作業日数と作業間の多様な結合関係におけるあいまいさを考慮したネットワーク工程計画法

九州大学 樗木武，○モハメド・タティシュ，辰巳浩，九州産業大学 吉武哲信

1．まえがき

工程計画法PERTは，作業間の複雑な関係をネットワーク表示し，精度ある工程計画を可能にするもので広く普及している．しかし，実務の上で残された課題があり，1つは作業日数のあいまいさの扱い，いま1つは作業間の多様な結合関係の扱いである．すなわち，計画立案時に作業日数を求めるとき，実際上あいまいな判断にならざるをえないこと，或いはあいまいそのものであることが多い．従って，より現実に即した計画は，この作業日数のあいまいさをそのまま扱うことであり，この点に限る工程計画法を既に報告した[1]．

他方，従来PERTは，節点を介して前後の作業が結合されることから，全ての作業間で先行作業終了後に後続作業が開始できるという厳格な前後関係の扱いに限られる．しかし実際は，ある作業が完了する数日前から次の作業を開始できる等の関係がある．従って，実務に忠実な工程計画をうるには多様な結合関係の扱いを可能にする必要がある．本題に関しCrandall[2]は，「先行作業開始(終了)後○○日以上経過しなければ次の作業が開始(終了)できない」という内容の扱いを可能にするPERTを提案した．またこれに，「先行作業開始(終了)後○○日以内に後続作業を開始(終了)しなければならない」という内容を加えた研究[3]もある．これらは結合関係の一般化であるが，実務からは，多様な関係を考えるほどその全てを確定的に求めることは難しく，あいまいな判断になることが多い．また，あいまい関係こそが妥当な作業対もある．従って，結合関係の一般化は，そのあいまいさの扱いとと同時に展開することが実情に即し，その開発はこれからである．

あいまいさを含む作業日数と作業間の多様な結合関係は，1つのプロジェクトで同時に存在する事もある．その場合，いずれか一方のみを考慮するか，或いは両者を同時に考慮するかは，作業内容により適宜判断することである．この意味では，2つの問題に個別に対応した工程計画法と共に，両者を同時に考慮した工程計画法が必要である．そこで本研究は，まず作業間の結合関係について現場でどの様な判断があるかを整理し，多様な結合関係を考慮した工程計画法を提案する．次いで，本提案と先の論文[1]とから，あいまいさを含む作業日数と作業間の多様な結合関係を同時に考慮した工程計画法を工夫する．

2．作業間の結合関係に関する考察とその定式化

作業間の結合関係には多様な内容があり，それらを先行及び後続作業の開始(S)と終了(F)のペアで考えれば，SS，SF，FS，FFの4通りがある．また，「先行作業開始(終了)後○○日以降に・・・できる」(a)，「先行作業開始(終了)後○○日迄に・・・しなければならない」(b)，「先行作業開始(終了)○○日前から・・・できる」(c)，「先行作業開始(終了)○○日前迄に・・・しなければならない」(d)とする表現の違いにより4通りがある．さらに，こうした判断が確定的かあいまいかにより2通りがある．

これら多様な関係は，現実に全てが意味をもつとは限らない．例えば，「先行作業を開始する○○日前までに後続作業を終了しなければならない」は現実的でない．そこで，あいまいさはさておき，確定的な関係の中で明らかに非現実的なものを除去し，表1に示す個々の関係が具体的に考えられるかを，現場技術者14名にヒヤリングした．その結果，FSに関してはa，b，c，dのいずれにも具体例が上げられたが，SF，FFおよびSSに関しては，a，bについて具体例を挙げ，他は思いつかない或いはなしということであった．この成果から，前述の多様な結合関係のうち結局は表1に○印を付す内容が現実のものといえる．なお，こうした関係に絞るにしても，突詰めれば同じ内容を表現したものがある．しかし，利用者からすれば表現が豊富であることがむしろ便利で，この意味であえて整理することなくいずれにも対応することとする．

結合関係は，後続作業の開始，終了に上限があるか否かで(a, c)と(b, d)に大別される．前者は，後続作業の開始，終了に下限があるが，実際の開始，終了はそれ以降いつでもよい．後者は，ある日時までに後続作

業を開始，終了しなければならず，上限が設定される．これらで計算上問題があるのは後者である．即ち，複数の先行作業があるとき，先行作業とのペア数だけ後続作業の開始，終了に条件がつく．このとき，後続作業の開始日，終了日の上限を規定する内容は，当該ペアの結合関係に問題ないものの，それが他とのペアとの関係の上で矛盾をきたすことがあり，そうした際の扱いは単純でない．しかし，その場合も以下に展開する手法の応用になると推察される．そこで，後者は以後の研究とし，ここでは前者を対象とする．

表1 作業間の結合関係について

記号		内容
FS	ⓐ	作業Aが終了してから○○日以降に次の作業Bを開始できる．
	ⓑ	作業Aが終了してから○○日後迄に次の作業Bを開始しなければならない
	ⓒ	作業Aが終了する○○日前から次の作業Bを開始できる．
	ⓓ	作業Aが終了する○○日前迄に次の作業Bを開始しなければならない．
FF	ⓐ	作業Aが終了してから○○日以降に次の作業Bを終了できる．
	ⓑ	作業Aが終了してから○○日後迄に次の作業Bを終了しなければならない
SF	ⓐ	作業Aを開始してから○○日以降に次の作業Bを終了できる．
	ⓑ	作業Aを開始してから○○日後迄に次の作業Bを終了しなければならない
SS	ⓐ	作業Aを開始してから○○日以降に次の作業Bを開始できる．
	ⓑ	作業Aを開始してから○○日後迄に次の作業Bを開始しなければならない
	c	作業Aを開始する○○日前から次の作業Bを開始できる．
	d	作業Aを開始する○○日前迄に次の作業Bを開始しなければならない．

結合関係を，表1の○印を付したものでa, cタイプに限定し，また，その判断が確定的な場合とあいまいな場合とを考えれば，表2(a)に示す内容がある．先行作業を(i, j)，後続作業を(j, k)としてこれら夫々を定式化すれば表2(b)の通りである．確定的な関係は表の不等式で与えられ，あいまい関係はメンバーシップ関数で表現される．例えば，FS関係のa-2は，「先行作業(i, j)が終了した後のγ_{ij}日以降から後続作業(j, k)を開始できるが，できる限りδ_{ij}日(ただし，$\delta_{ij}>\gamma_{ij}$)以降に開始するよう計画したい」である．この扱いとしてあいまいさの概念を用いれば，メンバーシップ関数$1-(F_{ij}+\delta_{ij}-S_{jk})/(\delta_{ij}-\gamma_{ij})$の値を大きくすることである．これは，$S_{jk}$をできる限り$F_{ij}+\delta_{ij}$またはそれ以上の値にすることを意味し，表中の$\lambda_1$をできる限り1に近づけることである．他のあいまい結合関係も同様にメンバーシップ関数を定義し，その値をできるだけ大きくすることで定式化でき表の通りである．

表2 作業間の結合関係の定義と定式化

(a)

次の作業を / 先行作業を				F 1. 終了できる． 2. 終了するよう計画する	S 1. 開始できる． 2. 開始できるよう計画する
F	a	終了してから	1	δ_{ij}以降に　FF(δ_{ij})	δ_{ij}以降に　FS(δ_{ij})
			2	γ_{ij}～δ_{ij}以降に，できれば δ_{ij}以降に　FF(γ_{ij}, δ_{ij})	γ_{ij}～δ_{ij}以降に，できれば δ_{ij}以降に FS(γ_{ij}, δ_{ij})
	c	終了する日時の	1		θ_{ij}前から　FS(θ_{ij})
			2		θ_{ij}～ϕ_{ij}前から，できれば ϕ_{ij}前から後に FS($-\theta_{ij}$, $-\phi_{ij}$)
S	a	開始してから	1	δ_{ij}以降に　SF(δ_{ij})	δ_{ij}以降に　SS(δ_{ij})
			2	γ_{ij}～δ_{ij}以降に，できれば δ_{ij}以降に　SF(γ_{ij}, δ_{ij})	γ_{ij}～δ_{ij}以降に，できれば δ_{ij}以降に　SS(γ_{ij}, δ_{ij})

(b)

F	a		1	$F_{ij}+\delta_{ij}\leqq F_{jk}$	$F_{ij}+\delta_{ij}\leqq S_{jk}$
			2	$1-\dfrac{F_{ij}+\delta_{ij}-F_{jk}}{\delta_{ij}-\gamma_{ij}}\geqq\lambda_1$	$1-\dfrac{F_{ij}+\delta_{ij}-S_{jk}}{\delta_{ij}-\gamma_{ij}}\geqq\lambda_1$
	c		1		$F_{ij}-\theta_{ij}\leqq S_{jk}$
			2		$1-\dfrac{F_{ij}-\phi_{ij}-S_{jk}}{\theta_{ij}-\phi_{ij}}\geqq\lambda_1$
S	a			$S_{ij}+\delta_{ij}\leqq F_{jk}$	$S_{ij}+\delta_{ij}\leqq S_{jk}$
			2	$1-\dfrac{S_{ij}+\delta_{ij}-F_{jk}}{\delta_{ij}-\gamma_{ij}}\geqq\lambda_1$	$1-\dfrac{S_{ij}+\delta_{ij}-S_{jk}}{\delta_{ij}-\gamma_{ij}}\geqq\lambda_1$

ただし，$\delta_{ij}>\gamma_{ij}$，$\theta_{ij}\geqq\phi_{ij}$
また，表(a)のFF(δ_{ij})などは，ネットワークにおける記号表示法

様々な結合関係は，これを図に表わすとネットワーク全体の理解に好都合である．そこで，アローダイアグラム上の記号法として図2に例示するものを提案する．半円上の記号でFF等の関係を表わし，()内の数字で，1つの場合は確定的，2つの場合はあいまい関係を表わす．また，これらで正はa，負はcの関係である．

3．あいまい結合関係を考慮した工程計画法PERT・FC

3.1　定式化とその解法

あいまい結合関係を考慮したネットワークは，各作業(i, j)の開始日S_{ij}及び終了日F_{ij}が変量で，その計画は，次の3観点を含むモデルとして定式化できる．

①作業間の結合関係は前述のとおりで，各結合関係の内容に応じ表2(b)のいずれかとして求められる．

②作業日数と開始日及び終了日との関係は，作業の中断を許すか否かで異なり，次の様に定式化される．

$$\text{中断を許さない}:F_{ij}-S_{ij}=\tau_{ij},\quad \text{中断を許す}:F_{ij}-S_{ij}\geqq\tau_{ij}\quad(\tau_{ij}=(i,j)\text{の作業日数})\tag{1}$$

③最早プランでは工事を極力早く完了させる事が目的である．この内容を$Z=\sum_{(i,j)\ W}(F_{ij}+S_{ij})$(以下ネットワーク日数という．W：作業集合)の最小化で表現する．

以上から，最早プランモデルは，①，②の条件と，④工事開始点のゼロ設定（$S_{1j}=0$((1, j)　N_1^+の全て．N_1^+:開始点1に接続する作業(1, j)の終了側節点集合）を制約条件とし，これらと⑤F_{ij}，S_{ij}の非負条件のも

とで，Zを最小にする事である．その際，あいまい結合関係を含まない場合と含む場合がある．前者は結局Zを目的とする単一目的問題となり通常の線形計画法が適用できる．後者は，前章の内容から，Zの他に，「$\phi=\lambda_1$をできるだけ大きくする」という目的が追加され，２目的問題となる．

２目的問題である最早プランモデルの解き方に２通り考えられる．１つは，Z及びϕの目標を定め目標計画法[4),5)]を活用することである．Zはネットワーク日数で，その値は当初不明であること，またZをできる限り小さくすることから0を目標にできる．他方，$\phi(\lambda_1)$は1が目標である．

これらZ，ϕの目標内容を考えるとき，本題は，「①，②，④の条件と

$$\sum_{(i,j)\in w} S_{ij}-\eta^{+}=0,\qquad \lambda_1+\xi^{-}=1.0 \tag{2}$$

を制約条件とし，かつF_{ij}，S_{ij}，η^+，ξ^-，λ_1の非負条件のもとで　$\Omega=\omega\xi^{-}+\eta^{+}$（$\omega$：重み）　(3)

を最小にする」こととなる．なお，ωは，η^+とξ^-との値の違いを配慮したものである．η^+はZと同じ値で，ξ^-は[0, 1]である．このことからωを考えなければ常にη^+重視の解がえられ，$\xi^-=1(\lambda_1=0)$となる．

最遅プランの場合も同様である．Zに関しBig M(Zに比し十分大きな値)を，ϕに関し1を目標として目標計画法により解くもので，式(2)，(3)に相当する式がそれぞれ次の式(4)，(5)となる．

$$\sum_{(i,j)\in w} S_{ij}+\eta^{-}=\text{Big M},\quad \lambda_1+\xi^{-}=1.0 \quad (4),\qquad \Psi=\eta^{-}+\omega\xi^{-} \quad (5)$$

結局最遅プランは，「①，②と④’最早プランの工期に基づく工事完了条件 $F_{in}\leqq T_n$（i　N_n^-の全て．N_n^-:完了点nに接続する作業(i, n)の開始側節点iの集合），式(4)およびS_{ij}，F_{ij}，η^-，ξ^-，λ_1の非負条件のもとで，式(5)のΨを最小にする」ことである．

いま１つは，前論文[1)]と同様にファジイ線形計画法を活用する方法である．Zに関し最大値，最小値を設定し，その間のメンバーシップ関数を定義し，その値をできるだけ大きくするということで妥協を図る．もともと工期は契約時に上限が与えられ，その範囲で自由に操作できる．他方，ネットワーク日数は，工期の設定の仕方により変化する．従って，Zはある程度妥協を図る余地がある．この考えから，Zをより小さくすることは，その最小値Z_L，最大値Z_Uを適当に設定し　$1-(Z-Z_L)/(Z_U-Z_L)\geqq\lambda_1$　(6)

において，λ_1を極力大きくすることとして捉えられる．このとき最早プランは，「①，②，④および式(6)の条件とS_{ij}，F_{ij}，λ_1に関する非負条件のもとで，$\phi=\lambda_1$を最大にする」単一目的問題に帰着する．

最遅プランの場合も同様であり，ネットワーク時間Zに関しこれをできる限り大きくすることは，

$1-(Z_U-Z)/(Z_U-Z_L)\geqq\lambda_1$　(7)　において，λ_1を極力大きくすることである．即ち，「①，②，④’および式(7)とS_{ij}，F_{ij}，λ_1に関する非負条件の下で，$\phi=\lambda_1$を最大にする」単一目的問題となる．

こうした最早，最遅プラン両モデルの解析にあたり，Z_L，Z_Uをいかに設定するか問題であるが，Zの各項は，その内容から当然正であり，Z_L=0とすることができる．他方，Z_Uは作業日数τ_{ij}による従来PERTの結果の２倍程度の値を用いれば十分である．あるいは，簡便にBig Mを用いることも考えられる．

このように，Z_L，Z_Uの設定は適当で，その如何により解が異なり，従ってλ_1やT_nも異なる．またλ_1はあいまいさの度合であり，1に近いほど確かな結合関係を表わす．即ち，λ_1が大きい程その最早・最遅プランは確かなもので実現性が高いと解釈できる．これから，現場判断に応じて基準値λ_{10}を定め，それを達成する計画の立案も一法である．或いは，λ_1が大きくなると工期T_nも大きくなる．このため，現実に許される工期内で最大のλ_1となる最早・最遅プランを検討することや，計画上の工期と契約上のそれとの間で調整を図りながら検討することも考えられる．

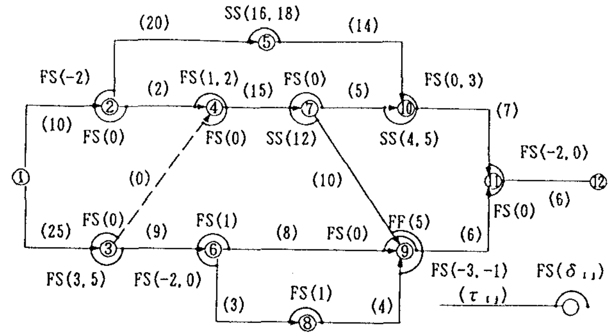


図1 計算例1

3.2　適用例および解析システムの提案

簡単のため，全ての作業が中断されない図1の例を考え，図中に示される結合関係がある場合を解けば以下の通りである．即ち，ネットワーク日数の妥協の上に，$\phi=\lambda_1$をできる限り大きくするという観点で，前述のファジイ線形計画法のモデルを作成し，作業日数に関する等号条件を代入し縮約すれば次式をうる．

Maximize　$\phi=\lambda_1$,　subject to　$S_{12}=S_{13}=0$　$\cdots\cdots\cdots\cdots$(a),

$S_{24}-S_{12}\geqq 10$,　$S_{25}-S_{12}\geqq 8$,　$S_{34}-S_{13}\geqq 25$,　$S_{36}-S_{13}-2\lambda_1\geqq 28$,　$S_{47}-S_{24}-\lambda_1\geqq 2$,　$S_{47}-S_{34}\geqq 0$,

$S_{5,10}-S_{25}-2\lambda_1\geqq 16$,　$S_{68}-S_{36}-2\lambda_1\geqq 7$,　$S_{69}-S_{36}\geqq 10$,　$S_{79}-S_{47}\geqq 12$,　$S_{7,10}-S_{47}\geqq 15$,

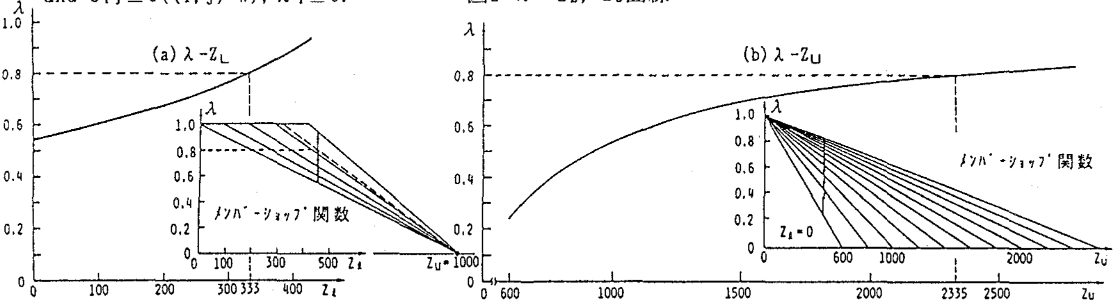
$S_{89}-S_{68}\geqq 4$,　$S_{9,11}-S_{69}\geqq 8$,　$S_{9,11}-S_{89}-2\lambda_1\geqq 1$,　$S_{9,11}-S_{79}\geqq 9$,　$S_{10,11}-S_{7,10}-\lambda_1\geqq 4$,

$S_{10,11}-S_{5,10}-3\lambda_1\geqq 14$,　$S_{11,12}-S_{10,11}-2\lambda_1\geqq 5$,　$S_{11,12}-S_{9,11}\geqq 6$,

$(Z_U-Z_L)\lambda_1+S_{12}+S_{13}+S_{24}+S_{25}+S_{34}+S_{36}+S_{47}+S_{5,10}+S_{68}+S_{69}+S_{79}+S_{7,10}+S_{89}+S_{9,11}+S_{10,11}+S_{11,12}\leqq Z_U$ (b)

and $S_{ij}\geqq 0((i,j)\ W)$, $\lambda_1\geqq 0$.

図2　$\lambda-Z_L$，Z_U曲線



Z_L=0を設定し，また，Z_Uに関しτ_{ij}による従来PERTの計算結果(Z^*=461)の2倍程度(1000)を設定する．その上で，Z_L又はZ_Uの値を増減させせを解けば図2のλ_1-Z_L及びλ_1-Z_U曲線をうる．

ここで，λ_1に関しある水準を保持しつつ計画するという意味でλ_{10}=0.8を考える．Z_U=1000と固定し，Z_Lを0より増大させれば，Z_L=333のときλ_1=0.8となる．また，Z_L=0を固定しZ_Uを増大させれば，Z_U=2335のときλ_1=0.8となる．これらは同じ解となり，図3の最早プラン($S_{ij}{}^E$, $F_{ij}{}^E$)がえられ，工期は59.6で，従来PERTによる結果(62)より2.4短かい．次に，工期を59.6に固定し最遅プランモデルを作成すれば，単に最早プランモデルで，式(a)，(b)を次式に置き換えれよい．

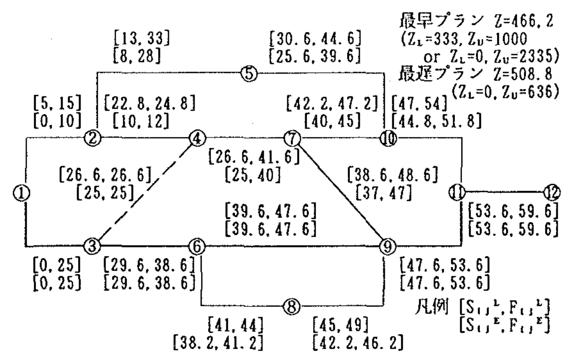


図3 最早及び最遅プラン(λ=0.8)

$S_{11,12}$=53.6　$\cdots\cdots\cdots$(a)'

$S_{12}+S_{13}+S_{24}+S_{25}+S_{34}+S_{36}+S_{47}+S_{5,10}+S_{68}+S_{69}+S_{79}+S_{7,10}+S_{89}+S_{9,11}+S_{10,11}+S_{11,12}-(Z_U-Z_L)\lambda\geqq Z_L$(b)'

Z_L=0，Z_U=1000よりZ_L，Z_Uを増減し解けば図4をうる．Z_Uを順次減ずるとき，λ_1は次第に大きくなり，遂

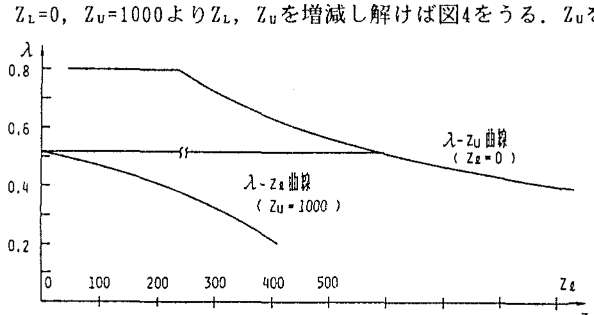


図4．最遅プランの$\lambda-Z_l$，$\lambda-Z_u$曲線

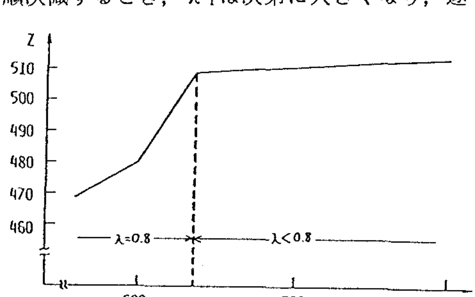


図5．最遅プランにおけるZとZ_uとの関係

には最早プランに対する値0.8に達するが，それ以上にはなりえない．すなわち，Z_Uをさらに減じてもλ_1は0.8のままで，Zのみが変化する．一方，Z_U=1000とし，Z_Lを0より増やすと，λ_1はさらに小さくなる．

上記最早プランに対する最遅プランは，$S_{11,12}$=53.6でかつλ=0.8のもとでZを最大にする解である．そこで，ZとZ_Uの関係を求めれば，解の様式に変化があり単純でないが，λ_1が0.8に達する近傍で図5のとおりである．図より，Z_Uを順次減じて最初にλ_1=0.8に達したときの解が最も大きなZを与えるといえ，本例ではZ_U=636である．このとき最遅プランは図3の($S_{ij}{}^L$, $F_{ij}{}^L$)となる．

目標計画法によるモデルを作成し解けば表3をうる．重みωが大きくなるに従いλ_1も増大すると考えられるが必ずしも連続的でない．本例では，ω=1～18の場合，λ_1=0のケースのみが，また，ω=19～の場合はλ_1=0，1.0の両ケースがえられる．このように目標計画法を用いるとき，ωを種々変化させてもλ_1の任意の値について求めることは困難で，他の数例をみてもλ_1=0，1の両極とその間の1，2がえられるに過ぎない．従って本法は，λ_1=0，1の両極解をうる上で都合のよい手法である．

表3 目標計画法による最早・最遅プラン

i, j \ ω	(a) 最早プラン 1～18	19～	(b) 最遅プラン $S_{11,12}$=52 1～	$S_{11,12}$=54 1～30	30～
1, 2	0	0	9	11	4
1, 3	0	0	0	2	0
2, 4	10	10	22	24	23
2, 5	8	8	17	19	12
3, 4	25	25	25	27	27
3, 6	28	30	28	30	30
4, 7	25	25	25	27	27
5, 10	24	26	33	35	30
6, 8	35	39	41	43	41
6, 9	38	40	38	40	40
7, 9	37	37	37	39	39
7, 10	40	40	43	45	42
8, 9	39	43	45	47	45
9, 11	46	48	46	48	48
10, 11	44	45	47	49	47
11, 12	52	54	52	54	54
λ	0	1.0	0	0	1.0
ξ⁻	1.0	0	1.0	1.0	0
Z	451	470	508	540	509
	*1	*2	*1		*2

以上を踏まえると，実用的にはファジイ線形計画法に基づいて，Z_LまたはZ_Uを変化させてλ_1或いはT_nをコントロールする本題の解析システムが提案できる．即ち，λ_1或いはT_nのコントロールは，例で明らかなように，最早プラン，最遅プランのいずれでも可能である．しかし，最遅プランはあくまでも最早プランによりえられた工期の基での解で，最早プランによるλ_1の値以上のものはえられない．このことから上述の操作は，最早プランモデルで行うことが本質であり，この点を踏まえた解析システムが図6である．(1)ネットワークの作成と結合関係の考察，(2)あいまい結合関係をもつモデルの解析，及び(3)それら解析に基づく最早・最遅プランの作成と解釈の各サブシステムで構成される．

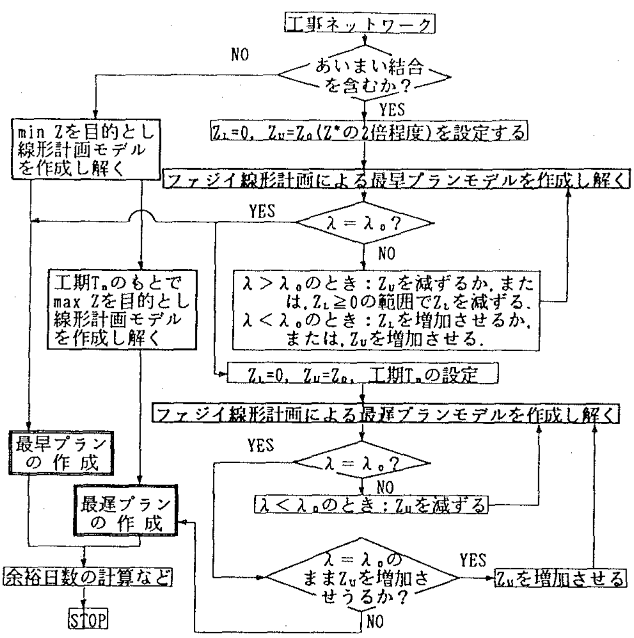


図6．PERT･FCの解析システム

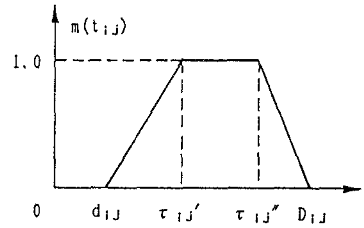


図7 タイプ4のメンバーシップ関数

これらのうち(2)は次の内容である．Z_L＝0とし，また，適当にZ_Uを設定する．次いで，最早プランモデルをファジイ線形計画法により解く．その結果，λ_1が基準以下であればZ_LまたはZ_Uを増加させ，基準以上であればZ_Uを減少させて解き直す．この試行錯誤を繰返せば遂に$\lambda_1 \fallingdotseq \lambda_{10}$に達し，そのときの解が最早プランである．なお以上は，λ_1の代りに工期T_nを操作する場合も同じで，図中のλとTとを入れ替えればよい．

4．作業日数，結合関係のあいまいさを同時に考慮した工程計画手法FPERT

4.1 定式化とその解法

作業日数のあいまいさと作業間のあいまい結合関係が同じプロジェクトで

同時に起こる場合も，基本的に前章の応用によりその工程計画手法が確立できる．

作業(i, j)の作業日数t_{ij}があいまい判断であることは，(i, j)のS_{ij}，F_{ij}に加えてt_{ij}も未知量となるが，これらに関し次式が成立する．

中断を許さない:$F_{ij}-S_{ij}=t_{ij}$

中断を許す:$F_{ij}-S_{ij}\geqq t_{ij}$ (8)

また，先行，後続作業の結合関係を考えれば，これらは§2に求めるとおりである。

他方，作業日数t_{ij}の判断は，内容的に4タイプあり，文献1)に定義するとおりで，その一覧が表4である．なおタイプ4は，文献1)と異なる．即ち，タイプ4のメンバーシップ関数を文献1)では三角形としたが，一般化すれば台形となる(図7)．また，文献1)では作業間で厳密な前後関係が成立するから，最早プランは，同じあいまいさのもとで存在する2通りのt_{ij}のうち小さい値のみを考えればよく，表中タイプ4の第1式のみが実質的意味をもつとした．しかし，本題は作業間の重複的，遅延的関係を考慮するから，必ずしも小さいt_{ij}のみが対象になるとは限らず，従って表中の全てを考慮する必要がある．

表4 作業日数の定義と定式化

タイプ	内　容	
1	「t_{ij}がτ_{ij}と確定的に推定できる.」 [－, τ_{ij}, －]	$t_{ij}=\tau_{ij}$
2	「t_{ij}は,最低限d_{ij}必要であると考えられるが,D_{ij}とすれば間違いないところであろう.」 「t_{ij}は,できればD_{ij}で処理することが望ましいが,それ以前に作業が完了する可能性もある.ただし,d_{ij}以下になることはないであろう.」 [d_{ij}, －, D_{ij}]	$1-\frac{D_{ij}-t_{ij}}{D_{ij}-d_{ij}}\geqq\lambda_2$ かつ，$t_{ij}\leqq D_{ij}$
3	「t_{ij}は，出来る限りd_{ij}であることが望まれるが,遅れた場合には最大限D_{ij}まで延びることもありうる.」 「t_{ij}は,最大限D_{ij}と考えられるが,基本的にはd_{ij}で完了する公算が大きい.」 [d_{ij}, －, D_{ij}]	$1-\frac{t_{ij}-d_{ij}}{D_{ij}-d_{ij}}\geqq\lambda_2$ かつ，$t_{ij}\geqq d_{ij}$
4	「t_{ij}は,出来る限りτ_{ij}' ～τ_{ij}'' であることが望まれるが,いくら急いでもd_{ij}まででであり,また,逆に遅れてもD_{ij}までに限られる.」 「t_{ij}は,最大限D_{ij}で,かつ最小限d_{ij}であり,基本的にはその中間のτ_{ij}' ～τ_{ij}'' になる公算が大きい.」 [d_{ij}, (τ_{ij}' / τ_{ij}''), D_{ij}]	$1-\frac{\tau_{ij}'-t_{ij}}{\tau_{ij}'-d_{ij}}\geqq\lambda_2$ かつ $1-\frac{t_{ij}-\tau_{ij}''}{D_{ij}-\tau_{ij}''}\geqq\lambda_2$

注)．表中の[－, τ_{ij}, －]などは，ネットワークにおける記号表示法である．

メンバーシップ関数が満足すべき条件で，表2ではλ_1を，表4ではλ_2を用い別々とした．これは，作業日数に要求されるあいまいさと，作業間結合関係のそれとは一般に異なると考えてのことである．

以上のことと，前章の解析例から判断してファジィ線形計画法の適用を考えれば，本題の最早プランモデルが次のようにえられる．すなわち，「①各節点で結合する作業ペア毎に，その内容に応じて表2の結合関係をあてはめ，また，②各作業毎に，作業日数に関する表4の関係をあてはめ，かつ式(8)をたて，さらに，③プロジェクトの開始条件としてゼロ設定を行ない($S_{1k}=0$(k　N_1^+の全て))，これらと，④S_{ij}，F_{ij}，t_{ij}，λ_1，λ_2の非負条件のもとで，⑤Zを最小にすること，及び⑥λ_1，λ_2を最大にすること」である．

また，この最早プランに対する最遅プランは，「上述の①，②，④と③' プロジェクトの完了日(工期)を，最早プランでえられた工期T_n^*に一致させること($F_{in}\leqq T_n^*$(i　N_n^-の全て))を条件として，⑤' Zを最大にすること，及び⑥の内容を達成すること」である．

上記最早及び最遅プランモデルはいずれも3目的問題である．従って，これを如何に解くかが課題であるが，前章の手法そのままではλ_1とλ_2をうまく操作する解法がえられず工夫が必要である．3目的のうち，Zは異質であり，λ_1とλ_2とは同質で［0, 1］の値をとる．そこで，λ_1とλ_2とを個別に考えるのでなく，その線形結合を求め，⑥に代えて　$\Phi=\lambda_1+\lambda_2$　(9)　を考えることとする[4]．

一方，Zはこれを直接扱うのでなく，制約条件化して妥協解を求めることとする．即ち，最早プランでは

$Z\leqq Z_u$　(Z_u=Zの上限値)　(10)　とし，最遅プランでは　$Z_L\leqq Z$　(Z_L=Zの下限値)　(11)

このとき最早プランモデルは，「①，②，③，④及び式(10)の条件のもとで，式(9)のΦを最大にする」問題となる．従って，当初適当なZ_uを仮定し，そのとき得られるλ_1，λ_2の値をみながらZ_uの値を増減させる．その際，Z_uとλ_1，λ_2に関し様々な組合せ解がえられ，その解釈から最早プランが求められることになる．

同様に，最遅プランモデルは，「①，②，③'，④及び式(11)の条件のもとで，式(9)のΦを最大にする」問題となる．当初最早プランのZ^*を用いて$Z_L=Z^*$とし，これより順次Z_Lを大きくし，これ以上にはなりえない限界に達した時の解が，当該最早プランに対する最遅プランとなる．

数学的には上述の通りであるが，このままではλ_1とλ_2が如何なる値になるかは解いてみなければ分らない．従って，場合によってはλ_1，λ_2のいずれかが極めて小さくなることもありうる．作業日数や結合関係

におけるあいまいさをできるだけ避け，実行上の確度を確保した工程計画を得るには，λ_1，λ_2がある程度大きいことが望ましい．即ち，λ_1，λ_2がある基準(λ_{10}，λ_{20})以上となる計画の立案が必要で，こうした内容の計画は容易にえられる．先の最早及び最遅プランモデルにおいて，λ_1，λ_2の代わりに$\lambda_1=\lambda_{10}+\lambda_1'$（$\lambda_1'\geqq 0$），$\lambda_2=\lambda_{20}+\lambda_2'$（$\lambda_2'\geqq 0$）を代入し解けばよく，このとき$\lambda_1\geqq\lambda_{10}$，$\lambda_2\geqq\lambda_{20}$が保証される．

4.2 適用例および解析システムの提案　　図8に関し，図中の作業日数，作業間の結合関係を考える．また，λ_1，λ_2について0.8，0.6以上となる計画を立てるものとする．最早プランモデルは，

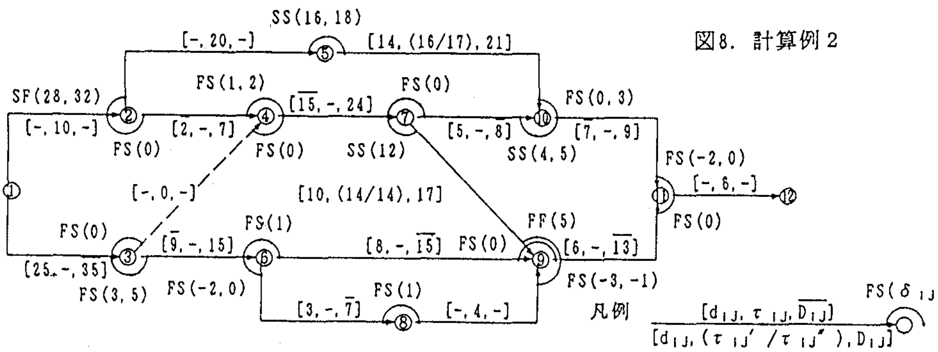
$$
\begin{aligned}
&\text{Maximize } \Phi'=\lambda_1'+\lambda_2', \quad \text{sub. to } S_{12}=0,\ S_{13}=0,\ S_{12}+t_{12}\leqq S_{24},\ S_{25}+t_{25}-S_{12}-4\lambda_1'\geqq 31.2,\\
&S_{13}+t_{13}-S_{34}\leqq 0,\ S_{36}-S_{13}-t_{13}-2\lambda_1'\geqq 4.6,\ S_{47}-S_{24}-t_{24}-\lambda_1'\geqq 1.8,\ S_{34}+t_{34}-S_{47}\leqq 0,\\
&S_{5,10}-S_{25}-2\lambda_1'\geqq 17.6,\ S_{36}+t_{36}-S_{68}+2\lambda_1'\leqq 0.4,\ S_{69}-S_{36}-t_{36}\geqq 1,\ S_{79}-S_{47}\geqq 12,\\
&S_{47}+t_{47}-S_{7,10}\leqq 0,\ S_{89}-S_{68}-t_{68}\geqq 1,\ S_{69}+t_{69}-S_{9,11}\leqq 0,\ S_{9,11}+t_{9,11}-S_{79}-t_{79}\geqq 5,\\
&S_{89}+t_{89}-S_{9,11}+2\lambda_1'\leqq 1.4,\ -S_{5,11}-t_{5,11}+S_{10,11}-3\lambda_1'\geqq 2.4,\ S_{10,11}-S_{7,10}-\lambda_1'\geqq 4.8,\\
&S_{9,11}+t_{9,11}-S_{11,12}\leqq 0,\ S_{10,11}+t_{10,11}-S_{11,12}+2\lambda_1'\leqq 0.4,\ t_{12}=0,\ -10\lambda_2'+t_{13}\geqq 31,\\
&5\lambda_2'+t_{24}\leqq 4,\ t_{24}\geqq 2,\ t_{25}=20,\ t_{34}=0,\ 6\lambda_2'+t_{36}\leqq 12,\ t_{36}\geqq 9,\ 9\lambda_2'+t_{47}\leqq 18.6,\\
&t_{47}\geqq 15,\ -2\lambda_2'+t_{5,10}\geqq 15.2,\ 4\lambda_2'+t_{5,10}\leqq 18.6,\ -4\lambda_2'+t_{68}\geqq 5.4,\ -7\lambda_2'+t_{69}\geqq 12.2,\\
&-4\lambda_2'+t_{79}\geqq 12.4,\ 3\lambda_2'+t_{79}\leqq 15.2,\ -3\lambda_2'+t_{7,10}\geqq 6.8,\ t_{89}=4,\ -7\lambda_2'+t_{9,11}\geqq 10.2,\\
&2\lambda_2'+t_{10,11}\leqq 7.8,\ t_{10,11}\geqq 7,\ t_{11,12}=6,\ \Sigma(S_{ij}+t_{ij})\leqq Z_u,\ \text{and } S_{ij},t_{ij},\lambda_1',\lambda_2'\geqq 0.
\end{aligned}
$$

上記モデルをZ_uの様々な値に対して解けば，λ_2は0.6のままでλ_1に関し様々な値を得る．そこで，例えば$\lambda_1\fallingdotseq 0.8$の場合の解を求めれば図9の結果（$S_{ij}{}^E$，$F_{ij}{}^E$）をえ，$T_n{}^*=74$，$Z^*=719.8$である．

本最早プランに対する最遅プランは，前モデルで，$S_{12}=S_{13}=0$に代え$S_{11,12}=68$を，また$\Sigma(S_{ij}+t_{ij})\leqq Z_u$に代え$Z_L\leqq\Sigma(S_{ij}+t_{ij})$を用いたモデルの解である．$Z_L$を719.8より順次増大しながら試行を繰返せば，最大値$Z_L=830.6$をうる．この時，図9の最遅プラン$(S_{ij}{}^L, F_{ij}{}^L)$をうる．

モデルからλ_1，λ_2に応じた様々な解をうるが，それらの工期は各々異なる．即ち，本例のλ_1，λ_2と工期との関係は図10のとおりである．工期を短縮するときλ_1，λ_2は小さくなり，計画の確からしさが犠牲になる．逆に工期を長くするとλ_1，λ_2は大きくなり，それだけ確かな計画になる．この点を踏まえ本モデル

図8．計算例2



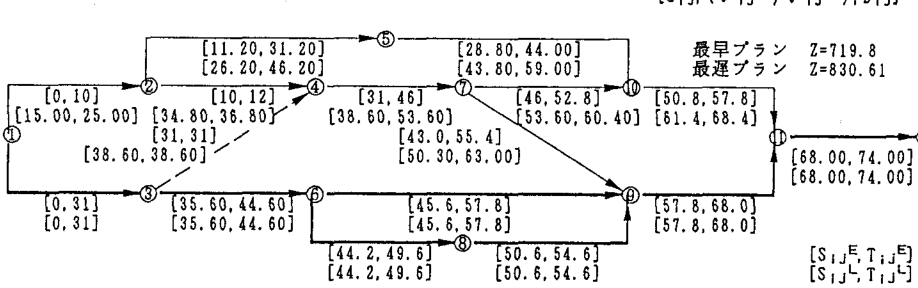


図9 最早及び最遅プラン($\lambda_1=0.8$，$\lambda_2=0.6$)

の解析システムを工夫すれば図11が提案できる．前半は最早プランに関するものである．あいまいさの基準値λ_{10}，λ_{20}と希望工期T_{no}を設定の上，できる限りこれらに合致するようZ_uを操作し，それで問題がある時λ_{10}，λ_{20}，T_{no}の見直しを行なうものである．なお現実問題として，λ_{10}，λ_{20}，T_{no}はそれほど厳格な基準でないから，上記試行はλ_{10}，λ_{20}，T_{no}に関し概略満足する程度で十分である．後半は最遅プランに関するものである．

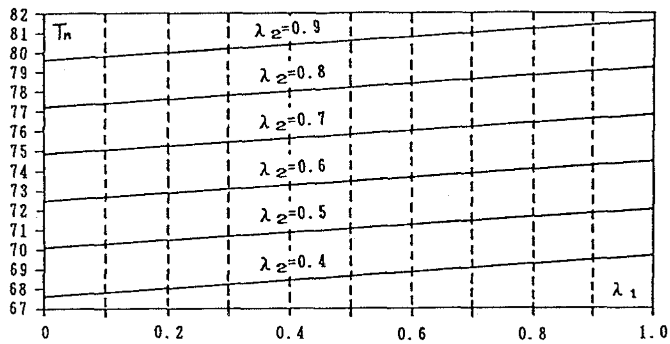


図10 工期Tnとλ_1，λ_2との関係

5 あとがき

作業間の多様な結合関係を検討し，これを含む工程計画法と，その応用である多様な結合関係及びあいまい作業日数を同時に含む工程計画手法を検討した．結果は以下のとおりである．

多様な結合関係のみの場合　(1)作業間の結合関係を現場技術者のヒアリングにより検討した．結果は表1の〇印の範囲で十分であると判断される．　(2)上記結合関係の中で，作業の開始，終了に上限がない場合をとりあげ，その判断が確定的な場合とあいまいな場合の扱いを可能にするモデルが提案できた．また，本モデルの解法として，目標計画法とファジイ線形計画法を検討したが，結果的には，あいまいさλ_1あるいは工期T_nについて連続的に操作できる後者が実用的である．なお，目標計画法は，$\lambda_1=0$，1の両極解を求めるのに好都合である．(3)ファジイ線形計画法による解法をもとに，その工程計画システムを図8のように提案する．

多様な結合関係＋あいまい作業日数の場合

(4)作業間の多様な結合関係を含み，また，作業日数のあいまいさを許すネットワークを対象に，その最早及び最遅プランモデルを3目的問題として定式化した．　(5)最早，最遅プランモデルについて，ネットワーク日数を制約条件化の上，2つのメンバーシップ関数の線形結合を目的関数とする単一目的問題に変換し，試行錯誤的に解析する方法を工夫した．　(6)上記解法を踏まえれば，確からしさと工期の希望水準に対する解析システムが図11の様に提案できる．

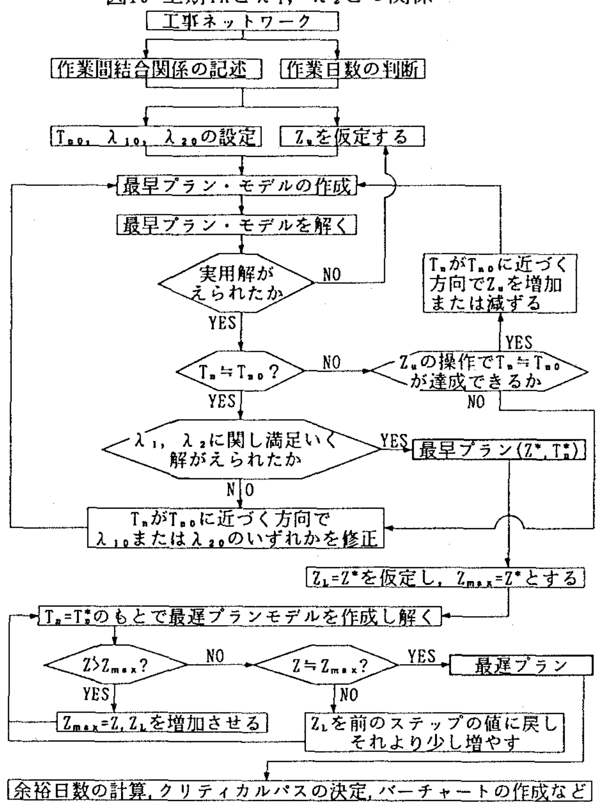


図11 FPERTの解析システム

参 考 文 献　1)樗木,M.タティッシュ,黄,池田:作業日数のあいまいさを考慮した工程計画手法FPERTの提案とその応用,土論, NO.419/IV-13,pp.115～122,1990.　2) K.C.Crandall:Project Planning with Precedence Lead/Lag Factors,Vol.4,No.3,pp.18～27,1973.　3) 山本幸司:拡張型Precedence Networkﾓﾃﾞﾙの線形計画法による解析,土論,No413/IV-12,pp.117～124,1990.　4)J.P.Ignizio:Linear Programming in Single- & Multiple-Objective Systems,Prentice-Hall,Inc.,1982.　5)樗木武:土木計画学,森北出版,1989.