

面外せん断荷重下での覆工を有する 楕円形トンネル問題の解析

ANALYSIS OF ELLIPTICAL LINING TUNNEL UNDER OUT-OF-PLANE SHEAR LOADS

木村清和*1・平島健一*2・木口昌彦*3・広瀬幸雄*4

Kiyokazu KIMURA, Ken-ichi HIRASHIMA, Masahiko KIGUCHI and Yukio HIROSE

This paper presents an analysis of two-dimensional elastic medium containing an elliptical tunnel with elastic lining under the uniform stresses, τ_{xz}^∞ and τ_{yz}^∞ at infinity. This analysis is based on the complex variable method using a conformal mapping technique, and contains new sliding boundary conditions. Using this solution, we consider the effect of thickness on distributions of stress and displacement.

Keyword: Out-of-Plane, Longitudinal, Shear Load, Lining Tunnel, Complex Function, Elasticity

1. 緒 言

トンネル解析において、これまで最もよく用いられてきた幾何形状は等方性弾性体内に楕円形の空孔が存在するとしたものであるが、最近のトンネルはロックボルトによる補強やコンクリートによる覆工を有し、岩盤とその覆工との接触部分が必ずしも完全接合とはならず、ある種のすべりが生じる場合が想定される。また、トンネルに作用する外荷重は一般に3次元状態であるが、これを2次元弾性論を用いて解析を行うにはトンネル軸に垂直な、いわゆる面内荷重($\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)および面外せん断荷重(τ_{xz}, τ_{yz})に区分することが可能である。ここに、面外せん断問題における変位は面外方向成分のみが生じ、着目平面内の場所の関数である。つまり σ_z は生じない。ここでは、後者の面外荷重問題の場合を対象とする。そこで、まず岩盤中に楕円形トンネルを開削し、その内側に共焦点の楕円形の覆工が施された弾性地山問題の解析を複素応力関数を用いて行い、覆工と岩盤との境界条件にある種のすべりを考慮し、さらに覆工の内壁面の条件も自由または剛体の両条件が適用できるように理論構成を行う。次にこの解を用いて数値計算を行い、覆工や岩盤の応力、変位状態に及ぼす覆工厚さの影響等について考察する。

2. 基礎方程式と基本解

2.1 応力および変位を求める公式

図1に示すように、奥行き方向に断面形状の変化のない十分長いトンネルを想定し、岩盤と覆工との楕円形境界を L_1 、その内部の共焦点楕円形境界を L_2 とし、岩盤および覆工の弾性係数をそれぞれ E_1 および E_2 と

*1 学生員	金沢大学大学院 自然科学研究科
*2 正 員 工博	山梨大学教授 工学部土木環境工学科
*3 学生員	山梨大学大学院 工学研究科
*4 正 員 工博	金沢大学教授 自然科学研究科

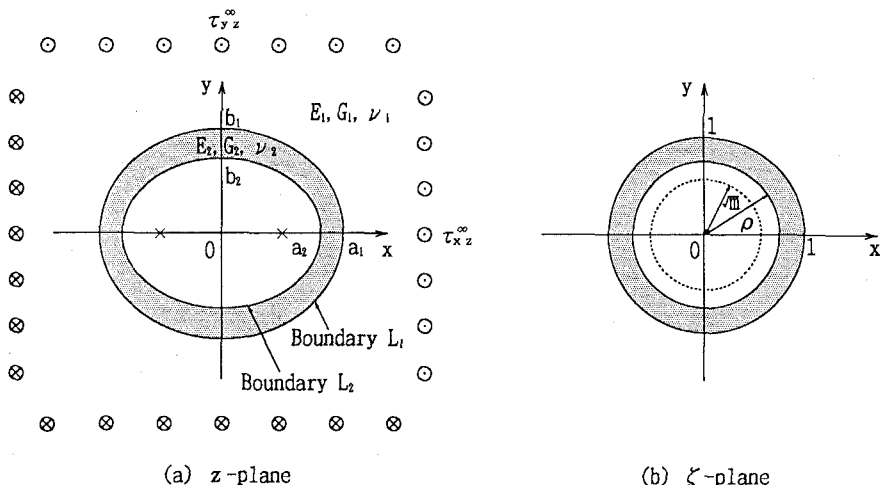


図1 共焦点楕円境界 L_1, L_2 を有する場合の物理平面と写像平面

する。この場合、一般に面外せん断荷重下での応力、変位成分は xy 平面に垂直な方向の座標を z として、せん断応力 τ_{xz}, τ_{yz} 、変位 u_z であり、いずれも面内座標系 (x, y) の関数となる。

物体力を無視した釣合方程式および構成式は次式のように与えられる。

$$\frac{\partial \tau_{xz}^k}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^k}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

$$\tau_{xz}^k = G_k \frac{\partial u_z^k}{\partial x}, \quad \tau_{yz}^k = G_k \frac{\partial u_z^k}{\partial y}. \quad (2)$$

ここに $G_k (k=1, 2)$ は $k=1$ のとき岩盤および $k=2$ のとき覆工のせん断弾性係数であり、弾性係数 E_k 、ポアソン比 ν_k を用いれば、次式のように表される。

$$G_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}, \quad (\kappa=1, 2). \quad (3)$$

ここで、図1に示す複素平面を $z = x + iy$ で表し、この z -平面を ζ -平面に写像する関数を $\omega(\zeta)$ とすれば、次式が成立する。

$$z = \omega(\zeta) = R_0(\zeta + m/\zeta). \quad (4)$$

ここに、

$$R_0 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad m = \frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1}. \quad (5)$$

で与えられる。この写像関数を用いることにより図1(b)に示すように境界 L_1 は ζ -平面上では単位円に、また境界 L_2 は半径 $\rho (< 1)$ の円に写像される。ここに、共焦点で焦点間の直線が $\sqrt{m}$ の円に写像されることを考慮すれば、 ρ はその外側に位置することから、次式で与えられる。

$$\rho = \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1}. \quad (6)$$

上記の楕円形境界 L に沿う曲線座標系 (ξ, η) の任意点における面外方向(奥行きの z 方向)の変位 u_z および後述の合せん断力 P_z はともに調和関数でなければならないことから、複素関数 $F_k(z)$ として次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_z^k &= \frac{1}{G_k} \operatorname{Re}[F_k(z)] = \frac{1}{2G_k} \{F_k(z) + \overline{F_k(z)}\}, \\ \tau_{\xi z}^k - i\tau_{\eta z}^k &= (\tau_{xz}^k - i\tau_{yz}^k)e^{i\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここに、

$$e^{i\phi} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega(\zeta)|} \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、図2に示すように領域内の任意の定点 $A(x_0, y_0)$ から動点 $B(x, y)$ に至る任意の経路に沿って右側領域が左側領域に及ぼすせん断力 p_z^k の合力を P_z^k とすれば、次式で与えられる。

$$P_z^k = \int_A^B p_z^k ds = \text{Im}[F_k(z)] = \frac{1}{2i} \{F_k(z) - \overline{F_k(z)}\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

したがって、式(6),(8)より複素関数 $F_k(z)$ は次式で表される。

$$F_k(z) = G_k u_z^k + i P_z^k \quad \dots\dots\dots (10)$$

2.2 各境界における各種境界条件と定式化

各境界における境界条件を合応力を用いて次のように与える。

[境界 L_2] (i.e. $\zeta = \rho^2$) において、

$$\left. \begin{array}{ll} P_z^2 = 0 & \text{自由境界の場合} \\ u_z^2 = 0 & \text{固定境界の場合} \end{array} \right\} \quad (11)$$

[境界 L_1] (i.e. $\zeta = 1$) において、

$$P_z^1 = P_z^2 = C(u_z^1 - u_z^2), \quad \text{すべり境界} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、図1に示すように境界 L_1 は各領域における変位の差に比例してせん断応力が発生する、いわゆる、バネモデルのすべり境界を定義したものの相当する。

ここに、係数 C は、

$$\left. \begin{array}{l} C = \infty \text{ のとき、境界 } L_1 \text{ は完全接合 (Perfect bonding),} \\ C = 0 \text{ のとき、境界 } L_1 \text{ は完全すべり (Perfect sliding).} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

を意味することになる。

上述の境界条件を満足するように以下定式化を行う。本論文では、Sendeky⁽¹⁾らが用いた手法を適用し、覆工領域の基本関数を $f_0(z)$ として解析接続を行う。まず、境界条件を満たす解析接続は、著者らの既発表論文により次式で定義される⁽²⁾。

$$f_r(\zeta) = -K_2 \overline{f_0\left(\frac{\rho^2}{\zeta}\right)} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 K_2 は境界条件により次式で与えられる。

$$K_2 = \begin{cases} -1 & \text{自由境界 (Free boundary),} \\ 1 & \text{固定境界 (Fixed boundary).} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (15)$$

したがって、覆工の領域における基本関数 $f_2(\zeta)$ ($\rho \leq |\zeta| < 1$) は次式で求められる。

$$f_2(\zeta) = f_0(\zeta) + f_r(\zeta) \quad \dots\dots\dots (16)$$

次に、境界 L_1 の境界条件を満足する解析接続について述べる。覆工の領域における解析解を $F_2(\zeta)$ とし、次式で定義する。

$$F_2(\zeta) = \alpha f_2(\zeta), \quad (\rho \leq |\zeta| < 1) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 α は任意の実係数であり、後で決定される。上式より式(5)の P_z^2, u_z^2 を求める。

$$\left. \begin{array}{l} P_z^2|_{|\zeta|=1} = \frac{\alpha}{2i} \left\{ f_2(\zeta) - \overline{f_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right\}, \\ u_z^2|_{|\zeta|=1} = \frac{\alpha}{2G_2} \left\{ f_2(\zeta) + \overline{f_2\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \right\} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

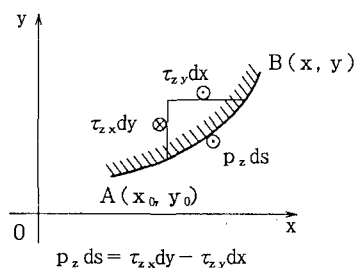


図2 微小要素に働く集中力の増分

次に、岩盤の領域の解析関数を $F_1(\zeta)$ とすると、境界 L_1 上の合応力および変位は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) \big|_{|\zeta|=1} &= G_1 u_z^1 + i P_z^1 = G_1 \left(u_z^2 + \frac{P_z^2}{C} \right) + i P_z^2 \\ &= \frac{\alpha}{2} \left[\left(\frac{G_1}{G_2} + 1 + \frac{G_1}{iC} \right) f_2(\zeta) + \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 - \frac{G_1}{iC} \right) \bar{f}_2(1/\zeta) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここで、式を簡素化するために、 $\frac{\alpha}{2} \left(\frac{G_1}{G_2} + 1 \right) = 1$ と置き、岩盤（地山）と覆工の弾性係数パラメータ $K = \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1}$ を導入すると $\alpha = 1 + K$ が求められる。以上の結果を式(13)に代入し、 $C_0 = G_1/C$ とすると最終的に $F_1(\zeta), F_2(\zeta)$ は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) &= (1 - iC_0)f_2(\zeta) - (K - iC_0)\bar{f}_2(1/\zeta), \\ F_2(\zeta) &= (1 + K)f_2(\zeta). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここに、式(13)より係数 C_0 は境界条件により、次式で与えられる。

$$C_0 = \begin{cases} 0 & \text{のとき 境界 } L_1 : \text{完全接合 (Perfect bonding)}, \\ \infty & \text{のとき 境界 } L_1 : \text{完全すべり (Perfect sliding)}. \end{cases} \dots\dots\dots (21)$$

2.3 定式化

前節の記述に沿って、以下定式化を行うこととする。まず、基本関数 $f_0(\zeta) (\rho \leq |\zeta| < 1)$ を次式で与える。

$$f_0(\zeta) = AR_0 \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right). \dots\dots\dots (22)$$

ここに、係数 A は、作用荷重によって定まる未定係数である。

上式と式(8)を用いて解析接続を実行し、重ね合わせることににより $f_2(\zeta)$ は次式のように求められる。

$$f_2(\zeta) = R_0 \left[\left(A - K_2 \bar{A} \frac{m}{\rho^2} \right) \zeta + \left(Am - K_2 \bar{A} \rho^2 \right) \frac{1}{\zeta} \right]. \dots\dots\dots (23)$$

式(23)を式(14)に代入することにより各領域の解析解 $F_1(\zeta), F_2(\zeta)$ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(\zeta) &= R_0 \left\{ (1 - iC_0) \left\{ \left(A - K_2 \bar{A} \frac{m}{\rho^2} \right) \zeta + \left(Am - K_2 \bar{A} \rho^2 \right) \frac{1}{\zeta} \right\} \right. \\ &\quad \left. - (K - iC_0) \left\{ \left(\bar{A} - K_2 A \frac{m}{\rho^2} \right) \frac{1}{\zeta} + \left(\bar{A} m - K_2 A \rho^2 \right) \zeta \right\} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

$$F_2(\zeta) = (1 + K) R_0 \left\{ \left(A - K_2 \bar{A} \frac{m}{\rho^2} \right) \zeta + \left(Am - K_2 \bar{A} \rho^2 \right) \frac{1}{\zeta} \right\}. \dots\dots\dots (25)$$

次に、係数 A の決定のために、岩盤の領域の解析解 $F_1(\zeta)$ に着目し、図に示すように無限遠荷重 $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ が作用する場合を考える。

式(7)より、次式が成立する。

$$\tau_{xz}^\infty - i \tau_{yz}^\infty \big|_{|\zeta|=\infty} = \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \big|_{|\zeta|=\infty}. \dots\dots\dots (26)$$

これに式(24)を代入し、係数 $A = A' + iA''$ を代入すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \big|_{|\zeta|=\infty} &= \left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 - m) \right\} A' + \left\{ 1 + K_2 \frac{m}{\rho^2} + K_2 \rho^2 + m \right\} C_0 A'' \\ &\quad + i \left[- \left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} K_2 \rho^2 - m \right\} C_0 A' + \left\{ 1 + K_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 + m) \right\} A'' \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

となる。式(26)と式(27)より、実部、虚部の係数比較を行い、連立方程式を解くと、最終的に A は次式で与えられる。

$$A = \frac{\left[\left\{ 1 + k_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 + m) + i C_0 \left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} K_2 \rho^2 - m \right\} \right\} \tau_{yz}^\infty \right]}{\left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 - m) \right\} \left\{ 1 + K_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 + m) \right\} + \left\{ 1 + K_2 \frac{m}{\rho^2} + K_2 \rho^2 + m \right\} \left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} K_2 \rho^2 - m \right\} C_0^2} \\ + \frac{\left[\left\{ 1 + K_2 \frac{m}{\rho^2} + K_2 \rho^2 + m \right\} C_0 - i \left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 - m) \right\} \right] \tau_{yz}^\infty}{\left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 - m) \right\} \left\{ 1 + K_2 \frac{m}{\rho^2} + K(K_2 \rho^2 + m) \right\} + \left\{ 1 + K_2 \frac{m}{\rho^2} + K_2 \rho^2 + m \right\} \left\{ 1 - K_2 \frac{m}{\rho^2} K_2 \rho^2 - m \right\} C_0^2} \quad (28)$$

3. 数値計算例

上述の解析解を用いて、数値計算を行った結果を以下に示す。数値計算に用いた形状または弾性パラメータは、基本的に道路公団標準断面（形状比 $b/a = 0.83$ ）とし、覆工は吹き付けコンクリートを想定し、厚さはトンネル最大幅員の10%、ヤング率 $E_2 = 2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu_2 = 0.15$ であるとする。図3は τ_{xz}^∞ が作用する場合の x 軸上における $\tau_{xz}/\tau_{xz}^\infty$ の分布図で、境界 L_1 におけるすべりパラメータ C_0 を変化させることにより、その影響を調べた。この C_0 が大きくなるにしたがってすべりやすくなるため、図3の境界における応力勾配は小さくなる傾向にあり、遠方に行くにしたがい作用荷重に近い値となる。図4は同じく τ_{xz}^∞ が作用する場合の分布を等応力線図で表したものである。右半分は岩盤と覆工の弾性係数比 E_1/E_2 として0.5、また左半分は0.1の場合のものである。この図より、岩盤と覆工のヤング率の違いが大きいほど、覆工の内壁面と外壁面との応力差が大きいことが理解できる。図5は図4の場合における $\tau_{\eta z}$ の分布図である。この図からも覆工内の応力集中は、トンネルの頂点で、 $E_1/E_2 = 0.1$ のとき10.0、 $E_1/E_2 = 0.5$ のとき3.5 となって、地山のヤング率に大きく影響されることが明かである。

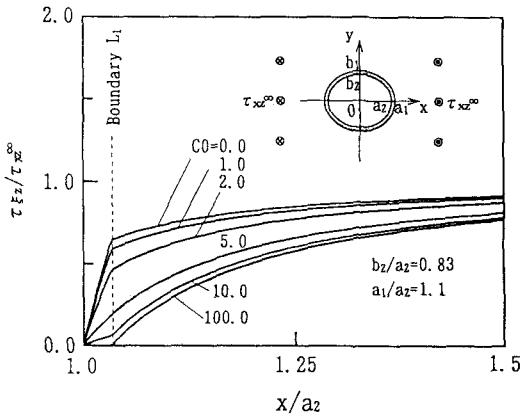


図3 すべりパラメータ C_0 が異なる場合の x 軸上の応力 τ_{xz} の分布図

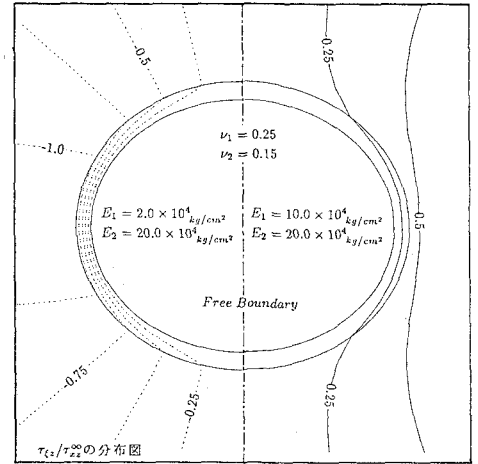


図4 弾性係数比が異なる場合の応力 τ_{xz} の分布図

次に作用荷重を次式のように定義し、水平面より角度 α だけ傾いた方向から τ_z^∞ が作用する場合を考える。

$$\tau_{xz}^\infty - i \tau_{yz}^\infty = \tau_z^\infty e^{-i\alpha} \quad (29)$$

図6、7に $\alpha = 30^\circ$ だけ傾いた方向から τ_z^∞ が作用する場合の τ_{xz} 、 τ_{yz} の分布図を示したものである。この場合は楕円の形状比が円に近いので、荷重の方向の影響は小さい。図8は覆工の厚さを変化させた場合の τ_{xz} の分布に与える影響を調べたものである。この図の右側はトンネルの最大幅員の20%の厚さで覆工を施した場合で、左側の倍の厚さがある。しかし、左右を比べると応力場に大きな変化がないことが理解できる。

かしながら、図6では同じ厚さでヤング率を変化させることにより応力場に大きな値の変化が表れる。したがって、覆工は厚さよりも岩盤と覆工との弾性係数比が大きく影響するといえる。

図9は $\tau_{xz}^\infty = 1$ の単位荷重が作用し、トンネル形状を変化させた場合の変位 u_z の分布図である。この図より円形に近い形状の方が変位は大きく表れることがわかる。図10は境界 L_2 が自由と固定境界の場合の $\tau_{\xi z}$ の分布図である。この図のトンネル内部において、その境界が固定される場合は自由境界に比べて約4倍の応力集中が起こることがわかる。図11は図9と同様な場合で作用荷重を30°傾けた場合における変位分布図である。

図12は $\alpha = 30^\circ$ の斜め方向から τ_z^∞ が作用する場合の最大せん断応力 τ_{max} の分布図である。これは、これまでと同様に左右で岩盤のヤング率を変化させて τ_{max} への影響を表したものである。なお、ここで $E_1 = E_2$ とした場合の τ_{max} の分布は既発表論文の計算結果⁽³⁾と完全に一致している。図13は同様に τ_{max} の分布図であるが、覆工厚さを変化させた場合の影響を示したものである。この図からも覆工の厚さを薄くするほど岩盤の応力状態は覆工を施さない場合の応力分布に近くなっていくことがわかる。

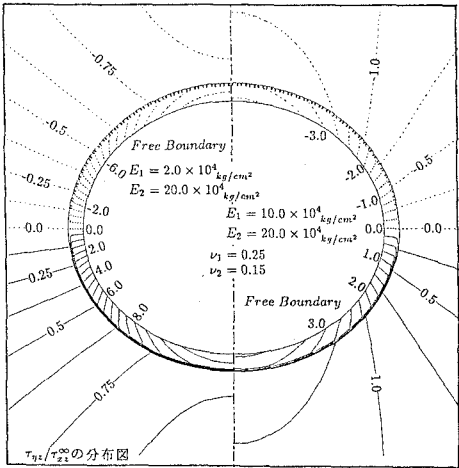


図5 弾性係数比が異なる場合の応力 $\tau_{\eta z}$ の分布図

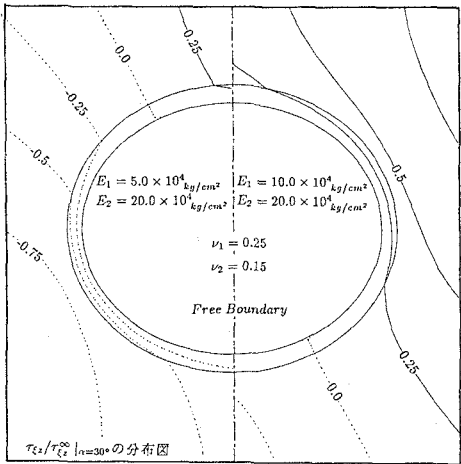


図6 弾性係数比が異なる場合の応力 $\tau_{\xi z}$ の分布図

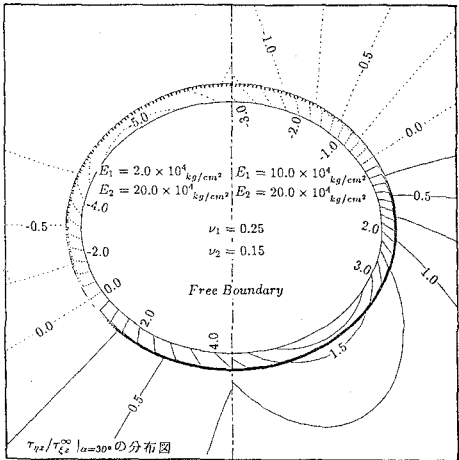


図7 弾性係数比が異なる場合の応力 $\tau_{\eta z}$ の分布図

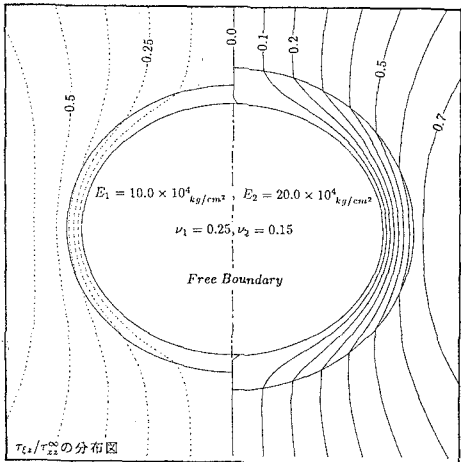


図8 覆工の厚さが異なる場合の応力 $\tau_{\xi z}$ の分布図

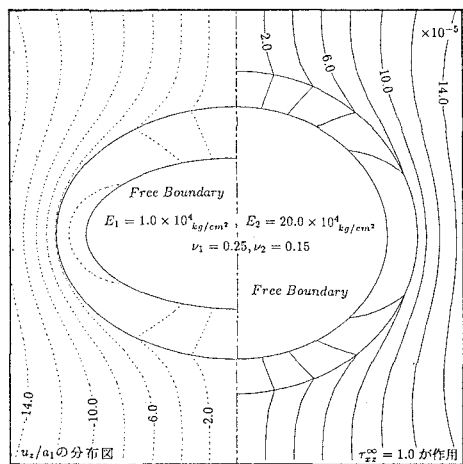


図9 トンネル形状が異なる場合の変位 u_z の分布図

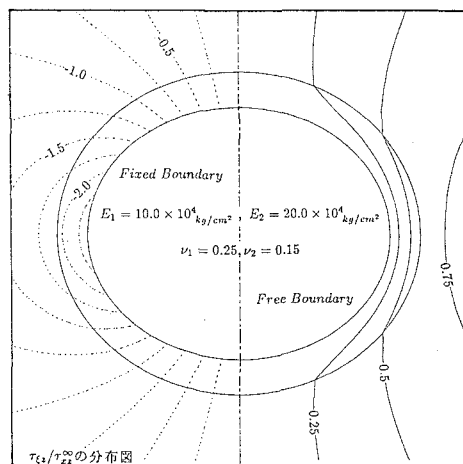


図10 境界条件が異なる場合の応力 τ_{xz} の分布図

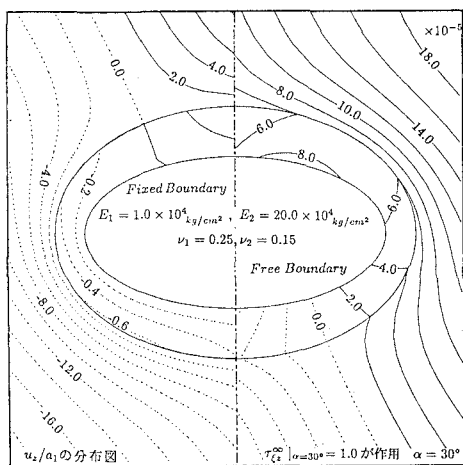


図11 境界 L_2 条件が異なる場合の変位 u_z の分布図

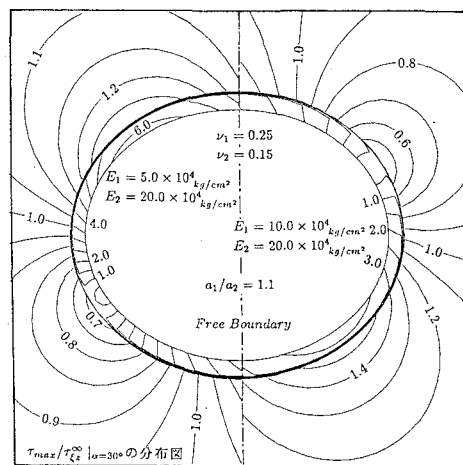


図12 弾性係数比が異なる場合の最大せん断応力 τ_{max} の分布図

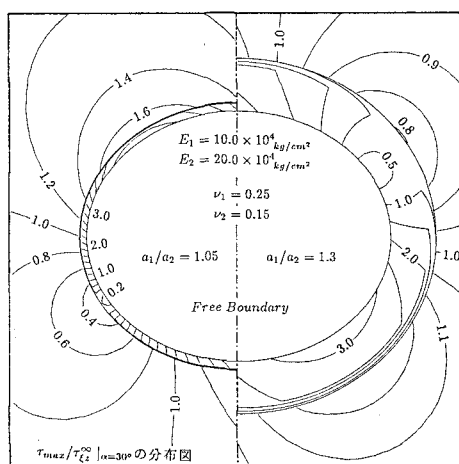


図13 覆工の厚さが異なる場合の 最大せん断応力 τ_{max} の分布図

4. 結 言

本論文では、面外せん断荷重下での覆工を有する楕円形トンネルの応力、変位場の解析を行った。その解析手法には複素応力関数を用い、その定式化に解析接続を用いることにより解析解がかなり簡単に得られ、これまでの研究より厳密的に解析が行えた。また、この解析解には本論文で初めて取り扱われたパネモデルのすべり境界を含んだものとなっている。さらにこの解を用いて数値計算を行うことにより、本研究において想定した解析モデルにおける応力場、変位場が明確に求められ、それに及ぼす覆工の影響を検討した。

5. 文 献

- 1) Sendekyj,G.P., Fungamental Aspects of Dislocation Theory, J.A.Simmon,R.de.Wit and R.Bullough,(Eds)., Spec. Publ., 317,1(1970),57.
- 2) 木村,平島,広瀬, 日本機化学会論文集, vol.58-555,A(1992),2104.
- 3) 平島,川上,藤原,山下, 土木学会論文集, No.436, III - 16,(1991.9),37.