

パーソナルコンピュータを用いた境界積分方程式法による円弧アーチの数値解析

岩手大学工学部 ○ 呂 杰
 岩手大学工学部 岩崎 正二
 岩手大学工学部 出戸 秀明
 岩手大学工学部 宮本 裕
 岩手大学教育学部 辻野 哲司

1. まえがき

円弧アーチの応力解析としては、古くから弾性荷重法による解析が行なわれており、土木学会の構造力学公式集¹⁾には種々の境界条件と荷重条件のもとでの公式がまとめられている。しかしながら、これらの公式はアーチ部材の軸方向のエネルギーの一部を無視して誘導されているため、円弧アーチの曲率が大きくなると軸方向エネルギーが無視できなくなるために実際とは異なる計算結果を与えることになる。一方、変形法分野では、アーチ部材の軸方向エネルギーを考慮した剛性マトリックス法の研究²⁾が行なわれているが、荷重は集中荷重として扱う場合が多く、部材間の分布荷重を荷重項として扱った例は少ないようである。

これらの状況をふまえて、著者らは力と変位に関する微分方程式をもとに積分方程式法を適用し、任意荷重及び任意境界条件を有するアーチ部材の応力と変位を与える小型計算機向きの新しい数値計算手法を提案する。本手法は古典的な積分方程式法とは異なり、境界条件を取り除いた基本解を用いる境界積分方程式法 (Boundary Integral Equation Method) であり、広い意味での境界要素法と考えることができる。

2. 解析手法

2.1 円弧アーチの基本式

図. 2 に示すように、半径 r の円弧アーチの要素片に働く部材力の力のつり合い式は次のようになる。

$$\frac{dQ}{d\theta} + N + Yr = 0 \quad (\text{半径方向}) \quad (1)$$

$$\frac{dN}{d\theta} - Q + Xr = 0 \quad (\text{接線方向}) \quad (2)$$

$$\frac{dM}{d\theta} - Qr = 0 \quad (\text{回転方向}) \quad (3)$$

ただし、 N 、 Q 、 M は軸力、せん断力、モーメントを表し、 X 、 Y はそれぞれ接線方向、半径方向の単位長さ当たりの外力を表す。

図. 1 に示すように、円弧アーチの任意点の接線及び半径方向の変位をそれぞれ u 、 v とする。また、任意点の回転角を ψ とすると力と変位の関係式は次のようになる。

$$N = \frac{EA}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right) \quad (4)$$

$$Q = -\frac{EI}{r^3} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right) \quad (5)$$

$$M = -\frac{EI}{r} \cdot \frac{d\psi}{d\theta} \quad (6)$$

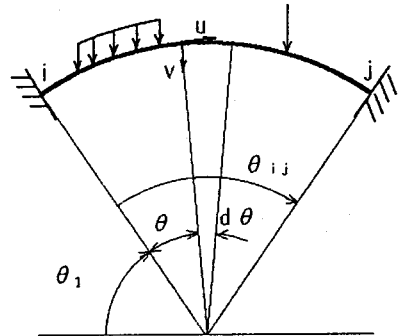


図. 1 円弧アーチ

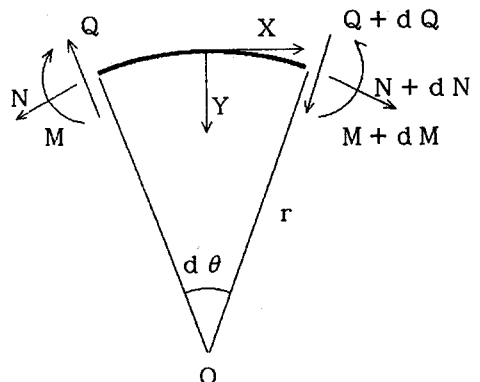


図. 2 微小要素の力のつり合い

ここで、 E , A , I はそれぞれアーチ部材のヤング係数、断面積、断面 2 次モーメントを表わす。

また、回転角と接線及び半径方向の変位との間に次式が成立する。

$$\psi = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right) \quad (7)$$

2. 2 境界積分方程式の誘導

接線及び半径方向の力のつり合い式についてそれぞれ基本解 u^* , v^* を乗じて、アーチ全長にわたって積分する。

$$\begin{aligned} & \int_0^{\theta_{ij}} \left\{ \frac{dQ(\theta)}{d\theta} + N(\theta) + Y(\theta) \cdot r \right\} v^*(\theta, \theta') d\theta \\ & + \int_0^{\theta_{ij}} \left\{ \frac{dN(\theta)}{d\theta} - Q(\theta) + X(\theta) \cdot r \right\} u^*(\theta, \theta') d\theta = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式(3)～(7)を考慮して式(8)に部分積分を施すことにより次の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \left[Q \cdot v^* - v \cdot Q^* + N \cdot u^* - u \cdot N^* - M \cdot \psi^* + \psi \cdot M^* \right]_0^{\theta_{ij}} \\ & + \int_0^{\theta_{ij}} u \left\{ \frac{EI}{r^3} \left(\frac{\partial^3 v^*}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \right) + \frac{EA}{r} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right) \right\} d\theta \\ & + \int_0^{\theta_{ij}} v \left\{ -\frac{EI}{r^3} \left(\frac{\partial^4 v^*}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^3 u^*}{\partial \theta^3} \right) + \frac{EA}{r} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} - v^* \right) \right\} d\theta \\ & + \int_0^{\theta_{ij}} Y \cdot r \cdot v^* d\theta + \int_0^{\theta_{ij}} X \cdot r \cdot u^* d\theta = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{ここで、} N^* = \frac{EA}{r} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} - v^* \right), \quad M^* = -\frac{EI}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial u^*}{\partial \theta} \right),$$

$$Q^* = -\frac{EI}{r^3} \left(\frac{\partial^3 v^*}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \right), \quad \psi^* = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v^*}{\partial \theta} + u^* \right).$$

このとき、基本解 u^* , v^* は次式を満足する解である。

$$\left. \begin{aligned} & \frac{EI}{r^3} \left(\frac{\partial^3 v^*}{\partial \theta^3} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \right) + \frac{EA}{r} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} - \frac{\partial v^*}{\partial \theta} \right) = -X' \cdot \delta(\theta, \theta') \\ & -\frac{EI}{r^3} \left(\frac{\partial^4 v^*}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^3 u^*}{\partial \theta^3} \right) + \frac{EA}{r} \left(\frac{\partial u^*}{\partial \theta} - v^* \right) = -Y' \cdot \delta(\theta, \theta') \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)において、 $X'=1$, $Y'=0$ のときの基本解を $u^{*(1)}$, $v^{*(1)}$ とし、式(9)に代入することにより、任意点 θ' における接線方向変位に関する次の方程式を得る。

$$\begin{aligned} u(\theta') = & \left[N(\theta) u^{*(1)}(\theta, \theta') + Q(\theta) v^{*(1)}(\theta, \theta') - M(\theta) \psi^{*(1)}(\theta, \theta') \right. \\ & \left. - u(\theta) N^{*(1)}(\theta, \theta') - v(\theta) Q^{*(1)}(\theta, \theta') + \psi(\theta) M^{*(1)}(\theta, \theta') \right]_0^{\theta_{ij}} \\ & + \int_0^{\theta_{ij}} Y r v^{*(1)}(\theta, \theta') d\theta + \int_0^{\theta_{ij}} X r u^{*(1)}(\theta, \theta') d\theta \end{aligned} \quad (11)$$

同様に式(10)において、 $X'=0$, $Y'=1$ のときの基本解を $u^{*(2)}$, $v^{*(2)}$ とすると半径方向変位に関する、次の方程式を得る。

$$v(\theta') = \left[N(\theta) u^{*(2)}(\theta, \theta') + Q(\theta) v^{*(2)}(\theta, \theta') - M(\theta) \psi^{*(2)}(\theta, \theta') \right.$$

$$\begin{aligned}
 & -u(\theta)N^{*(2)}(\theta, \theta') - v(\theta)Q^{*(2)}(\theta, \theta') + \psi(\theta)M^{*(2)}(\theta, \theta') \Big]_0^{\theta_{ij}} \\
 & + \int_0^{\theta_{ij}} Yr v^{*(2)}(\theta, \theta') d\theta + \int_0^{\theta_{ij}} Xr u^{*(2)}(\theta, \theta') d\theta
 \end{aligned} \quad (12)$$

最後に、式(11)、(12)を式(7)に代入することにより回転角 ψ に関する次の方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 r\psi(\theta') = & [N(\theta)\{\tilde{u}^{*(2)}(\theta, \theta') + u^{*(1)}(\theta, \theta')\} \\
 & + Q(\theta)\{\tilde{v}^{*(2)}(\theta, \theta') + v^{*(1)}(\theta, \theta')\} \\
 & - M(\theta)\{\tilde{\psi}^{*(2)}(\theta, \theta') + \psi^{*(1)}(\theta, \theta')\} \\
 & - u(\theta)\{\tilde{N}^{*(2)}(\theta, \theta') + N^{*(1)}(\theta, \theta')\} \\
 & - v(\theta)\{\tilde{Q}^{*(2)}(\theta, \theta') + Q^{*(1)}(\theta, \theta')\} \\
 & + \psi(\theta)\{\tilde{M}^{*(2)}(\theta, \theta') + M^{*(1)}(\theta, \theta')\}]_0^{\theta_{ij}} \\
 & + \int_0^{\theta_{ij}} Yr\{\tilde{v}^{*(2)}(\theta, \theta') + v^{*(1)}(\theta, \theta')\} d\theta \\
 & + \int_0^{\theta_{ij}} Xr\{\tilde{u}^{*(2)}(\theta, \theta') + u^{*(1)}(\theta, \theta')\} d\theta
 \end{aligned} \quad (13)$$

ただし、 $\tilde{}$ は θ' に関する偏微分を表わす。

式(11)～(13)において、 $\theta' \rightarrow 0 + \epsilon$ 及び $\theta' \rightarrow \theta_{ij} - \epsilon$ としたときの ϵ (微小な正定数) $\rightarrow 0$ の極限を考へることにより6本の境界量方程式を誘導することができる。これらを行列式によって表現するとき次式が求められる。

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(\theta_{ij}) \\ v(0) \\ v(\theta_{ij}) \\ r\psi(0) \\ r\psi(\theta_{ij}) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{36} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & \cdots & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(\theta_{ij}) \\ Q(\theta_{ij}) \\ M(\theta_{ij}) \\ u(\theta_{ij}) \\ v(\theta_{ij}) \\ \psi(\theta_{ij}) \end{Bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \cdots & L_{16} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \cdots & L_{26} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \cdots & L_{36} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & \cdots & L_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N(0) \\ Q(0) \\ M(0) \\ u(0) \\ v(0) \\ \psi(0) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{Bmatrix} \quad (14)
 \end{aligned}$$

式(14)における12個の境界未知量のうち6個については両端の境界条件より定まり、残りの未知量は6行6列の行列表を解くことにより求めることができる。

3. 数値解析結果と考察

数値計算は、両端固定及び両端ヒンジの円弧アーチに集中荷重あるいは円弧軸線上に等分布荷重が作用す

表. 1 両端固定円弧アーチに集中荷重が作用

$\theta_{ij}: 180^\circ$ $\theta: 45^\circ$	軸力無視	軸力考慮	
	古典公式	FEM	BIEM
N_A (kgf)	272.75	272.60	272.58
Q_A (kgf)	54.15	53.24	53.24
M_A (kgf·cm)	2912.31	3016.00	3016.12
N_B (kgf)	27.25	27.42	27.42
Q_B (kgf)	54.15	53.25	53.26
M_B (kgf·cm)	5427.95	5243.00	5243.01

$\theta_{ij}: 60^\circ$ $\theta: 15^\circ$	軸力無視	軸力考慮	
	古典公式	FEM	BIEM
N_A (kgf)	376.16	284.40	284.32
Q_A (kgf)	77.47	130.40	130.40
M_A (kgf·cm)	5365.07	8510.00	8510.84
N_B (kgf)	270.98	179.20	179.23
Q_B (kgf)	104.69	51.61	51.62
M_B (kgf·cm)	4158.33	985.30	985.55

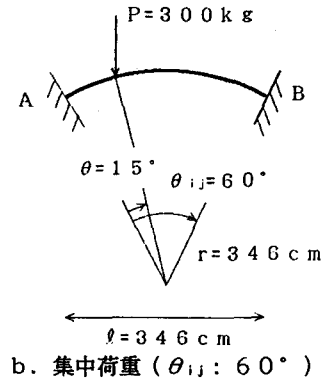
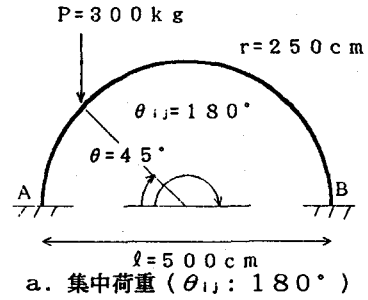


図. 3 両端固定円弧アーチ

る場合について、円弧アーチの中心角 (θ_{ij}) を変化させて行なった。紙面の都合で両端固定アーチに集中

荷重が作用する場合の計算結果について図表を示す。このときの計算に用いた値は、断面2次モーメント ($I =$) 5190.0cm^4 、断面積 ($A =$) 48.80cm^2 、ヤング係数 ($E =$) $2.1 \times 10^6 \text{kgf/cm}^2$ 、他は 図. 3 に示すとおりである。表. 1 が計算結果である。比較のために、軸力の影響を無視した古典公式 (弾性荷重法) による解と、軸力の影響を考慮した剛性マトリックス法 (FEM) による計算結果を併せて表にしたものである。境界積分方程式法 (BIEM) により得られた値と剛性マトリックス法による値がよく一致していることがわかる。しかし、古典公式では軸力の影響の一部を無視しているために中心角が小さいとき、すなわち円弧アーチの曲線部材が直線に近づくとき、軸力を考慮している剛性マトリックス法や境界積分方程式法による計算結果とはかなり異なる値となっている。

4. あとがき

本論文で新しく提案し定式化した円弧アーチの数値解析法は、精度の上でも十分な計算結果が得られており、アーチ系構造物に対して十分適用できる方法であることが明らかになった。利点のひとつとして、従来の剛性マトリックス法では、分布荷重を受ける場合には適当な要素分割が必要であったが、本手法では1要素で計算が可能であることが挙げられる。また本手法は、境界条件や荷重条件に関わらず6元の連立方程式を扱うだけでよく、パーソナルコンピュータに適した解法といえる。

【参考文献】

- 1) 土木学会：構造力学公式集、pp. 237-254, 1986.
- 2) 日本鋼構造協会編：骨組構造解析、pp. 90-94, 1971.
- 3) 宮本裕、岩崎正二、出戸秀明、水野久禎：境界積分方程式法による連続吊橋の撓度理論解法について、境界要素法論文集第3巻、pp. 93-98, 1986.