

東洋大学 新延 泰生
S K エン지니어リング ○小山 幸作
K K サクラダ 小野寺 秀夫

1. はじめに

現在コンピュータの普及、大型化に伴い大規模かつ複雑な構造物に対して高度な解析が可能になっている。しかしその反面、計算時間の増加に伴う計算コストの増加を生む結果となり、設計変更に伴う構造解析の反復作業をなるべく少なくすることが大切である。

このため、設計変更に伴う構造解析を反復することなく構造物の応答量を容易に求めることができる感度解析は、計算コストの低減に極めて有効な手段である。例えば、構造物の設計過程で、ある部材の断面剛性を変動させる際、構造物の任意の点における変位や断面力の変動量を求めるためには、通常、再解析の必要がある。しかし、感度解析を用いることにより、構造物をいくつかの要素に分解して、最初に基本となる構造物を一度解析し、それぞれの要素の単位の断面剛性変動に対する応答量の変動量、すなわち感度係数を求めることにより設計変数の変動による応答量を容易に推定することができる。

また、設計過程における情報処理を容易にする手段として、視覚に訴えるものや、対話形式の操作方法が有効である。例えば、実際の設計において簡単な構造解析を必要とした場合、構造物の変位量、部材断面力あるいは、断面剛性などを、コンピュータグラフィックスを用いて表現すると、画面上での処理が容易であるため非常に便利である。本研究では、梁構造物の有限要素法による応答計算プログラムに感度解析を組み込み、コンピュータグラフィックスによる画面処理対話形式の利用を試みたものである。

2. 静的解析

変位法によるつり合い方程式（状態方程式）は一般に、

$$[K] \{v\} = \{F\} \quad \dots \dots \dots (2.1)$$

と表すことが出来る。ここで、

$[K]$: 剛性マトリクス $(n \times n)$

$\{v\}$: 変位ベクトル $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}^T$

$\{F\}$: 荷重ベクトル $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}^T$

式(2.1)の剛性マトリクス $[K]$ は、断面積、断面2次モーメント、断面寸法で表すことが出来る。ここで、断面積、断面2次モーメント、断面寸法等で表される設計変数ベクトル $\{X\}$ を考え、式(2.1)の両辺の第一変分をとると、

$$[K] \{\delta v\} + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial K}{\partial X_i} \right] \{v\} \delta X_i = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial F}{\partial X_i} \right\} \delta X_i \cdots (2.2)$$

となる。ここで、

$$\{X\} : \text{設計変数ベクトル} \quad \{X_1, X_2, \dots, X_m\}^T$$

変位ベクトル $\{v\}$ を従属変数と考え、独立な設計変数ベクトル $\{X\}$ で $\{\delta v\}$ を表すと、

$$\{\delta v\} = \left[\frac{\partial v}{\partial X} \right] \{\delta X\} \cdots \cdots \cdots (2.3)$$

である。ここに、

$$\left[\frac{\partial v}{\partial X} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial v_1}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial v_n}{\partial X_m} \end{bmatrix}$$

荷重ベクトル $\{F\}$ が設計変数ベクトル $\{X\}$ の関数でないと考えると、

$$\left\{ \frac{\partial F}{\partial X_i} \right\} = \{0\}$$

である。したがって、式(2.2)と式(2.3)より

$$[K] \left\{ \frac{\partial v}{\partial X_i} \right\} = - \left[\frac{\partial K}{\partial X_i} \right] \{v\} \cdots \cdots \cdots (2.4)$$

となる。

式(2.4)の $\{\partial v / \partial X_i\}$ は、 i 部材の設計変数 X_i の微小変動に対する各変位の変動量を示すもので、言い換えれば i 部材の設計変数 X_i に対する各変位の感度係数を示す。

今、変位ベクトル $\{v\}$ と設計変数ベクトル $\{X\}$ が互いに独立していると考えると²⁾、応答関数 $g(\{X\}, \{v\})$ の第一変分は、

$$\delta g_i = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X} \right\}^T \{\delta X\} + \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial v} \right\}^T \{\delta v\} \cdots \cdots \cdots (2.5)$$

で示される。

ここで、

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X} \right\}^T &= \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial X_m} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial v} \right\}^T &= \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial g_i}{\partial v_n} \right\} \\ \{\delta X\}^T &= \{\delta X_1, \dots, \delta X_m\} \\ \{\delta v\}^T &= \{\delta v_1, \dots, \delta v_n\}\end{aligned}$$

ここで、変位ベクトル $\{v\}$ が設計変数ベクトル $\{X\}$ の従属変数と考えると、式(2.3)式(2.5)より、

$$\begin{aligned}\delta g_i &= \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X} \right\}^T \{\delta X\} + \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial v} \right\}^T \left[\frac{\partial v}{\partial X} \right] \{\delta X\} \\ &= \left\{ \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial v} \right\}^T \left[\frac{\partial v}{\partial X} \right] \right\} \{\delta X\} \quad \dots (2.6)\end{aligned}$$

となる。さらに、式(2.5)の左辺は、 $\{\delta X\}$ の関数と考えると、

$$\delta g_i = \left\{ \frac{dg_i}{dX} \right\}^T \{\delta X\} \quad \dots \dots \dots (2.7)$$

で表せる。ここで、 $\{dg_i/dX\}$ は設計空間における現設計点での関数 g_i の勾配であり、関数 g_i の設計変数ベクトル $\{X\}$ に対する感度係数を示すものである。

式(2.6)と式(2.7)より、

$$\left\{ \frac{dg_i}{dX} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial X} \right\}^T + \left\{ \frac{\partial g_i}{\partial v} \right\}^T \left[\frac{\partial v}{\partial X} \right] \quad \dots \dots \dots (2.8)$$

となる。今、関数 g_i を断面力と考え、設計変数 X_i に対する感度係数を求める。

式(2.8)の $\{\partial g_i/\partial X\}^T$ 、 $\{\partial g_i/\partial v\}^T$ は、

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial X_i} \right\}_j = \left[\frac{\partial k}{\partial X_i} \right]_j \{v\}_j \quad \dots \dots \dots (2.9)$$

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial v_j} \right\}_i = [k]_i \quad \dots \dots \dots (2.10)$$

式(2.8)、式(2.9)、式(2.10)より、 j 部材の断面力 $\{g\}_j$ の設計変数 X_i に対する感度係数は、

$$\left\{ \frac{dg}{dX_i} \right\}_j = \left[\frac{\partial k}{\partial X_i} \right]_j \{v\}_j + [k]_i \left\{ \frac{\partial v}{\partial X_i} \right\}_j \quad \dots \dots \dots (2.11)$$

となる。

次に、関数 g を反力と考え、設計変数 X_i に対する感度係数を求める。

式 (2. 8) の $\{\partial g / \partial X\}^T$ 、 $\{\partial g / \partial v\}^T$ は、

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial X_i} \right\} = \left[\frac{\partial k}{\partial X_i} \right] \{v\} \dots\dots\dots (2. 12)$$

$$\left\{ \frac{\partial g}{\partial v} \right\} = [K] \dots\dots\dots (2. 13)$$

式 (2. 8)、式 (2. 12)、式 (2. 13) より、反力ベクトル $\{g\}$ の設計変数 X_i に対する感度係数は、

$$\left\{ \frac{dg}{dX_i} \right\}^T = \left[\frac{\partial k}{\partial X_i} \right] \{v\} + [K] \left\{ \frac{\partial v}{\partial X_i} \right\} \dots\dots\dots (2. 14)$$

となる。

式 (2. 11) および式 (2. 14) は j 部材の断面力 $\{g\}_j = [k]_j \{v\}_j$ および反力 $\{g\} = [K] \{v\}$ を直接 X_i で偏微分することによっても得られる。

感度係数を用いた応答の推定方法は、以下のように示される。

今、設計変数 X が $\{X_0\}$ より $\{X\} = \{X_0\} + \{\delta X\}$ へ微小変動した場合、関数 ϕ (応答) は近似的に次式で表される。

$$\phi(X) = \phi(X_0) + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \right\}_0 \{\delta X_i\} \dots\dots\dots (2. 15)$$

$\phi(X_0)$ は、与えられた設計変数ベクトル $\{X_0\}$ に対する応答を示し $\{\partial \phi / \partial X_i\}_0$ は $\{X_0\}$ に対する感度係数ベクトルである。

応答関数の線形性を向上させるために、設計変数の逆数を考える。設計変数 X の逆数を $R_x = 1/X$ とすれば、 R_x が $\{R_{x0}\}$ より $\{R_x\} = \{R_{x0}\} + \{\delta R_x\}$ へ微小変動した場合の関数 ϕ (応答) は、次のように表される。

$$\phi(X) = \phi(X_0) + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial R_{x_i}} \right\}_0 \{\delta R_{x_i}\} \dots\dots\dots (2. 16)$$

計算機で計算される感度係数は、設計変数 X に対するものであるから式 (2. 16) を変形することにより設計変数 R_x に対する関数 ϕ (応答) を設計変数 X に対する感度係数より推定することが出来る。

今、設計変数 X が $\{X_0\}$ より $\{X\} = \{X_0\} + \{\delta X\}$ へ変動した場合、設計変数の逆数 $R_x = 1/X$ は

$$\left\{ \frac{1}{X_i} \right\} = \left\{ \frac{1}{X_{0i} + \delta X_i} \right\}$$

へと変動する。

ゆえに、 $\{\delta R_{xi}\}$ は、

$$\{\delta R_{xi}\} = \left\{ \frac{-\delta X_i}{X_{0i} + \delta X_i} \right\} \left\{ \frac{1}{X_{0i}} \right\} \dots \dots \dots (2.17)$$

となる。式(2.16)を変形して式(2.17)を代入すると

$$\begin{aligned} \phi(X) &= \phi(X_0) + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \frac{dX_i}{dR_{xi}} \right\}_0 \left\{ \frac{-\delta X_i}{X_{0i} + \delta X_i} \right\} \left\{ \frac{1}{X_{0i}} \right\} \\ &= \phi(X_0) + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \right\}_0 \left\{ \frac{\delta X_i}{X_{0i} + \delta X_i} \right\} \{X_{0i}\} \dots \dots (2.18) \end{aligned}$$

となる。

3. 解析例

本章では、2.章で述べた感度解析のアルゴリズムを有限要素法による梁構造物の応答計算プログラムに組み込んだ感度解析プログラムを用い、以下に述べるような具体的な梁の設計問題に対して解析を行った。計算処理には、通常的设计現場において使用されているパーソナルコンピュータを使用し、設計過程でのたわみや、断面力の分布あるいは、剛性分布などをコンピュータ・グラフィックスにより画面上に表して、対話形式によって解析を進めている。

1.で述べたように感度解析を用いることにより設計途中での断面変更による応力計算を反復することなしに応答の推定が可能で、必要なデータを画面上に数値としてあるいは図として瞬時に示すことが出来る。

図-1に示すような3本の主桁を有する3径間連続非合成桁橋をとりあげ、主桁G₂の中間支点上C断面の所要断面二次モーメントを求めることを考える。設計条件は次に示すとおりである。

- (1) 形式 3径間連続非合成桁橋
- (2) 橋格 一等橋
- (3) 支間 40m + 40m + 40m
- (4) 主桁間隔 2.5m
- (5) 荷重 活荷重 : L 荷重
 仮定死荷重 : 20.7 kgf/m²
- (6) 許容応力 $\sigma_{ta} = \sigma_{ca} = 1400 \text{ kgf/cm}^2$

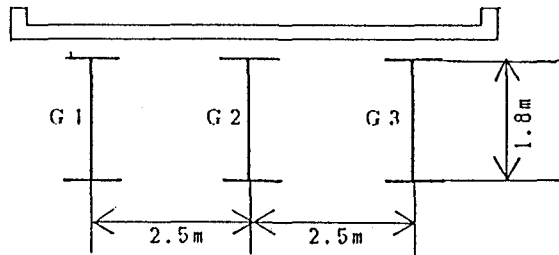


図-1 非合成桁(3主桁)

初期断面としては、断面二次モーメント $I = 2.5714 \times 10^{-2} \text{ m}^4$ を有する等断面上下対称 I 桁を仮定する。桁高は $h = 1.8 \text{ m}$ で一定とする。この桁に所定の荷重を作用させて感度解析を行うため、この初期断面桁を基本構造系と呼ぶことにする。基本構造系の要素割りと影響線解析より得られた節点外力を図-2に示す。この初期断面の基本構造系の曲げモーメントの分布を画面上に表示したものを図-3に示す。

下側の棒グラフは曲げモーメントの分布を示すもので、この場合は等断面であるため様な棒グラフとなっている。C断面（節点5）の設計曲げモーメント $M = -350.0725 \text{ tf} \cdot \text{m}$ に対する下縁応力は $\sigma = -1225 \text{ kgf/cm}^2$ （圧縮応力）であって許容応力に近づけるように各要素の断面二次モーメントを変動させる。変動要素の選択は感度解析より得られるC断面（④要素の節点5）の曲げモーメントの感度係数を調べて、要素剛性を減少させたときに曲げモーメントがマイナス側に増大する要素を変動させた。C断面の曲げモーメントの感度係数を表-1に示す。変動要素の要素数はここでは1～4の4ケースを考慮し、要素断面二次モーメントの変動率 β は、各要素とも同じとしている。変動率 $\beta_i = \delta X_i / X_{0i}$ は、式（2.15）あるいは式（2.18）を用いて求めることが出来る。各ケースの要素剛性の変動結果を画面上に表示したものを図-4-1から図-4-4に示す。図中の下側の二本の棒グラフは、下のものが基本構造系の剛性分布を表し、また上のものが変動後の剛性分布を表している。

感度解析による剛性推定の精度を検討するために、得られた剛性分布に対して再解析して計算された縁応力の値を表-2に示す。変動率 $\beta = -32.5\% \sim -52.4\%$ に対してどのケースも2%以内の誤差しかなく精度は良好と考えられる。変動率 β が大きくなる場合は変動後の剛性分布を有する構造系を新たに基本構造系として解析を進めることによって十分な精度が得られる。

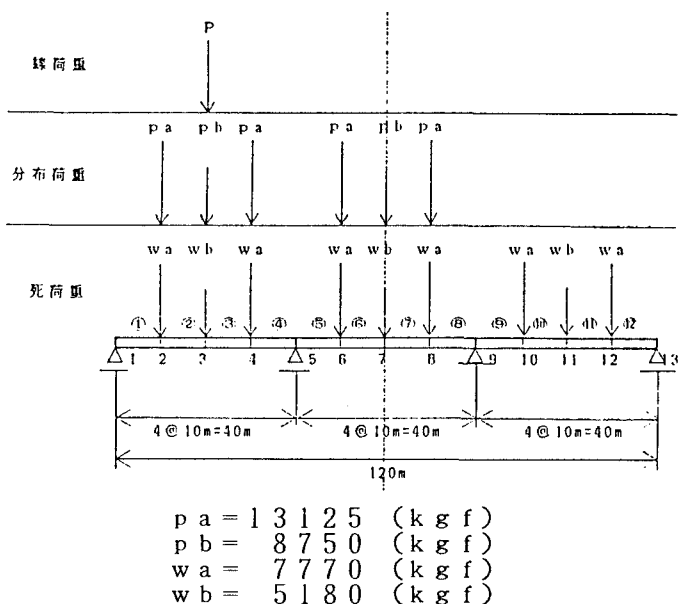


図-2 要素割りと節点外力

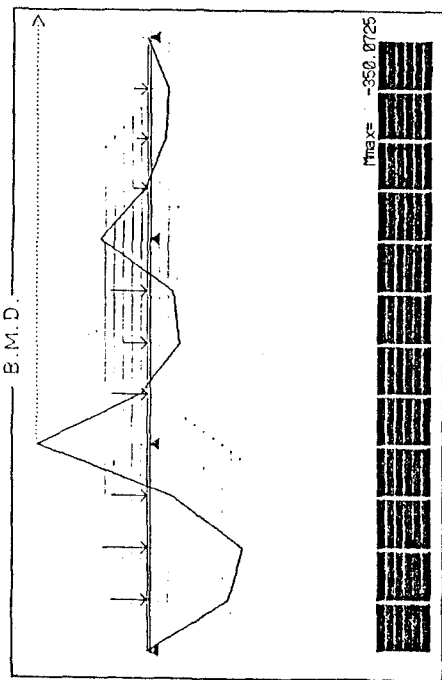


図-3 基本構造系

図-4-1 ケース1

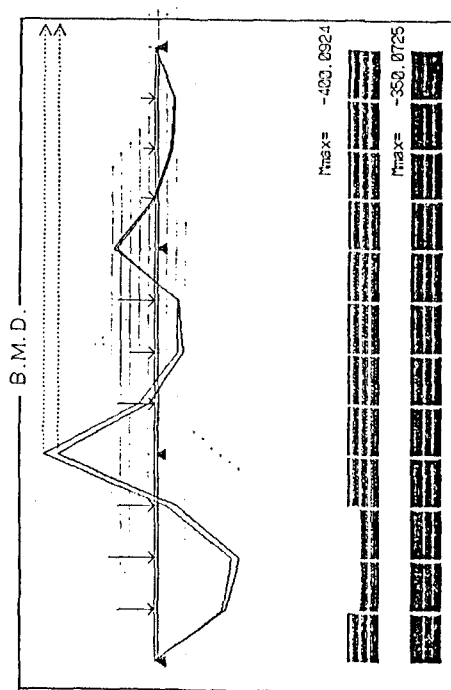


図-4-2 ケース2

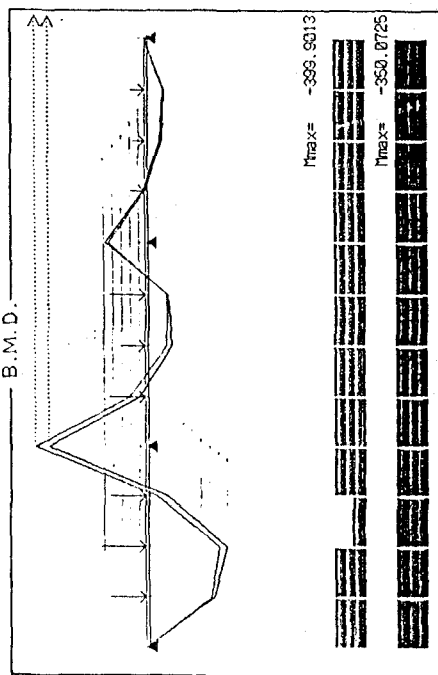
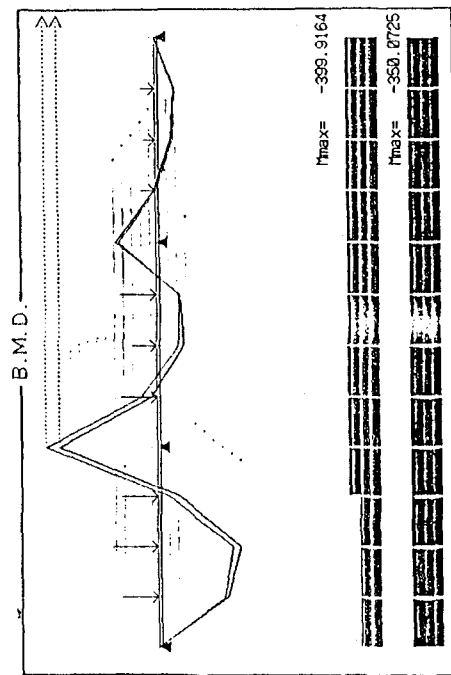


図-4-3 ケース3



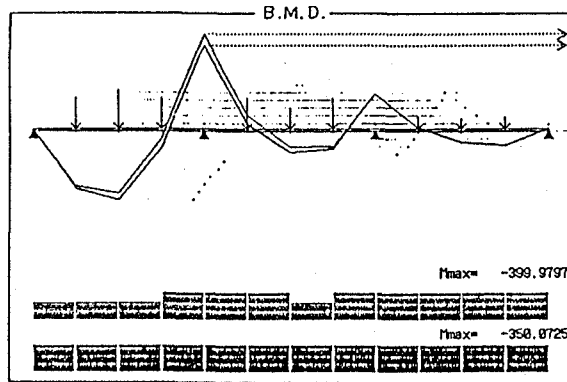


図-4-4 ケース4

表-1 感度係数

要素番号	感度係数
1	3.2872D+02
2	1.6239D+03
3	1.7603D+03
4	-1.9868D+03
5	-2.5642D+03
6	2.8253D+02
7	3.1810D+02
8	1.3832D+02
9	2.6795D+02
10	-5.7385D+01
11	-8.9616D+01
12	-2.1795D+01

表-2 剛性推定の精度

ケース	変動率 (%)	再解析値 (kgf/cm ²)	目標値 (kgf/cm ²)	$ (\bar{K}-K)/\bar{K} $ (%)
1	-52.4	-1374	1400	1.89
2	-36.5	-1381	1400	1.38
3	-34.3	-1381	1400	1.38
4	-32.5	-1381	1400	1.38

4. おわりに

3. の解析例は通常の設計過程の中での一つの過程に過ぎず、このほかの多くの制約条件が入ってくるが、過去の設計実例をベースにした経験的判断に変わって感度解析を行うことにより適確な設計変更の情報が得られさらに計算コストの大幅な低減が期待できる。すなわち、感度係数を調べることにより最も効果的な設計変更の情報が与えられ、応答の計算に際しては再解析をほとんど経ずに応答の推定が可能となる。このことは、コンピュータ・グラフィックスを利用し、対話形式で設計を進める場合に非常に有効となろう。

参考文献

- 1) 新延泰生、松井邦人、鈴木 成 : 静的感度解析の応用に関する研究、構造工学論文集、Vol. 32A (1986年3月)、pp. 467~474.
- 2) Uri Kirsh (山田 善一、大久保貞二 監訳) : 最適構造設計—概念・方法・応用—、丸善、1983年、pp. 332~346.
- 3) 日本道路協会編 : 道路橋示方書・同解説 I 共通編、II 鋼橋編、1990年2月.
- 4) 日本橋梁建設協会編 : '87 JASBC manual デザインデータブック、1987年7月.