられる。

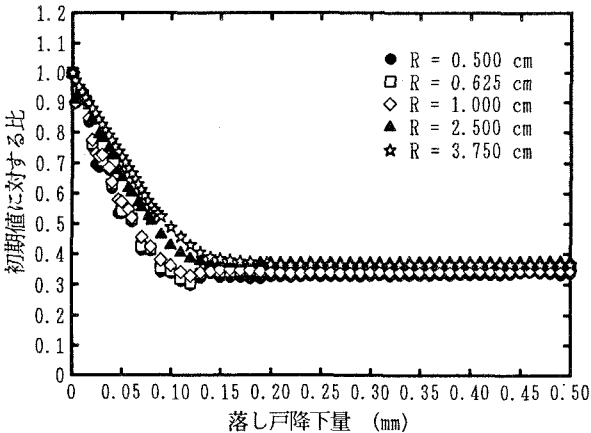


図-11 円要素半径による比較 (DEM)

4. 解析結果と考察

4. 1 規則配列の解析結果と実験値の比較

図-12(a), (b)に規則配列、円要素半径 $R = 1.0\text{cm}$ の解析結果を示す。落し戸(線要素③~⑪)降下速度 $V = 10(\text{cm/min})$ とし、材料定数は表-1の値を用いた。図中の落し戸作用荷重は線要素③~⑪に作用する荷重を合計したものである。規則配列のため、線要素②と⑫、③と⑪、⑤と⑨は等しく線要素⑨、⑪、⑫は省略する。解析結果は落し戸の中心である線要素⑦が最も大きく、落し戸の端部に向かって線要素⑤、線要素③の順に小さくなり、落し戸外側の線要素②は急激に増加し、図-4(a), (b)、図-5の実験値と同様な傾向を示している。

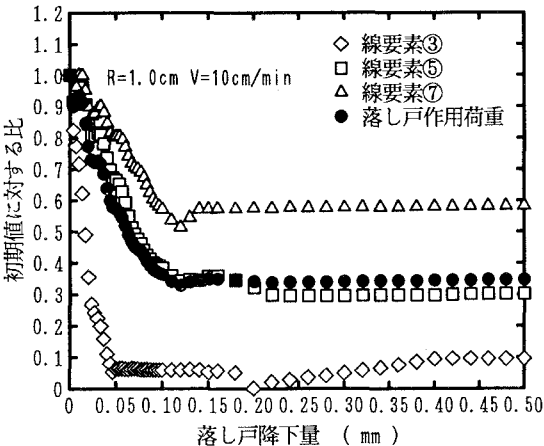


図-12 (a) DEM解析結果 (規則配列)

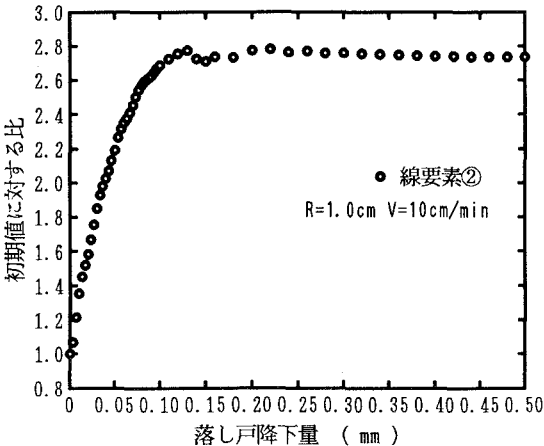


図-12 (b) DEM解析結果 (規則配列)

実験値と比較して以下の点が異なっている。

1)実験値は滑らかな曲線に対し、DEM は直線的に変化する。

2)最小値となる落し戸降下量を比較すると、実験では1~3mmであるのに対し、DEM は0.05~0.12mmとかなり小さい。

3)最小値以降の落し戸作用荷重は、実験では緩やかに増加するのに対し、DEM では一定である。

これら1), 2) についての実験値との差異は、DEM における地盤のモデルを等粒径で規則的な配列によりモデル化したためであると考えられる。すなわち、円要素間初期状態において最も安定した接触状態になっており、落し戸の微小の降下で配列を変えることなく、かつ沈下部とその外側の要素同士の接触抗力と応力の再配分より、瞬時にアーチ作用が発揮されるのではないかと考えられる。それに対して、実験における砂地盤は、落し戸の降下とともに土粒子は安定する方向へ順次移動していき、その移動にともなって応力の再配分がおこり、アーチが徐々に形成されていくのではないと思われる。3)については、DEM において要素の配列が変化する程度まで落し戸を降下させれば、実験と同様に落し戸作用荷重は増加すると考えられる。

4. 2 ランダム配列の解析結果と実験値の比較

前節では、規則配列の解析結果と実験結果を比較し、定性的には実験値と同様な傾向ではあったが、量的には問題があった。本節では、ランダム配列によるDEM 解析結果と実験値を比較する。要素半径による影響をみるため、平均要素半径 $\bar{R}=0.5\text{cm}$ と $\bar{R}=1.0\text{cm}$ の2種で行った。円要素半径の配合は、図-3の豊浦砂の粒径加積曲線を粒径のみ約50倍($\bar{R}=0.5\text{cm}$ $R=0.263\sim1.063\text{cm}$)および約100倍($\bar{R}=1.0\text{cm}$ $R=0.525\sim2.125\text{cm}$)に平行移動したもので、円要素半径の変動係数は0.22である。パッキング方法は、乱数により円要素を空中に発生させ、自由落下によりモデル地盤を作製する。なお、 $\bar{R}=0.5\text{cm}$ の時間増分(Δt)は、 $0.5\times10^{-5}(\text{sec})$ で解析を行った。図-13に、解析結果と実験結果の落し戸降下量~作用荷重比の関係を示す。実験結果の落し戸作用荷重は土圧計より算出したものである。図-13より、 $\bar{R}=0.5\text{cm}$ と $\bar{R}=1.0\text{cm}$ を比較すると平均円要素半径による差異がみられ、 $\bar{R}=1.0\text{cm}$ は落し戸降下量 $S=3\text{mm}$ までは実験値に近いが、平均半径の小さい $\bar{R}=0.5\text{cm}$ の方が解析結果に信頼性があると思われる。本解析のような、線要素の作用力を求める場合、線要素に対する要素の大きさを適切に設定しないと解析結果の精度は落ちてしまう。特に、ランダム配列は要素の大きさによる解析結果の影響は大きい。また、平均粒径だけでなく最大粒径も考慮する必要があると考えられる。 $\bar{R}=0.5\text{cm}$ と実験値を比較すると、落し戸作用荷重は最小値で約10%異なるが初期勾配や曲線の軌跡は、かなり実験値に近い。アルミ棒などの実験材料に対してDEMの適用性は認められているが、砂地盤の解析として要素半径、要素配列および材料定数を適切に設定できれば、DEMは有効な解析法となりうる。

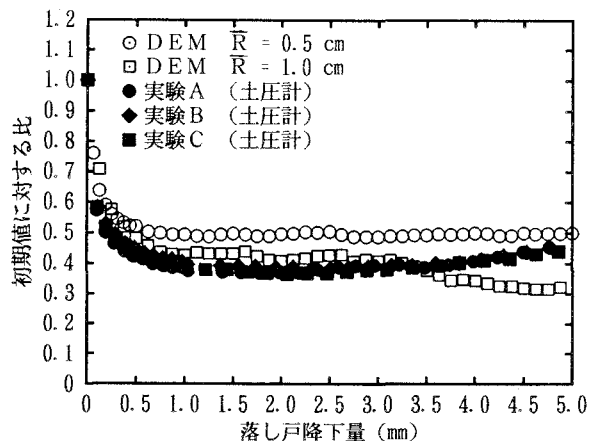


図-13 ランダム配列 (DEM) と実験値の比較

5. まとめ

DEMにより、落し戸実験の解析を行い、以下の知見が得られたので要約する。

a)DEMにより、落し戸降下速度を変化させ降下速度による影響を比較した結果、降下速度を10cm/minまで大きくしても解析結果に影響を及ぼさない。実験では、降下速度は0.1cm/minであるが、10cm/minまで大きくできることにより、演算時間を1/100短縮できるので、そのメリットは大きい。

- b)規則配列では、落し戸幅30cmに対して円要素半径が1.0cm以下であれば、要素の大きさが落し戸降下量～作用荷重曲線に及ぼす影響は小さい。しかし、ランダム配列では、 $R=0.5\text{cm}$ と $R=1.0\text{cm}$ の落し戸降下量～作用荷重曲線を比較した結果、両者に差異が生じた。ランダム配列において、変位－荷重関係を求める場合、円要素の大きさにより解析結果が異なるので注意が必要である。
- c)DEMにより、落し戸実験を解析し、定性的には実験と同様な結果を示した。特に、落し戸上の局所的な土圧は、実験と同様な傾向を示し、DEMにおいてもアーチ作用が生じていると考えられる。
- d)規則配列とランダム配列の落し戸降下量～作用荷重曲線を比較すると、実験値の曲線形状に近いのは、ランダム配列の方であった。このことより、砂地盤を解析する時はランダム配列の方が、より地盤の挙動に近いと考えられる。

6. おわりに

砂地盤における落し戸実験解析へのDEMの適用性について考察した。そして、DEMは、実際の地盤の挙動をよく再現していると考えられる。今回は落し戸降下量－作用荷重曲線の比較により検討を行ったが、さらに粒子の移動量、粒子間接触力などの微視的な挙動についての検討も必要であると考えている。また、DEMの適用性は認められたものの、円要素の大きさ、材料定数などの適切な選択が必要で、これらの問題点について今後も研究を進めていきたい。

7. 謝辞

本研究を行うにあたり東京都立大学工学部土木工学科 西村和夫博士より多くの御示唆、御指導をいただきました。心より感謝致します。

8. 参考文献

- 1)小野諒兄、眞井耕像：乾燥砂の於ける垂直土圧，土木学会誌24巻5号 1938 pp. 437～495
- 2)村山朔郎、松岡 元：砂質土中のトンネル土圧に関する基礎的研究，土木学会論文報告集第187号 1971年3月 pp. 95～108
- 3)Cundall,P.A.(1971)： *A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock system. Proc. symp. int. Soc. Rock Mech., Nancy, vol.2, pp. 129～136*
- 4)木山英郎、藤村 尚：カンドルの離散剛要素法を用いた岩盤粒状体の重力流動の解析、土木学会論文報告集 pp. 137～146 第333号 1983年5月
- 5)中瀬 仁、栗田哲史ら：個別要素法による2軸圧縮試験に対するシミュレーション，第27回土質学会研究発表会 pp. 585～588 平成4年6月
- 6)Cundall,P.A.： *Rational Design of Tunnel Supports—A Computer Model for Rock Mass Behavior using Interactive Graphics for the Input and Output of Geometrical Data, Technical Report MRD-2-74, Missouri River Division, U.S. Army Corps of Engineers, 1974*
- 7)木山英郎、藤村 尚、西村 強：せん断モデルを用いた離散剛要素の材料定数の検討，土木学会論文集第382号ノⅢ-7 1987年6月
- 8)岩下和義：DEMによる粒状体のせん断に関する研究，第27回土質工学研究発表回 pp. 577～578 平成4年6月