

積分計算の効率化とその初通過問題 への適用に関する基礎的研究

鳥取大学工学部土木工学科 ○松保重之・白木 渡

1. はじめに 通常の構造工学問題の基礎方程式は、(偏)微分方程式で表される場合が多く、その解析には、積分計算を伴う場合が多い。しかも、対象とする問題をより合理的にモデル化しようとする場合、助変数の数が多くなり、その分、多重積分の計算が必要となる。効率的な多重積分の計算手法の開発が必要不可欠である所以である。ここで、効率的というのは、高精度かつ高速、という意味であるが、実際の工学問題を対象とする場合、計算の効率化のみならず、その適用性も重要である。いくら効率の良い計算法であっても、問題によっては適用困難あるいは計算不可能というのでは、その計算法自体、無意味なものになってしまう。特に、実際の問題が確率的特性を有するという観点から、確率論的な解析を行う場合、複雑に絡み合う多数の要因等のために生ずるモデル化の困難性と相い重なり、合理的な問題の解決を困難なものとしている。そこで、本研究では、線形・非線形問題を問わず、また変数の数にかかわらず大変有効である モンテカルロ・シミュレーション手法に基づく積分計算の効率化手法の開発を行った。また、適用性には若干の工夫を要するが、抜群の効率性を有する手法として、助変数の離散化点における被積分関数値を用いて区分求積を行う格子化手法をとりあげ、その効率性についても考察した。そして、効率化計算に関し、研究が立ち遅れている確率過程(時空間領域では確率波、空間領域では確率場)の初通過問題に、これらの積分計算の効率化手法を適用する方法について考察した。最後に、簡単な数値計算例を行うことによって、これらの手法の有効性を示した。

2. 積分の効率化手法の開発 本章では、モンテカルロ法と格子化手法による積分計算法について説明する。

2-1 一般的な効率化モンテカルロ法 効率化、すなわち推定値の分散の逡減をはかる一般的な手法¹⁾としては、

①主部の分離法、②加重サンプリング法、③層別サンプリング法、④負相関法、⑤ヘイバー法、⑥条件付きモンテカルロ法、等があげられる。本節では、式(1)を例にとり、本研究で関係ある③、④、⑤の各手法の説明を行う。

(1) 層別サンプリング法: この手法は、区

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (b > a) \quad (1)$$

間 $[a, b]$ を m 個の小区間 $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots,$

$[a_m, b_m]$ (ただし、 $a \equiv a_1 < b_1 = a_2 < b_2 = \dots = a_m < b_m$

$\equiv b$)に分け、各小区間で入門的モンテカルロ

を用いて積分する手法である。すなわち、区

$$I = \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} f(x) dx \approx I_1 = \sum_{j=1}^m \frac{b_j - a_j}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} f(\xi_i^{(j)}) \quad (2)$$

間 $[a_j, b_j]$ ($j=1, \dots, m$)の一樣乱数 $\xi_i^{(j)}$ を第 j 番目の小区間につき N_j 個用いて、式(2)のように推定する。各層(小区間)は、各小区間における $f(x)$ の変化が小さくなるように選び、 $N_j = (b_j - a_j)N / (b - a)$ とすれば良い。

(2) 負相関法: 期待値 I を有するある変数 X を考える。同じ期待値を持つ他の変数 X' が X と強い負の相関を持つならば、 $(X+X')/2$ はやはり同じ期待値を与えるが、その分散は X あるいは X' の個々の分散より小さくできる、というのがこの手法の基本的考え方である。式(1)で、区間 $[0, 1]$ の積分を評価する時、 $f(x)$ がもし x の単調な関数ならば、 $[0, 1]$ の一樣乱数 ξ に対し $f(\xi)$ とともに $f(1-\xi)$ を一組にして、 $\xi = [f(\xi) + f(1-\xi)]/2$ の期待値を考えると $E[\xi] = I$ である。したがって、近似値 I_2 を式

(3)のように 求めることができる。

$$I = \int_0^1 f(x) dx \approx I_2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [f(\xi_i) + f(1-\xi_i)] \quad (3)$$

(3) ヘイバー法: この手法は、上記(1)、(2)

のハイブリッド手法であり。ここでは、 s 次元ベクトル $\vec{x}$ の s 重積分(式(4)参照)を考える。

$$I = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\vec{x}) d\vec{x} \quad (4)$$

s 次元の単位超立方体 G を $N=K^s$ に分割し、それらを $A_1, \dots, A_N$ とする。各々の小超立体要素 A_r

$$I_s = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N \frac{f(\vec{x}_r) + f(\vec{x}_r')}{2} \quad (5)$$

($r=1, \dots, N$)にランダムにベクトル点 $\vec{x}_r$ を選び、これと A_r の中心 $\vec{c}_r$ に対称な点 $\vec{x}_r' = 2\vec{c}_r - \vec{x}_r$ をとると、近似値 I_s を式(5)のように得る。各小超立体要素 A_r についての被積分関数の評価回数が2であり、非常に効率が良い。

2-2 ハイブリッド型効率化モンテカルロ法の開発

本研究では、ハイパー法に、さらに主部の分離法を組み合わせ、非常に効率の良いモンテカルロ法を開発した。すなわち、ハイパー法によって分割した 各々の小超立体要素 A_r ($r=1, \dots, N$) において、いずれかの変数の離散化点における被積分関数値を高さとする小超直方体要素で近似する。この小超直方体要素は、説明の簡単のために、1次元の場合に限定して図示すると、Fig.1 の斜線部分のようになる。したがって、これらの小超直方体要素を総和して区分求積すれば、式(4)の多重積分の第1次近似値が得られる。この部分を、被積分関数 $f(x)$ の主部 $g(x)$ とし、残りの部分 $f(x)-g(x)$ について ハイパー法を用いて多重積分を行い、先ほど求めておいた区分求積値に足すと、精度の良い多重積分の近似値 I_1 を求めることができる。

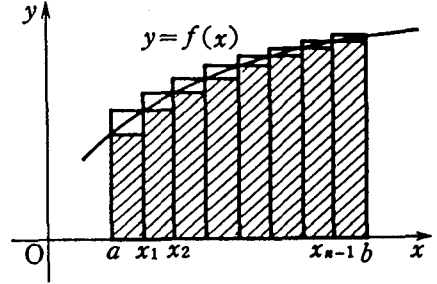


Fig.1 Principal Parts of Integrand and Its Termwise Integration

2-3 格子化手法 モンテカルロ法とともに、効率的な数値積分法である格子化法について、簡単に説明する。本手法の基本的考え方²⁾の第1は、被積分関数を、多変数の離散化点(格子点)における関数値を用いる補間式で近似し、積分を遂行することである。第2は、これらの多数の格子点の全てを用いるのではなく、適当にサンプリングした格子点における被積分関数値を用いて、効率よく積分を推定しようとするものである。

(1) チェビシェフ補間に基づく積分の推定: k 次元の積分領域 D 内の各座標軸 x_i を n 分割し、 $(n+1)^k$ 個の格子点 $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_k^{(k)})$ を考える。上

$$\vec{i} = (i_1, i_2, \dots, i_k), \quad i_r = 0, 1, \dots, n \quad (r=1, 2, \dots, k) \quad (6)$$

$$f(\vec{x}) \approx \sum_{\vec{i}} f(x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(k)}) L(\vec{i}; \vec{x}) \quad (7)$$

$$I \approx \sum_{\vec{i}} f(x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(k)}) C(\vec{i}), \quad C(\vec{i}) = \int_D L(\vec{i}; \vec{x}) dx \quad (8)$$

$$f(x_1, \dots, x_k) \approx \sum_{i_1=0}^n \dots \sum_{i_k=0}^n f(x_1^{(1)}, \dots, x_k^{(k)}) \prod_{r=1}^k \prod_{j=0}^n \frac{x_r - x_r^{(j)}}{x_r^{(i_r)} - x_r^{(j)}} \quad (9)$$

$$I \approx \sum_{\vec{i}} f(\vec{i}) \prod_{r=1}^k \prod_{j=0}^n \frac{x_r - x_r^{(j)}}{x_r^{(i_r)} - x_r^{(j)}} \equiv \sum_{\vec{i}} f(\vec{i}) C(\vec{i}) \quad (10)$$

$$T_{n+1}(x) = 2^{-n} \cos[(n+1) \cos^{-1} x] \equiv (x - x^{(0)}) \dots (x - x^{(n)}) \quad (11)$$

$$x_r^{(j)} = \cos\left(\frac{2j+1}{n+1} \frac{\pi}{2}\right), \quad (r=1, \dots, k; j=0, \dots, n) \quad (12)$$

$$C(\vec{i}) = c(i_1) \dots c(i_k), \quad c(i_r) \equiv \int_{-1}^1 \prod_{j=0}^n \frac{x_r - x_r^{(j)}}{x_r^{(i_r)} - x_r^{(j)}} dx_r \quad (13)$$

$$\sum_{\vec{i}} C(\vec{i}) = 2^k, \quad \sum_{i=0}^n c(i) = 2 \quad (14)$$

$$c'(i) = c(i)/2 \quad (i=0, 1, \dots, n), \quad C'(\vec{i}) = C(\vec{i})/2^k \quad (15)$$

$$I = 2^k \sum_{\vec{i}} C'(\vec{i}) f(\vec{i}), \quad C'(\vec{i}) = c'(i_1) c'(i_2) \dots c'(i_k) \quad (16)$$

$$\sum_{\vec{i}} C'(\vec{i}) = 1, \quad 0 \leq C'(\vec{i}) \leq 1; \quad \sum_{i=0}^n c'(i) = 1, \quad 0 \leq c'(i) \leq 1 \quad (17)$$

(2) 格子点のサンプリング: 式(10)において $f(\vec{x}) \equiv 1$ という場合を考えると、式(14)の関係を得る。そこで、式(15)のように置くと、式(10)は、式(16)のように書き替えられる。この時、式(15)の C' 、 c' は、式(17)の関係を有する。すなわち、 C' はランダムな(0を含む)正整数の組 $(i_1, \dots, i_k)$ の発生する確率と解釈でき、この整数の組は、確率 c' により順次 独立に、 k 個の整数をサンプリングすればよいことがわかる。

2-4 数値計算例 上述の手法の有効性を確認するため、いくつかの簡単な計算を行った³⁾。その内の1つを以

Table 1 Calculation Results of Integral by Various Methods

$\int_0^1 \int_0^1 (e^{x_1} e^{x_2} e^{x_3} e^{x_4} - 1) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = 0.0693976$	Crude	Antithetic	Haber	Hybrid	Grid
	.0695476	.0698262	.0693878	.0693993	.0693975

下に紹介する。上式で与えられる定積分を、いくつかの手法で行った結果を、Table 1 に示す。表中、Crude とあるのは Crude モンテカルロ法での結果を示す。ヘイパー法とハイブリッド型効率化法については、4次元の単位超立方体の各変数を11分割し、全体で11⁴=14641個の小超立方体要素に分割した。また、格子化手法では、4次元の単位超立方体の各変数を5分割し、(5+1)⁴=1296個の格子点で計算した。NEC PC9801RA で行った所要時間は、ヘイパー法とハイブリッド型効率化モンテカルロ法は10秒前後、格子化法は1秒未満であった。これらの結果より、本研究で開発したハイブリッド型効率化モンテカルロ法ならびに格子化法が、いかに有効であるかがわかる。

3. 効率化積分法の破損確率算定への適用 連続な助変数を有する確率過程(確率波、確率場)の初通過問題の扱いは一般に難しい。しかし、助変数を離散化し、不規則系列としてモデル化すれば、扱いが簡単化される。しかも、外乱あるいは系の特性の観測値が離散値として得られ、汎用的な数値解析法(FEM等)が離散化手法であること、連続量を対象とした解析もデジタル計算機内で離散化計算されること等を考えると、このような問題の扱いは適用性に優れていると考えられる。ここでは、離散化応答過程(場、波)の破損確率の算定方法について述べる。

3-1 破損確率算定の定式化 破損確率 P_f の算定は、当該の系が安全か否かを規定する限界状態を定めることから始まる。(準)静的問題に対してこの限界状態を定式化すると、系を規定するパラメータ $x_1, \dots, x_n$ を要素とする

ベクトル $\vec{x}$ の関数である系の評価関数(限界状態

$$g(\vec{x}) > 0 \quad \text{安全領域}, \quad g(\vec{x}) \leq 0 \quad \text{破損領域} \quad (18)$$

関数と呼ばれる) $g(\vec{x})$ を用いて、式(18)のようにまとめることができる。動的問題の場合には、

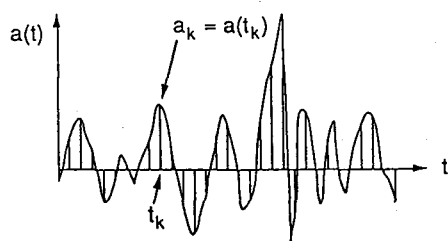
$$g(\vec{x}, T) > 0 \quad \text{安全領域}, \quad g(\vec{x}, T) \leq 0 \quad \text{破損領域} \quad (19)$$

このような限界状態関数が、対象とする全継続期間 T にわたって式(19)の第1式を満たせば安全、

$$P_f = \int_{g(\vec{x}, T) \leq 0} f_{x_1, \dots, x_n}(\vec{x}) d\vec{x} \quad (20)$$

1度でも第2式となるようなことがあれば、初通過という意味で危険であると考えることができる。

この時、系の破損確率(動的問題の場合には、初通過確率) P_f は、系を規定するパラメータ $x_1, \dots, x_n$ の同時確率分布 $f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n)$ を用いて、式(20)のように定式化することができる⁴⁾。動的問題の場合、式(20)は、応答過程 $a(t)$ を時間軸上で離散化し(Fig. 2参照)、各離散時点 t_k ($k=0, 1, \dots, n$)での応答値(不規則変数) $a_k =$

Fig. 2 Discretization of a continuous process⁴⁾

$a(t_k)$ の同時確率密度関数 $f_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n)$ を破損領域にわたって積分することを意味している。式(20)は、問題の定常・非定常あるいは線形・非線形、さらには確率分布に影響されない汎用性が大きい厳密な評価式であるが、大きい次元の確率分布を積分する必要あり、従来は、このような解析は不可能であった。しかし、本研究で提案しているような積分の効率化手法を適用すると、式(20)に基づく解析も可能になるものと思われる。なお、離散化した応答値を用いて破損(初通過)確率を求める方法には、離散化した応答値を再生矩形パルス過程の近似を行って算定する方法^{5, 6)}があり、あまり大きくない次元の確率分布の積分で算定することができ、汎用性も大きい、各再生矩形パルスの独立性の仮定を設けているので、近似的な評価式であり、解析の際には、独立性の仮定が満たされるよう注意を払う必要がある。そこで、本研究では、式(20)の算定法に従うことにする。

3-2 初通過問題に対する数値計算例 検証のため、ごく簡単な問題を考えた。対象とした問題は、線形の1自由度質点系が、地震動を受ける問題(式(21)参照)を考えた。式中、 ζ は系の減衰定数、 ω は系の非減衰固有円振動数、 $\xi(t)$ は地動加速度外乱を強度 $2\pi S$ の白色雑音でモデル化したものである。実際の地動加速度は有色雑音であり、そのスペクトル密度は、例えば、式(22)の金井-多治見の地動加速度過程モデルで与えられる。しかし、

小さい減衰定数を有する式(21)の系は狭帯域フィルタ-となるので、系は、その固有円振動数 ω_s の近傍の外乱のスペクトル密度を吸収すると考えられ、 $\xi(t)$ のスペクトル密度を $S=S_0(\omega_s)$ として考えた。なお、式(22)中、 S_0 は基

$$\ddot{x} + 2\zeta_s \omega_s \dot{x} + \omega_s^2 x = \xi(t) \quad (21)$$

$$S_a(\omega) = \frac{\left[1 + 4\zeta_s^2 \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right] S_0}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2\right]^2 + 4\zeta_s^2 \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2} \quad (22)$$

$$K_x(\tau) = D_x \exp(-\zeta_s \omega_s |\tau|) (\cos \omega_d \tau + \frac{\zeta_s \omega_s}{\omega_d} \sin \omega_d |\tau|), \quad \omega_d = \omega_s \sqrt{1 - \zeta_s^2} \quad (23)$$

盤における地震動外乱を白色雑音でモデル化した時のそのスペクトル密度、 ω_s は地盤の固有円振動数、 ζ_s は地盤の減衰定数である。以上の条件のもとに、変位応答をゼロ平均の正規定常過程と仮定し、相関理論に基づき不規則応答解析を行うと、応答過程の共分散関数 $K_x(\tau)$ が式(23)、導関数過程の共分散関数が

$$D_{\dot{x}} = (\omega_d^2 + \zeta_s^2 \omega_s^2) D_x + K_{\dot{x}}(\tau) = -\frac{K_x(\tau)}{d\tau} \quad (24)$$

$$D_x = \frac{\pi S_0}{2\zeta_s \omega_s^3} \quad (25)$$

$$P_f = 1 - \exp\left[-\frac{T}{T_s} \exp\left\{-\frac{(a-\bar{x})^2}{2D_x}\right\}\right] \quad (26)$$

式(24)のように得られる。式中、 τ は時間の差を示し、 D_x は応答過程の分散で式(25)で与えられる。以上の式を用いて、変位応答スペクトル値 $u_s=4.0(\text{cm})$ の時の初通過確率 P_f の計算を行った。用いたパラメータ値は、 $S_0=37.801(\text{cm}^2/\text{sec}^4)$ 、地震継続時間 $T=9.294(\text{sec})$ 、 $\omega_s=20.256(\text{rad/sec})$ 、 $\zeta_s=0.321$ 、 $\zeta_s=0.05$ 、 $\omega_s=2\pi/0.5=12.566(\text{rad/sec})$ である。計算結果をTable 1に示す。表中、「Strict」とは、式(26)のRiceの公式により初通過確率を算定した結果である。式(26)中、 a は超過レベル、 $T_s=\sqrt{D_{\dot{x}}/D_x}$ ($D_{\dot{x}}$ は x の導関数 $\dot{x}$ の分散)は擬周期である。Table 1より、 T の分割数を増やして、離散化の時間間隔 $\Delta t(\text{sec})$ を小さくしていくと、式(20)の算定値が安全側から危険側へとRiceの初通過確率に近づいていく様子がわかる。 Δt は、非減衰固有周期 $2\pi/\omega_s=0.5(\text{sec})$ 以下であれば十分であると考えられるが、原稿締切のため、そこまで計算できなかった。講演当日、発表することにする。

Table 1 Calculation Results of Eq. (20)

Division No.	3	4	5	6	7	8	...	Strict
Fail.Prob. P_f	.66417E-3	.91696E-3	.13959E-2	.24192E-2	.71508E-2	.10135E-1		.37167E-1

4. あとがき 本研究では、工学問題の解析を行う際に、頻繁に現れる多重積分計算の効率化手法の開発を行い、その有効性を数値計算例により示した。その結果、本研究で開発したハイブリッド型効率化手法に基づけば、任意の形の被積分関数でも、相当の数の多重積分を効率よく実行できることがわかった³⁾。また、シミュレーション解法は、一般に、問題の線形・非線形を問わず多変数問題に対して大変有効であり、本研究で提案した効率化手法はこのようなシミュレーション手法との相性が良く、適用性にも優れていることを、確率過程(場、波)の初通過問題に適用することにより示した。さらに、このような手法は、最近研究されてきている確率波(場)のシミュレーションによって離散化点における確率特性値を知ることができれば、もっと複雑な問題の解析にも適用可能であると思われる。

謝辞：本研究は、文部省科学研究費(奨励研究(A)、課題番号04855094)の補助を受けた。記して関係各位に謝意を表する。

参考文献

- [1]津田:モンテカルロ法とシミュレーション, 改訂版, 培風館, 1987.
- [2]津田:計算機による多変数問題の数値解析, ナイフ社, 1976.
- [3]松保重之・他: 積分計算の効率化に関する基礎的研究, 鳥取大学工学部研究報告, Vol. 23, No. 1, 1992(印刷中).
- [4]G. I. Schuëller et al.: Computational ... loading, Prob. Eng. Mech., Vol. 6, Nos. 3/4, 1991-9/10, p. 134.
- [5]R. D. Larrabee and C. Allin Cornell: Combination ... Processes, ASCE, Vol. 107, No. ST1, 1981-1, p. 223.
- [6]C. J. Turkstra and H. O. Madsen: Load Combinations ... Design, ASCE, Vol. 106, No. ST12, 1980-12, p. 2527.