

立体骨組構造物の変位図 画像表示のパソコンプログラム

盛岡市役所

○金沢陽介

岩手大学工学部土木工学科

宮本 裕

岩崎正二

出戸秀明

岩手大学教育学部技術科

辻野哲司

木更津高専土木工学科

佐藤恒明

1. ま え が き

これまで著者らは、構造解析に用いる有限要素法 (FEM) を若い技術者が学ぶ際に、よりよく理解するための補助手段としての、結果の応力変位をディスプレイ画面に表示するプログラムの理論とそれを用いた使用例について発表してきた。^{3), 4), 5)}

今回この方法を2次元解析から3次元解析に拡張して、立体骨組構造物の変位の性状を的確にディスプレイ画面に表示するプログラムを作り、いくつかの計算例を実行したので、この3次元解析における画像表示のプログラムのポイントを発表する。

すでに発表した2次元モデルと同様に、3次元モデルにおいても、有限要素法 (FEM) の入門である骨組構造物の剛性マトリックス法 (変位法) による計算をし、結果のたわみ図を描くことは重要である。それは自分の計算の確認ばかりでなく変形性状の理解を深める有効な手段であり、一種の数値実験 (シュミレーション) とも考えられる。3次元の場合は視点の位置を変えることにより、種々の透視図を描くことができ理解を助けることになる。

本研究のプログラムの特徴を箇条書にすると以下ようになる。

- ① 図形処理のため、日本電気製のPC9801のBASIC言語を使用している。
- ② 対象となる立体骨組構造物の自由度は6 (3方向変位、3方向回転角) である。
- ③ 対象とする荷重は一般的な台形分布荷重であり²⁾、この特別な例として、等分布荷重や水圧などの三角分布荷重も扱える。なお、部材の途中に分布する集中荷重も扱える。
- ④ 支点条件として、固定のほか、ヒンジ支点、ローラ支点、自由端も扱える。
- ⑤ 部材はラーメン部材とトラス部材が扱える。
- ⑥ 数値実験であるが、精度の良いシュミレーションとしての教育用の利用が考えられる。
- ⑦ 視点入力値を変えることにより、任意の方向からの透視図を表示することができる。

2. FEMによる解法

平面骨組構造物の剛性マトリックスを座標変換することで、立体骨組構造物の剛性マトリックスが得られる。この考え方は後に述べるBEMによる内点の計算にも適用できる。そのため二次元から三次元に拡張するため、図-1に示すように、局所座標系では構造物の部材をxy面とxz面に分けて解析する。

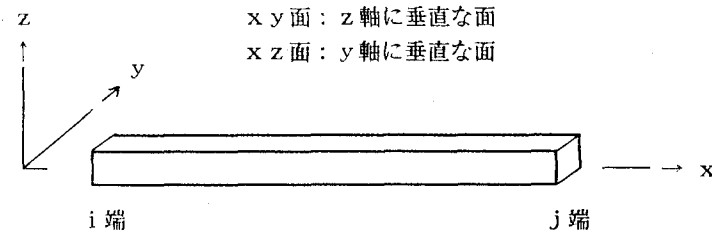


図-1 3次元空間における部材の局所座標系

すでに発表したように、 xz 面における図-2、3に示す台形分布荷重と集中荷重を受ける部材の剛性マトリックスはつぎようになる^{2), 5)}。

$$\begin{Bmatrix} M_{1y}/EI_y \\ M_{2y}/EI_y \\ P_{1z}/EI_y \\ P_{2z}/EI_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/\ell & 2/\ell & -6/\ell^2 & +6/\ell^2 \\ 2/\ell & 4/\ell & -6/\ell^2 & +6/\ell^2 \\ -6/\ell^2 & -6/\ell^2 & 12/\ell^3 & -12/\ell^3 \\ +6/\ell^2 & +6/\ell^2 & -12/\ell^3 & 12/\ell^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1y} \\ \theta_{2y} \\ \delta_{1z} \\ \delta_{2z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_{1y} \\ G_{2y} \\ H_{1z} \\ H_{2z} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (1)}$$

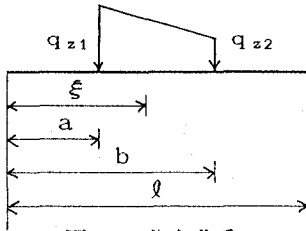


図-2 分布荷重

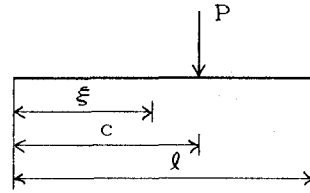


図-3 集中荷重

これに対して xy 面における剛性マトリックスと荷重項は、 I_y を I_z に置き換えればよい。

これらの剛性マトリックスを合計すると次のような立体骨組構造の剛性マトリックスが得られる。

ただし P_{1x} , P_{1y} , P_{1z} , M_{1x} , M_{1y} , M_{1z} はそれぞれ i 端の x 軸方向の力、 y 軸方向の力、 z 軸方向の力、 x 軸まわりのモーメント、 y 軸まわりのモーメント、 z 軸まわりのモーメントであり、 δ_{1x} , δ_{1y} , δ_{1z} , θ_{1x} , θ_{1y} , θ_{1z} はそれらに対応する各軸方向の力と軸まわりの回転角である。(この場合、式(1), (2)の他に、立体トラス部材および単純ねじり部材の剛性マトリックスを加えている)

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ P_{1z} \\ M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ P_{2z} \\ M_{2x} \\ M_{2y} \\ M_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EA_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_x/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & -12EI_x/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 & 0 & 0 & -12EI_y/L^3 & 0 & -6EI_y/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -GI_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 4EI_x/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & 2EI_x/L & 0 \\ 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_x/L & 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_x/L \\ -EA_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & EA_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 & 0 & 12EI_z/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_z/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_x/L^3 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 0 & 12EI_x/L^3 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_x/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & GI_x/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 2EI_x/L & 0 & 0 & 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & 4EI_x/L & 0 \\ 0 & 6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_x/L & 0 & -6EI_x/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_x/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \delta_{2z} \\ \theta_{2x} \\ \theta_{2y} \\ \theta_{2z} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ H_{1y} \\ H_{1z} \\ 0 \\ G_{1y} \\ G_{1z} \\ 0 \\ H_{2y} \\ H_{2z} \\ 0 \\ G_{2y} \\ G_{2z} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (2)}$$

ここで

L : 部材の長さ G : せん断弾性係数 E : ヤング係数 A_x : 部材の断面積
 I_x : 部材の軸方向ねじりモーメント I_y : 部材の Y 方向断面二次モーメント
 I_z : 部材の Z 方向断面二次モーメント

である。

このようにして得られた各部材の剛性マトリックスを、後述の座標変換マトリックスを使って全体座標で表してから、それらの剛性マトリックスを重ね合わせて全体剛性マトリックスを作り、支点条件を考慮して連立方程式を解き、節点変位が求められる。

3. BEMによる内点の計算

境界要素法での解析は、剛性マトリックス法で得られた節点変位と断面力を境界要素法における部材の両端の境界量として与えることにより、各部材の内点の変位を計算する。まず、部材を x y 面と x z 面に分けて平面骨組構造物の解析と同様に計算する。

(a) x y 面のたわみ式

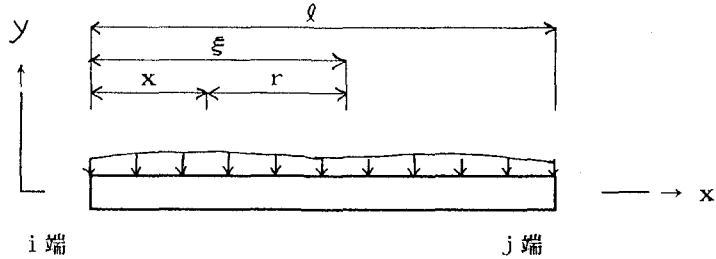


図-4 たわみ式での記号要素

任意点でのたわみ式は文献5)より次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta y(\xi) = & P_{jy} \cdot w^*(l, \xi) + M_{jz} \cdot \theta^*(l, \xi) + \theta_{jz} \cdot M^*(l, \xi) - \delta_{jy} \cdot Q^*(l, \xi) \\ & + P_{iy} \cdot w^*(0, \xi) + M_{iz} \cdot \theta^*(0, \xi) - \theta_{iz} \cdot M^*(0, \xi) + \delta_{iy} \cdot Q^*(0, \xi) \\ & - \int_0^l q_y(x) \cdot w^*(x, \xi) dx \end{aligned} \quad \text{---- (3)}$$

なお基本解 w^* 、 θ^* 、 M^* 、 Q^* は次のようになる、

$$\begin{aligned} w^*(x, \xi) &= (2l^3 + r^3 - 3lr^2) / 12EI_y \\ \theta^*(x, \xi) &= r(r - 2l) \operatorname{sgn}(x - \xi) / 4EI_y \\ M^*(x, \xi) &= -(r - l) / 2 \\ Q^*(x, \xi) &= -\operatorname{sgn}(x - \xi) / 2 \end{aligned} \quad \text{---- (4)}$$

ただし $r = |x - \xi|$

$x - \xi > 0$ の時 $\operatorname{sgn}(x - \xi) = 1$

$x - \xi < 0$ の時 $\operatorname{sgn}(x - \xi) = -1$

積分項については図-2と図-3の場合は次のようになる。

① $0 \leq \xi < a$ のとき

$$\begin{aligned} & \int_0^l q_y(x) \cdot w^*(x, \xi) dx \\ &= \frac{A}{12EI_z l} \left[\frac{(b - \xi)^5 - (a - \xi)^5}{5} + \frac{(b - \xi)^4 - (a - \xi)^4}{4} (\xi - 3l) \right. \\ & \quad \left. - l\xi \{ (b - \xi)^3 - (a - \xi)^3 \} + l^3 \{ (b - \xi)^2 - (a - \xi)^2 \} + 2l^3 \xi (b - a) \right] \\ &+ \frac{B}{12EI} \left[2l^3 (b - a) + \frac{(b - \xi)^4 - (a - \xi)^4}{4} - l \{ (b - \xi)^3 - (a - \xi)^3 \} \right] \\ &+ \frac{P}{12EI_z} (2l^3 + r^3 - 3lr^2) \end{aligned} \quad \text{---- (5)}$$

② $a \leq \xi \leq b$ のとき

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l q_y(x) \cdot w^*(x, \xi) dx \\
 &= \frac{A}{12E I_z} \left\{ (b^2 - a^2) \ell^3 + \frac{\xi + 4a}{20} (a - \xi)^4 - \frac{\ell}{4} (\xi + 3a)(\xi - a)^3 \right. \\
 &+ \left. \frac{\xi + 4b}{20} (b - \xi)^4 - \frac{\ell}{4} (\xi + 3b)(b - \xi)^3 \right\} + \frac{B}{12E I} \left[2\ell^3(b - a) \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{4} \left\{ (b - \xi)^4 + (a - \xi)^4 \right\} - \ell \left\{ (b - \xi)^3 - (a - \xi)^3 \right\} \right] \\
 &+ \frac{P}{12E I_z} (2\ell^3 + r^3 - 3\ell r^2) \quad \text{---- (6)}
 \end{aligned}$$

③ $b < \xi \leq l$ のとき

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l q_y(x) \cdot w^*(x, \xi) dx \\
 &= \frac{A}{12E I_z} \left[\frac{(\xi - b)^5 - (\xi - a)^5}{5} - \frac{(\xi - b)^4 - (\xi - a)^4}{4} (\xi + 3\ell) \right. \\
 &+ \left. \ell \xi \left\{ (\xi - b)^3 - (\xi - a)^3 \right\} + \ell^3 \left\{ (\xi - b)^2 - (\xi - a)^2 \right\} - 2\ell^3 \xi (a - b) \right] \\
 &+ \frac{B}{12E I_z} \left[2\ell^3(b - a) - \frac{(\xi - b)^4 - (\xi - a)^4}{4} + \ell \left\{ (\xi - b)^3 - (\xi - a)^3 \right\} \right] \\
 &+ \frac{P}{12E I_z} (2\ell^3 + r^3 - 3\ell r^2) \quad \text{---- (7)}
 \end{aligned}$$

ただし

$$A = \frac{q_2 - q_1}{b - a}, \quad B = \frac{q_1 b - q_2 a}{b - a}, \quad r = |c - \xi|$$

(b) xz 面のたわみ式

xz 面でのたわみ式は、以下のとおりである。 xy 面のたわみ式とは、プログラムの都合上、各項の符号が違ってくる。載荷している荷重と断面二次モーメントは違うためそれぞれを入れ換える。

すなわち、 $q_y \rightarrow q_z$ 、 $I_y \rightarrow I_z$ と入れ換えればよい。

以上のたわみ式を用いて各部材の材端 i と材端 j の内点の座標を決める。ただし、内点の数は、あらかじめ設定する。例えば、ディスプレイ上に画像表示されたある部材の材端 i と材端 j の間のドット数 (PC-9801RXでは、 640×400 と 640×200 のドット数のグラフィック画面が用意されている) が 30 ドットの時に、内点を 31 個以上とっても意味がないので、その辺を考慮して設定する。

これによって求めた内点の xy 面と xz 面の変位を z 座標点と y 座標点で表わし、 xyz 座標点を、それぞれ座標変換した後、ディスプレイ上に重ね合わせて三次元のたわみ曲線を描く。

BEMによる内点の変位などは局所座標系でのものであるの、画面に表示するときは、全体座標系での数値に変換する必要がある。

主な計算の手続きは図-6のようになる。

4. 座標変換

剛性マトリックス法と境界要素法では、各部材での解析を局所座標系で考え、画像表示するためには、全体座標系に変換しなければならない。そのために、各部材に回転マトリックス $[C]$ を用意する。¹⁾

各部材の i 端と j 端の座標が全体座標系に関して、方向余弦はつぎのように書くことができる。

$$C_x = \frac{X_j - X_i}{L} \quad C_y = \frac{Y_j - Y_i}{L} \quad C_z = \frac{Z_j - Z_i}{L}$$

ここに

$$L = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + (Z_j - Z_i)^2}$$

で、 (X_i, Y_i, Z_i) および (X_j, Y_j, Z_j) は、それぞれ全体座標系に関する部材の i 端、 j 端の座標値である。

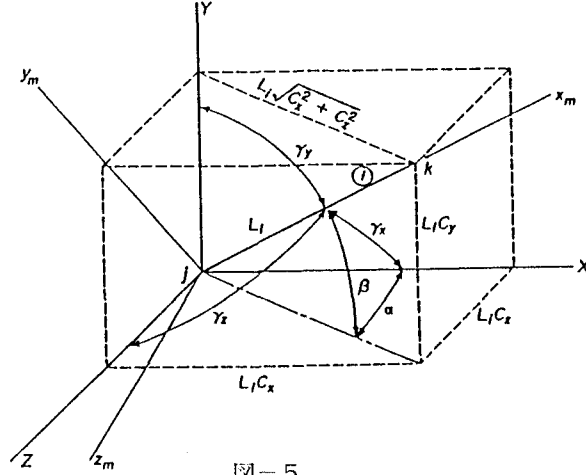


図-5

(1) ZYX変換

水平部材の座標変換に用いる。

$$[C_Z] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_z \sin \Psi - C_y \cos \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \frac{-C_y C_z \sin \Psi - C_x \cos \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \sin \Psi \\ \frac{-C_x C_z \cos \Psi - C_y \sin \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \frac{-C_y C_z \cos \Psi - C_x \sin \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_y^2} \cos \Psi \end{bmatrix}$$

(2) YZX変換

垂直部材の座標変換に用いる。

$$[C_Y] = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ \frac{-C_x C_y \cos \Psi - C_z \sin \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \cos \Psi & \frac{-C_y C_z \cos \Psi + C_x \sin \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \\ \frac{C_x C_z \sin \Psi - C_z \cos \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} & -\sqrt{C_x^2 + C_z^2} \sin \Psi & \frac{C_y C_z \sin \Psi + C_x \cos \Psi}{\sqrt{C_x^2 + C_z^2}} \end{bmatrix}$$

(3) 変換マトリックス

以上に定めた各部材の回転マトリックスを重ね合わせて、全体の変換マトリックスをつくる。これは、部材の変位や断面力を局所座標系から全体座標系へ変換するときに用いる。

$$\begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11}C_{12}C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}C_{22}C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}C_{32}C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}C_{12}C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{21}C_{22}C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{31}C_{32}C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}C_{12}C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21}C_{22}C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{31}C_{32}C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}C_{12}C_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{21}C_{22}C_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{31}C_{32}C_{33} & 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \\ \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \delta_{1z} \\ \theta_{1x} \\ \theta_{1y} \\ \theta_{1z} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

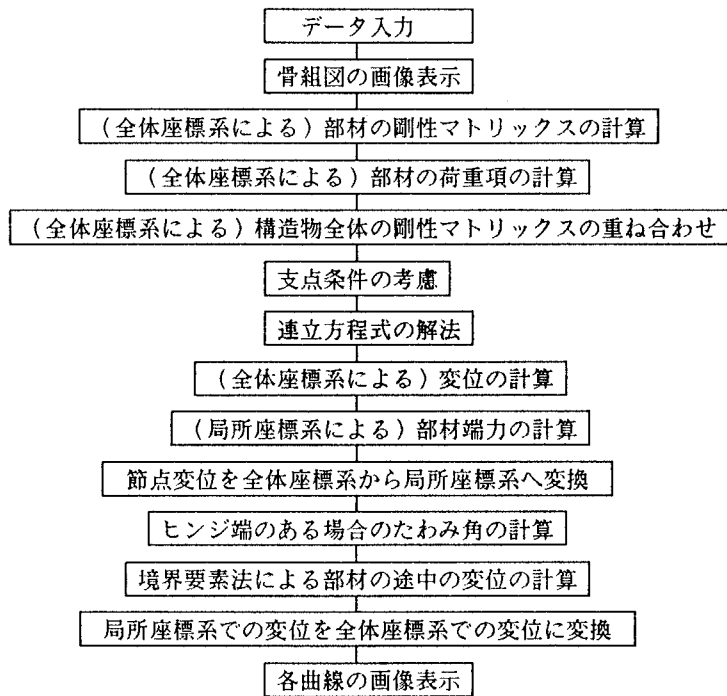


図-6

5. 立体図形の画面表示

立体図形をディスプレイ画面に表示する方法はいくつかあるが、ここでは参考文献8)による方法を紹介する。

いま 全体座標系：X, Y, Z

全体座標系における視点の位置：X₀, Y₀, Z₀

全体座標系における被写体の図心：X_c, Y_c, Z_c

カメラ座標系：XX, YY, ZZ

とすれば、全体座標系からカメラ座標系への変換は次式で得られる。

$$\begin{Bmatrix} XX \\ YY \\ ZZ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X-X_0 \\ Y-Y_0 \\ Z-Z_0 \end{Bmatrix} \quad \text{----- (9)}$$

ここで

$$C_{11} = \frac{X_c - X_0}{L_1} \quad C_{21} = \frac{Y_c - Y_0}{L_1} \quad C_{31} = \frac{Z_c - Z_0}{L_1}$$

$$L_1 = \sqrt{(X_c - X_0)^2 + (Y_c - Y_0)^2 + (Z_c - Z_0)^2}$$

$$C_{12} = \frac{Y_0 - Y_c}{L_2} \quad C_{22} = \frac{X_c - X_0}{L_2} \quad C_{32} = 0$$

$$L_2 = \sqrt{(X_c - X_0)^2 + (Y_c - Y_0)^2}$$

$$C_{13} = C_{21}C_{32} - C_{31}C_{22}, \quad C_{23} = C_{31}C_{12} - C_{11}C_{32}, \quad C_{33} = C_{11}C_{22} - C_{21}C_{12}$$

さらに

$$H = YY/XX, \quad V = ZZ/XX$$

で与えられるH, V(それぞれのフィルム面上の横座標と縦座標)をスケールリングして立体図を表示することになる。

6. 出力例

このプログラムを使って、変位図を描いたものを示す。図-7は斜張橋の主桁の途中に等分布荷重が作用する場合である。実線は本方法によるもの、破線は各節点での数値を直線でつないだものである。

ただしディスプレイ画面に適当なバランスで変位や応力が配置されるよう、節点の変位の中の最大値で調整している。そのため部材間の数値がこの最大値をはなはだしく上回るときは、図が画面からはみだすこともあり、計算例によっては最大値の場所になりそうな節点を新しく設けて再計算する必要がある。なお図-7(b), (c)は視点の位置(X_0, Y_0, Z_0)をそれぞれ(50, -100, 80), (-100, -50, 50)とした。

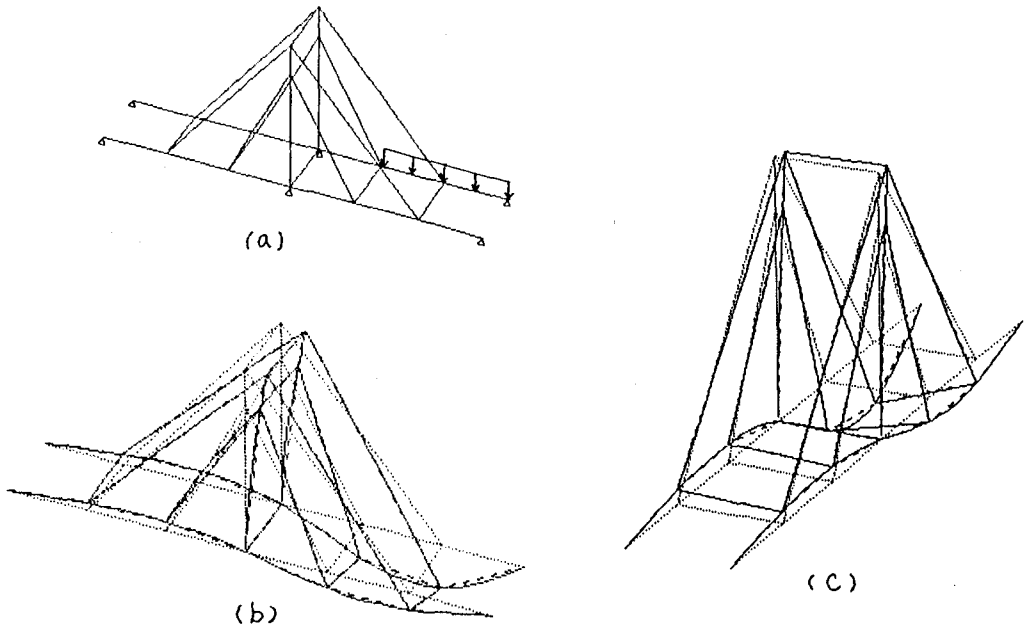


図-7

6. あとがき

BEMを使わなくても、たとえば還元法などの基本式^{6), 7)}で途中の値は計算される。このことは前論文⁵⁾においても説明したとおりであるが、それらの基本式を使っても座標変換などの処置をして空間の座標値や変位値を計算しプロットすることになるので、本方法のように一貫してプログラム処理をするのが効率的であろう。

またBEMによらずFEMの内挿関数を用いても部材の途中の数値は計算できるが、この骨組部材の場合はたまたま上記の文献にあるような解析解と一致するが、あくまでもFEMは近似解であり、曲げねじり部材などに適用するときは、基本解を解析解から引用した場合に、より真の値に近い答が得られる（数値的にも、また陽な形で厳密解としての公式としてもあつかえる）。BEMとFEMはこのように互いに補いあいながら使用するのがよいと考えている。

本プログラムを使うと、任意形状の立体骨組構造物の変位の分布の状態や挙動がユーザに明らかになり、実用的なシュミレーションの道具として価値があると思われる。透視図としての利用もあわせて考えると、本プログラムは、広範囲な一般的な構造物の変位の挙動が把握できることになる。

応力分布についても現在プログラムを作成中であり、将来発表する予定である。

今後の改善すべき点は、データ作りを容易にすることが望ましく、たとえばメニュー形式と会話形式を取り入れて初心者でも簡単にデータを作られるようにすることであろう。

高速BASICコンパイラ（Quick BASIC）を用いると機種の違いを乗り越えてこのプログラムの図形処理できるので、今後の課題としたい。

このプログラムは公開するので、興味のある方は問い合わせいただきたい。

本プログラムの開発と計算データにあたって、日本高圧コンクリート（株）にご援助を受けたことを感謝する。

参考文献

1. ビューフェ他（成岡昌夫訳）：コンピュータによる骨組構造解析、培風館（1972）
2. 渡辺昇・宮本裕：時刻歴地震応答解析法、技報堂（1985）
3. 竹洞聡・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明・辻野哲司：FEMとBEMを用いた骨組構造解析の教育パソコンシステム、土木学会第12回電算機利用に関するシンポジウム講演集（1987）
4. Miyamoto, Iwasaki, Deto, Takehora and Tsujino: Personal Computer Drawing Program of Plane Frame Structure by FEM and BEM, Proceedings of the 2nd China-Japan Symposium on Boundary Element Methods, pp375~382 (1988)
5. 高久田英一郎・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明：骨組構造物の応力変位図画像表示のパソコンプログラム、土木学会第14回土木情報システムシンポジウム講演集（査読論文）（1989）
6. ケルステン（伊藤学訳）：構造力学における還元法、技報堂（1968）
7. 大地羊三：構造解析とコンピュータ、産業図書（1971）
8. 戸川隼人：続・マイコンによる有限要素解析、培風館（1984）