

立体骨組構造物の応力図 画像表示のパソコンプログラム

盛岡市役所

○佐々木真一

岩手大学工学部土木工学科

宮本 裕 岩崎 正二 出戸 秀明

岩手大学教育学部技術科

辻野 哲司

岩手大学大学院工学研究科

方 東平

1. まえがき

これまで著者らは、若い技術者の理解のために、骨組構造物の静的外力による変位と応力をディスプレイ画面に表示するプログラムの理論と、それを用いた使用例について発表してきた^{3), 4), 5)}。

前回この方法を2次元解析から3次元解析に拡張して、立体骨組構造物の変位の性状を的確にディスプレイ画面に表示するプログラムを作り、いくつかの計算例を実行した⁶⁾。

今回はこれらの一連の研究のまとめとして、3次元解析における応力図画像表示のプログラムとそれを使った計算例を発表する。

すでに発表した2次元モデルと同様に、3次元モデルにおいても、有限要素法(FEM)の入門である骨組構造物の剛性マトリックス法(変位法)による計算をし、結果の応力図を描くことは重要である。それは自分の計算の確認ばかりでなく、応力分布状態の理解を深める有効な手段であり、一種の数値実験(シュミレーション)とも考えられる。つまり技術者としてのセンスをみがく疑似体験となるからである。

本研究のプログラムの特徴を箇条書にすると以下のようになる。

- ① 図形処理のため、日本電気製のPC9801のMS-DOS版BASIC言語を使用している。
- ② 対象となる立体骨組構造物の自由度は6(3方向変位、3方向回転角)である。
- ③ 対象とする荷重は一般的な台形分布荷重であり²⁾、この特別な例として、等分布荷重や水圧などの三角分布荷重も扱える。なお、部材の途中に分布する集中荷重も扱える。
- ④ 支点条件として、固定のほか、ヒンジ支点、ローラ支点、自由端も扱える。
- ⑤ 部材はラーメン部材とトラス部材が扱え、ディスプレイ画面上で色分けしている。
- ⑥ 数値実験であるが、精度の良いシュミレーションとしての教育用の利用が考えられる。
- ⑦ 視点座標を移動することにより、任意の方向からの透視図を表示することができる。
- ⑧ あらかじめ学習者のために計算例を作っており、利用者はメニュー形式により計算モデルを簡単に選ぶことができる。

2. FEMによる解法

平面骨組構造物の剛性マトリックスを座標変換することで、立体骨組構造物の剛性マトリックスが得られる。この考え方は後述のBEM(境界要素法)による内点の計算にも適用できる。2次元から3次元に拡張

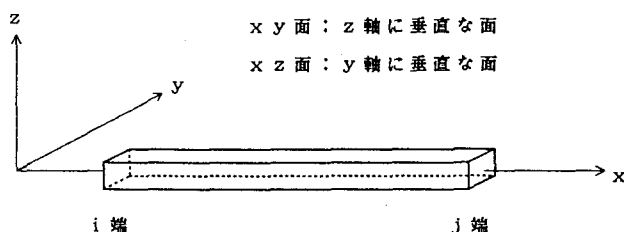


図-1 3次元空間における部材の局所座標系

するため、図-1に示すように、局所座標系では構造物の部材をx y面とx z面に分けて解析する。

すでに発表したように、x z面における図-2、3に示す台形分布荷重及び集中荷重を受ける部材の剛性マトリックスを求め²⁾、さらにx y面における剛性マトリックスと荷重項を求める⁶⁾。

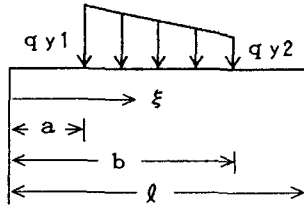


図-2 分布荷重

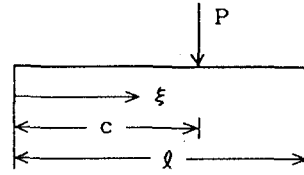


図-3 集中荷重

これらの剛性マトリックスを合計すると次のような立体骨組構造の剛性マトリックスが得られる。ただし P_{ix} , P_{iy} , P_{iz} , M_{ix} , M_{iy} , M_{iz} はそれぞれ i 端の x 軸方向の力, y 軸方向の力, z 軸方向の力, x 軸まわりのモーメント, y 軸まわりのモーメント, z 軸まわりのモーメントであり, δ_{ix} , δ_{iy} , δ_{iz} , θ_{ix} , θ_{iy} , θ_{iz} はそれらに対応する各軸方向の力と軸まわりの回転角である。

$$\begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ P_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \delta_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \delta_{jz} \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{jz} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ H_{iy} \\ H_{iz} \\ 0 \\ G_{iy} \\ G_{iz} \\ 0 \\ H_{jy} \\ H_{jz} \\ 0 \\ G_{jy} \\ G_{jz} \end{Bmatrix}$$

ここで、L:部材の長さ G:せん断弾性係数 E:ヤング係数 A_x :部材の断面積
 I_x :部材の軸方向ねじりモーメント I_y :部材のY方向断面二次モーメント
 I_z :部材のZ方向断面二次モーメント である。

3. BEMによる内点の計算

FEMのみによる結果を使って分布する変位や応力曲線を計算することは困難である。特に分布荷重による応力分布曲線の変化を生き生きと表すことはテクニックを要する。

ここではBEMの手法を使って、剛性マトリックス法で得られた節点変位と断面力を境界要素法における部材の両端の境界量として与えることにより、各部材の内点の変位と応力を計算する。

変位については文献 6) で述べられている。

以下、部材をxy面とxz面に分けて平面骨組構造物の解析と同様に計算する。

3. 1 曲げモーメント式

曲げモーメントの式は平面の場合は文献 5) に述べられており、立体の場合は文献 6) の変位の式を2度微分することで得られる。

(1) 内点の曲げモーメント式

(a) xy面の曲げモーメント式

任意点での曲げモーメント式は、

$$\begin{aligned} M_y(\xi) = & -EI \{ P_{iy} \cdot \tilde{w}^*(l, \xi) + M_{iz} \cdot \tilde{\theta}^*(l, \xi) + \theta_{iz} \cdot \tilde{M}^*(l, \xi) - \delta_{iy} \cdot \tilde{Q}^*(l, \xi) \\ & + P_{iy} \cdot \tilde{w}^*(0, \xi) + M_{iz} \cdot \tilde{\theta}^*(0, \xi) - \theta_{iz} \cdot \tilde{M}^*(0, \xi) + \delta_{iy} \cdot \tilde{Q}^*(0, \xi) \\ & - \int_0^l q_y(x) \cdot \tilde{w}^*(x, \xi) dx \} \end{aligned}$$

なお基本解 $\tilde{w}^*$ 、 $\tilde{\theta}^*$ 、 $\tilde{M}^*$ 、 $\tilde{Q}^*$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}^*(x, \xi) &= (r - l) / 2EI_y \\ \tilde{\theta}^*(x, \xi) &= \text{sgn}(x - \xi) / 2EI_y \\ \tilde{M}^*(x, \xi) &= 0 \\ \tilde{Q}^*(x, \xi) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ただし、
 $r = |x - \xi|$ 、
 $x - \xi > 0$ の時 $\text{sgn}(x - \xi) = 1$ 、
 $x - \xi < 0$ の時 $\text{sgn}(x - \xi) = -1$ 。

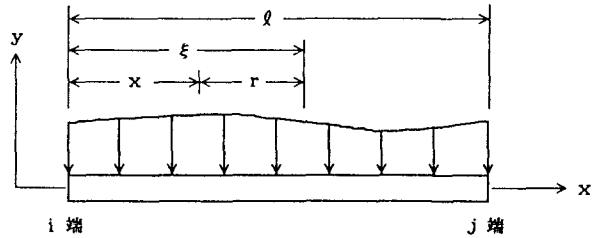


図-4

(b) xz面の曲げモーメント式

任意点での曲げモーメント式は、以下のとおりである。xy面の曲げモーメント式とは、プログラムの都合上、各項の符号が違ってくる。

$$\begin{aligned} M_z(\xi) = & -EI \{ P_{iz} \cdot \tilde{w}^*(l, \xi) - M_{iy} \cdot \tilde{\theta}^*(l, \xi) - \theta_{iy} \cdot \tilde{M}^*(l, \xi) - \delta_{iz} \cdot \tilde{Q}^*(l, \xi) \\ & + P_{iz} \cdot \tilde{w}^*(0, \xi) - M_{iy} \cdot \tilde{\theta}^*(0, \xi) + \theta_{iy} \cdot \tilde{M}^*(0, \xi) + \delta_{iz} \cdot \tilde{Q}^*(0, \xi) \\ & - \int_0^l q_y(x) \cdot \tilde{w}^*(x, \xi) dx \} \end{aligned}$$

なお基本解 $\tilde{w}^*$ 、 $\tilde{\theta}^*$ 、 $\tilde{M}^*$ 、 $\tilde{Q}^*$ もxy面と同様に断面2次モーメントが違っただけである。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}^*(x, \xi) &= (r - l) / 2EI_z & \tilde{M}^*(x, \xi) &= 0 \\ \tilde{\theta}^*(x, \xi) &= \text{sgn}(x - \xi) / 2EI_z & \tilde{Q}^*(x, \xi) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(2) 積分項

積分項については図-2、3の場合は次のようになる。

(a) xy面

$0 \leq \xi < a$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} q_y(x) \cdot \tilde{w}^*(x, \xi) dx \\ &= \frac{A}{2EI_z} \left\{ \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(\xi + l)(b^2 - a^2)}{2} \right\} \\ &+ \frac{B}{2EI_z} \left\{ \frac{b^2 - a^2}{2} - (\xi + l)(b - a) \right\} + \frac{P}{2EI_z} (r - l) \end{aligned}$$

$a \leq \xi \leq b$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} q_y(x) \cdot \tilde{w}^*(x, \xi) dx \\ &= \frac{A}{2EI_z} \left\{ \frac{\xi^3}{3} - \frac{\xi(a^2 + b^2)}{2} + \frac{a^3 + b^3}{3} + \frac{l(a^2 - b^2)}{2} \right\} \\ &+ \frac{B}{2EI_z} \left\{ \xi^2 - \xi(a + b) + \frac{(a^2 - b^2)}{2} + l(a - b) \right\} \\ &+ \frac{P}{2EI_z} (r - l) \end{aligned}$$

$b < \xi \leq l$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi} q_y(x) \cdot \tilde{w}^*(x, \xi) dx \\ &= \frac{A}{2EI_z} \left\{ -\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{(\xi + l)(b^2 - a^2)}{2} \right\} \\ &+ \frac{B}{2EI_z} \left\{ -\frac{b^2 - a^2}{2} + (\xi + l)(b - a) \right\} + \frac{P}{2EI_z} (r - l) \end{aligned}$$

ここで $A = \frac{q_{y2} - q_{y1}}{b - a}$, $B = \frac{q_{y1}b - q_{y2}a}{b - a}$

(b) xz面

xz面での積分項は、xy面の構成と同じである。しかし、載荷している荷重と断面2次モーメントは違うためそれぞれを入れ換える。

載荷荷重では $q_{y1} \rightarrow q_{z1}$ 及び $q_{y2} \rightarrow q_{z2}$ 、 G_{iz} 、 G_{jz} では $I_y \rightarrow I_z$ 、 H_{iz} 、 H_{jz} では $I_z \rightarrow I_y$ と入れ換えて、xz面での荷重項は求まる。

3. 2 セン断力式

せん断力の式についても、曲げモーメントの式と同様に平面の場合は文献 5) に述べられてあり、立体の場合は文献 6) の変位の式を3度微分することで得られる。

(1) 内点のせん断力式

(a) xy面のせん断力式

任意点でのせん断力式は、

$$\begin{aligned} Q_y(\xi) = & -EI \left\{ P_{jy} \cdot \tilde{w}^*(l, \xi) + M_{jz} \cdot \tilde{\theta}^*(l, \xi) + \theta_{jz} \cdot \tilde{M}^*(l, \xi) - \delta_{jy} \cdot \tilde{Q}^*(l, \xi) \right. \\ & + P_{iy} \cdot \tilde{w}^*(0, \xi) + M_{iz} \cdot \tilde{\theta}^*(0, \xi) - \theta_{iz} \cdot \tilde{M}^*(0, \xi) + \delta_{iy} \cdot \tilde{Q}^*(0, \xi) \\ & \left. - \int_0^{\xi} q_y(x) \cdot \tilde{w}^*(x, \xi) dx \right\} \end{aligned}$$

なお基本解 $\bar{w}^*$ 、 $\bar{\theta}^*$ 、 $\bar{M}^*$ 、 $\bar{Q}^*$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}^*(x, \xi) &= -\operatorname{sgn}(x-\xi)/2EI_y \\ \bar{\theta}^*(x, \xi) &= 0 \\ \bar{M}^*(x, \xi) &= 0 \\ \bar{Q}^*(x, \xi) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ただし、 $r = |x - \xi|$ 、 $x - \xi > 0$ の時 $\operatorname{sgn}(x - \xi) = 1$ 、
 $x - \xi < 0$ の時 $\operatorname{sgn}(x - \xi) = -1$ 。

(b) xz 面のせん断力式

任意点でのせん断力式は、以下のとおりである。 xy 面のせん断力式とは、プログラムの都合上、各項の符号が違ってくる。ここでは式は省略する。

(2) 積分項

積分項については図-2、3 の場合は次のようになる。

(a) xy 面

$0 \leq \xi < a$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^l q_y(x) \cdot \bar{w}^*(x, \xi) dx \\ &= \frac{A}{4EI_z} (a^2 - b^2) + \frac{B}{2EI_z} (a - b) - \frac{P}{2EI_z} \operatorname{sgn}(a - \xi) \end{aligned}$$

$a \leq \xi \leq b$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^l q_y(x) \cdot \bar{w}^*(x, \xi) dx \\ &= \frac{A}{4EI_z} (2\xi^2 - a^2 - b^2) + \frac{B}{2EI_z} (2\xi - a - b) \\ & \quad - \frac{P}{2EI_z} \operatorname{sgn}(a - \xi) \end{aligned}$$

$b < \xi \leq l$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^l q_y(x) \cdot \bar{w}^*(x, \xi) dx \\ &= \frac{A}{4EI_z} (b^2 - a^2) + \frac{B}{2EI_z} (b - a) - \frac{P}{2EI_z} \operatorname{sgn}(a - \xi) \end{aligned}$$

(b) xz 面

xz 面での積分項は、 xy 面の構成と同じである。しかし、載荷している荷重と断面2次モーメントは違うためそれぞれを入れ換える。

載荷荷重では $q_{y1} \rightarrow q_{z1}$ 及び $q_{y2} \rightarrow q_{z2}$ 、 G_{iz} 、 G_{jz} では $I_y \rightarrow I_z$ 、 H_{iz} 、 H_{jz} では $I_z \rightarrow I_y$ と入れ換えて、 xz 面での荷重項は求まる。

4. 座標変換

FEMとBEMでは、各部材内の応力分布の解析を局所座標系で考え、画像表示するためには、全体座標系に変換しなければならない。そのために、各部材に回転マトリックス[C]を用意する^{1), 6)}。

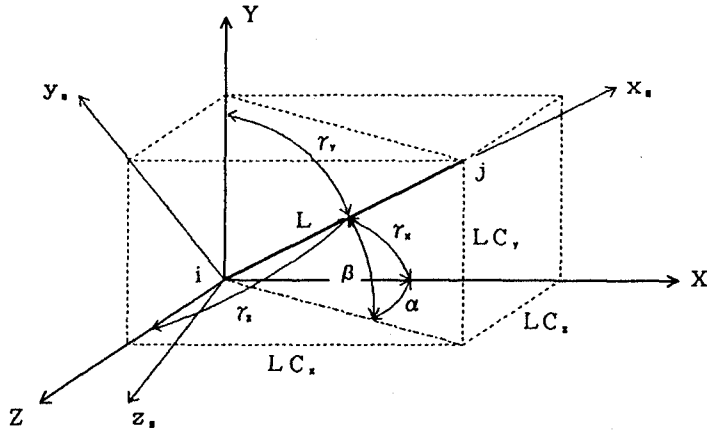


図-5

5. 立体図形の画面表示

立体図形をディスプレイ画面に表示する方法はいくつかあるが、ここでは参考文献 9)にある方法を用いて、全体座標系からカメラ座標系へ変換して表示する。なお詳細は紙面の都合で省略する。

以上述べたすべての計算の手順をまとめると図-6のようになる。

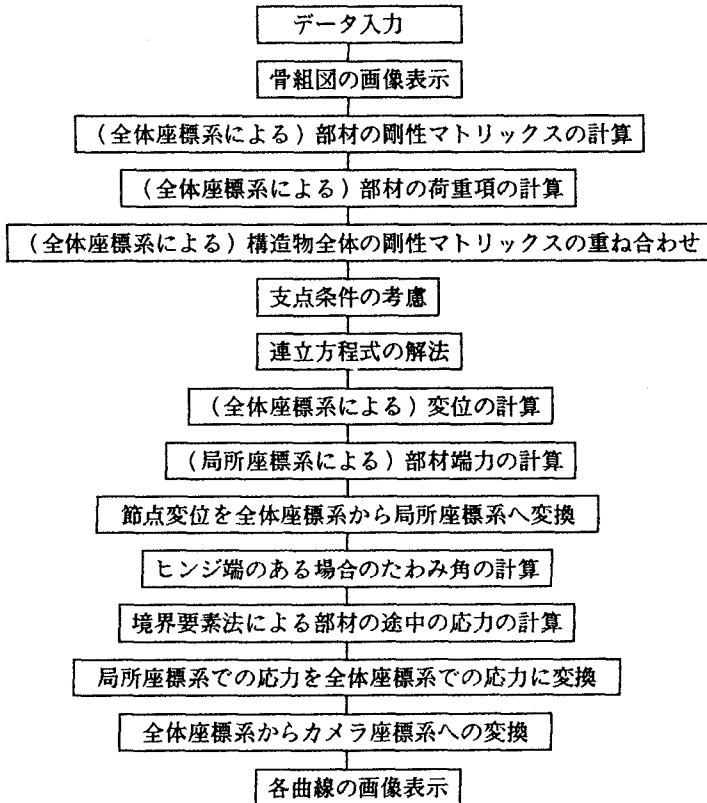
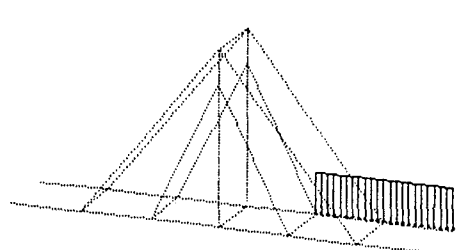


図-6

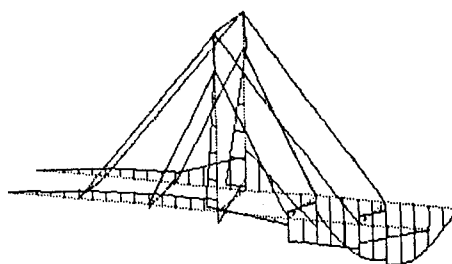
6. 出力例

このプログラムを使って、応力図を描いたものを示す。図-7は斜張橋の主桁の一部に等分布荷重が作用する場合の荷重図、曲げモーメント図、せん断力図である。

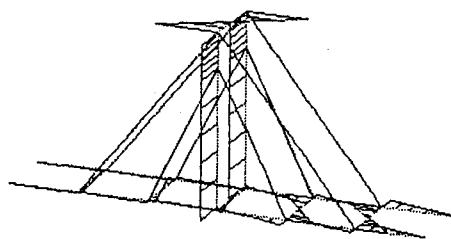
ただしディスプレイ画面に適当なバランスで変位や応力が配置されるよう、節点の変位の中の最大値で調整している。



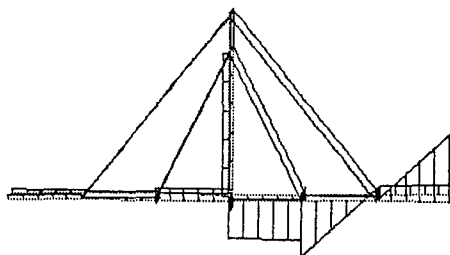
荷 重 図



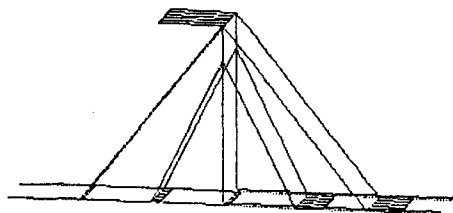
Y軸回りのモーメント図



Z軸回りのモーメント図



垂直方向のせん断力図



水平方向のせん断力図

図-7

7. あとがき

BEMを使わなくても、たとえば還元法などの基本式^{7),8)}で途中の値は計算される。また著者らは分布荷重を有する梁の微分方程式をLaplace変換を用いて解くことも提唱した²⁾。それらの基本式を使っても座標変換などの処置をして空間の座標値や変位値を計算しプロットすることになるので、本方法のように一貫してプログラム処理をするのが効率的であろう。

またBEMによらずFEMの内挿関数を用いても部材の途中の数値は計算できるが、この骨組部材の場合はたまたま上記の文献にあるような解析解と一致するが、あくまでもFEMは近似解であり、曲げねじり部材などに適用するときは、基本解を解析解から引用した場合に、より真の値に近い答が得られる(数値的にも、また陽形で厳密解としての公式としてもあつかえる)。BEMとFEMはこのように互いに補いあいながら使用するのがよいと考えている。

本プログラムを使うと、任意形状の立体骨組構造物の応力の分布の状態や挙動がユーザに明らかになり、実用的なシュミレーションの道具として価値があると思われる。透視図としての利用もあわせて考えると、本プログラムは、広範囲な一般的な構造物の変位の挙動が把握できることになる。

高速BASICコンパイラ(Quick BASIC)を用いると機種の違いを乗り越えてこのプログラムの図形処理できるが、現在Quick BASIC版を開発中である。

このプログラムは公開するので、興味のある方は問い合わせさせていただきたい。

本プログラムの開発にあたって、(株)CSKにご援助を受けたことを感謝する。

参考文献

1. ビューフェ他(成岡昌夫訳): コンピュータによる骨組構造解析、培風館(1972)
2. 渡辺昇・宮本裕: 時刻歴地震応答解析法、技報堂 (1985)
3. 竹洞聡・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明・辻野哲司: FEMとBEMを用いた骨組構造解析の教育パソコンシステム、土木学会第12回電算機利用に関するシンポジウム講演集(1987)
4. Miyamoto, Iwasaki, Deto, Takehora and Tsujino: Personal Computer Drawing Program of Plane Frame Structure by FEM and BEM, Proceedings of the 2nd China-Japan Symposium on Boundary Element Methods, pp375~382 (1988)
5. 高久田英一郎・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明: 骨組構造物の応力変位図画像表示のパソコンプログラム、土木学会第14回土木情報システムシンポジウム講演集(査読論文)(1989)
6. 金沢陽介・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明: 立体骨組構造物の変位図画像表示のパソコンプログラム、土木学会第15回土木情報システムシンポジウム講演集(査読論文)(1990)
7. ケルステン(伊藤学訳): 構造力学における還元法、技報堂(1968)
8. 大地羊三: 構造解析とコンピュータ、産業図書(1971)
9. 戸川隼人: 続・マイコンによる有限要素解析、培風館(1984)