

骨組構造物の応力変位図 画像表示のパソコンプログラム

日立東北ソフトウェア

○高久田英一郎

岩手大学工学部土木工学科

宮本 裕

岩崎正二

出戸秀明

1. ま え が き

構造物の設計や解析において有限要素法(FEM)は広く使われている方法であるが、正しい構造力学の知識やモデルに対する工学的センスが不足すると、データミスや不合理であるモデル化(必要な支承を設けずに不安定構造物を作ることがある)をしたりすることがある。これらの知識や工学的センスは本を読んだだけで身につくものではなく、自分の頭と体を使って主体的に解き、出てきた結果を考察するという経験を繰り返しながら、しだいに会得するものであろう。

この意味において、有限要素法(FEM)の入門である平面骨組構造物の剛性マトリックス法(変位法)による計算をし、結果の変位や応力図を描くことは大学においても重要である。その際自分の計算の確認および補助手段として、パソコンにより変位や応力の分布図をディスプレイ画面に描かせることができると、教育の効果も大きくなる。これは一種の数値実験(シュミレーション)と考えられる。

FEMを使って変位および応力の分布図を描く場合、得られた節点の変位や応力を直線で結ぶことが一般に行なわれる。その場合部材間の結合状態による変形を正しく表すことは困難である(固定端におけるたわみ角の零となる場合など)。また分布荷重による部材の連続的な応力や変形状態を正確に作図することも困難である。ところがBEM(Boundary Element Method 境界要素法)の手法をこの計算にあてはめると、部材両端の変位や力から、部材間の途中の変位や力を計算することは容易である(BEMで言えば、境界量から内点の情報を計算する手続きとなる)。

全体の手法をまとめると、骨組構造物をFEMで解析し、さらに細部の変位や応力の状態をBEMで計算し、その結果を図化するものである。

本論文の目的は技術者教育に有用な画像プログラムの開発と利用であるが、部材間の応力と変位の解の公式を詳細に記載することも学術的に価値があると思われるので、紙面をついやしている。従来の研究との関係は、これまでに発表した変位の式³⁾を訂正し、応力の式を新しく作ったことである。具体的な使用方法の例や問題点など紙面の都合でここであつかえなかったものは、別の機会に発表したい。

本研究の特徴を箇条書にすると以下のようになる。

- ① 図形処理のため、日本電気製のPC9801のBASIC言語を使用している。
- ② 対象となる平面骨組構造物の自由度は3(水平変位、垂直変位、回転角)である。
- ③ 対象とする荷重は一般的な台形分布荷重であり²⁾、この特別な例として、等分布荷重や水圧などの三角分布荷重も扱える。なお、部材の途中に分布する集中荷重も扱える。
- ④ 支点条件として、固定のほか、ヒンジ支点、ローラ支点、自由端も扱える。
- ⑤ 部材間の結合状態は(ラーメンのような)完全固定のほかヒンジ結合も扱える。
- ⑥ 数値実験であるが、精度の良いシュミレーションとしての教育用の利用が考えられる。

2. FEMによる解法

図-1、2に示す台形分布荷重と集中荷重を受ける部材の剛性マトリックスはつぎのようになる²⁾。

$$\begin{Bmatrix} M(0)/EI \\ M(l)/EI \\ Q(0)/EI \\ Q(l)/EI \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/l & 2/l & -6/l^2 & +6/l^2 \\ 2/l & 4/l & -6/l^2 & +6/l^2 \\ -6/l^2 & -6/l^2 & 12/l^3 & -12/l^3 \\ +6/l^2 & +6/l^2 & -12/l^3 & 12/l^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(l) \\ w(0) \\ w(l) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix} \quad \text{---- (1)}$$

ここで、荷重項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 G_1 &= \frac{A b + B}{12 E I \ell^2} (3 \xi^4 - 4 \ell \xi^3) - \frac{A a + B}{12 E I \ell^2} (3 \eta^4 - 4 \ell \eta^3) \\
 &\quad + \frac{A}{60 E I \ell^2} \{ (3 \xi^5 - \eta^5) - 5 \ell (\xi^4 - \eta^4) \} + \frac{c (\ell - c)^2 \cdot P}{\ell^2 \cdot E I} \\
 G_2 &= \frac{A b + B}{12 E I \ell^2} (3 \xi^4 - 8 \ell \xi^3 + 6 \ell^2 \xi^2) - \frac{A a + B}{12 E I \ell^2} (3 \eta^4 - 8 \ell \eta^3 + 6 \ell^2 \eta^2) \\
 &\quad + \frac{A}{60 E I \ell^2} \{ 3 (\xi^5 - \eta^5) - 10 \ell (\xi^4 - \eta^4) + 10 \ell^2 (\xi^3 - \eta^3) \} - \frac{c^2 (\ell - c) \cdot P}{\ell^2 \cdot E I} \\
 H_1 &= - \frac{A b + B}{2 E I \ell^3} (\xi^4 - 2 \ell \xi^3) + \frac{A a + B}{2 E I \ell^3} (\eta^4 - 2 \ell \eta^3) \\
 &\quad + \frac{A}{20 E I \ell^3} \{ 2 (\xi^5 - \eta^5) - 5 \ell (\xi^4 - \eta^4) \} - \frac{(\ell^3 - 3 \ell c^2 + 2 c^3) \cdot P}{\ell^3 \cdot E I} \\
 H_2 &= \frac{A b + B}{2 E I \ell^3} (\xi^4 - 2 \ell \xi^3 + 2 \ell^3 \xi) - \frac{A a + B}{2 E I \ell^3} (\eta^4 - 2 \ell \eta^3 + 2 \ell^3 \eta) \\
 &\quad + \frac{A}{20 E I \ell^3} \{ 2 (\xi^5 - \eta^5) - 5 \ell (\xi^4 - \eta^4) + 10 \ell^3 (\xi^2 - \eta^2) \} - \frac{c^2 (3 \ell - 2 c) \cdot P}{\ell^3 \cdot E I}
 \end{aligned}$$

なお $A = \frac{q_2 - q_1}{b - a}$ 、 $B = \frac{q_1 b - q_2 a}{b - a}$ 、 $\xi = \ell - b$ 、 $\eta = \ell - a$

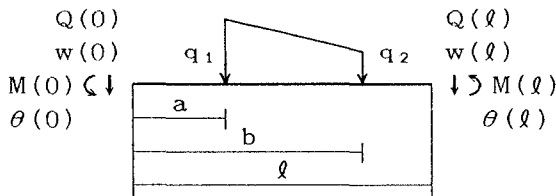


図-1

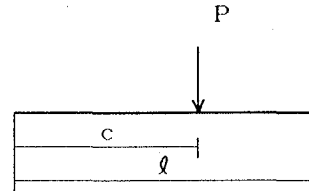


図-2

またこの剛性マトリックスをもとにして、(ゲルバー桁の解析に用いる)部材端にヒンジのある場合の剛性マトリックスも誘導したが、詳細は省略する。³⁾

従来は剛性マトリックス法により各節点での変位、応力を計算し、それらの各節点での変位や応力を直線でつないでディスプレイ画面に表示していた。しかしこれだと支点などの拘束条件による変位は正確に表現されない(完全固定結合の場合のたわみ角は零になるのに対し、ヒンジ結合ではたわみ角は零でない)。また分布荷重による桁の連続的な応力変形状態を正確に作図することも困難である。一方BEM(境界要素法)によれば、部材の両端の物理量(たわみや力)から部材の途中の変位や応力が計算される。このことはBEMにおいては、内点の変位や応力の計算として位置づけられる。そこでこの内点の変位や応力という考え方を使って、この剛性マトリックス法による部材端の物理量(つまり節点での力と変位)から部材の途中の変位や応力を計算する。

3. BEMの内点の式

はりに分布荷重 $q(x)$ が作用するとき、
微分方程式は次のようになる。

$$EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad \text{---- (2)}$$

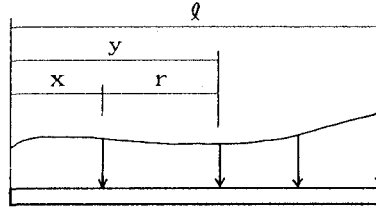


図-3

いま無限長はりに対して、次のように
定義される2点関数 $w^*(x, y)$ を考える。

$$EI \frac{d^4 w^*(x, y)}{dx^4} = \delta(x - y) \quad \text{---- (3)} \quad \delta: \text{デルタ関数}$$

このとき $w^*(x, y)$ は無限長はりの1点 y に単位荷重が作用するときの点 x でのたわみである。

式(2)の両辺に基本解 $w^*(x, y)$ をかけ、はりのスパン l にわたって積分する。
そして左辺の $w(x)$ の微係数がなくなるまで部分積分を4階繰返すと式(4)が得られる。

$$\begin{aligned} w(y) &= \left[Q(x) w^*(x, y) - M(x) \theta^*(x, y) + \theta(x) M^*(x, y) - w(x) Q^*(x, y) \right]_{x=0}^{x=l} \\ &= \int_0^l q(x) w^*(x, y) dx \quad \text{---- (4)} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{dw(x)}{dx}, \quad M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \\ \theta^*(x, y) &= \frac{dw^*(x, y)}{dx}, \quad M^*(x, y) = -EI \frac{d^2 w^*(x, y)}{dx^2}, \quad Q^*(x, y) = -EI \frac{d^3 w^*(x, y)}{dx^3} \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} w(y) &= Q(l) w^*(l, y) - M(l) \theta^*(l, y) + \theta(l) M^*(l, y) - w(l) Q^*(l, y) \\ &\quad - Q(0) w^*(0, y) + M(0) \theta^*(0, y) - \theta(0) M^*(0, y) + w(0) Q^*(0, y) \\ &\quad + \int_0^l q(x) w^*(x, y) dx \quad \text{---- (5)} \end{aligned}$$

となる。このようにして境界量 $Q(0)$ 、 $M(0)$ 、 $\theta(0)$ 、 $w(0)$ 、 $Q(l)$ 、 $M(l)$ 、 $\theta(l)$ 、 $w(l)$ を未知量としたたわみ曲線 $w(y)$ が求められる。

なお、はりの基本解は以下のようになる。

$$\begin{aligned} w^*(x, y) &= (2l^3 + r^3 - 3lr^2) / 12EI, \quad \theta^*(x, y) = r(r - 2l) \operatorname{sgn}(x - y) / 4EI \\ M^*(x, y) &= -(r - l) / 2, \quad Q^*(x, y) = -\operatorname{sgn}(x - y) / 2 \end{aligned}$$

ただし $r = |x - y|$ 、 $x > y$ のとき $\operatorname{sgn}(x - y) = 1$ 、 $x < y$ のとき $\operatorname{sgn}(x - y) = -1$

また、曲げモーメント式はたわみ式 $w(y)$ を2階微分、せん断力式はたわみ式 $w(y)$ を3階微分すればよい。

4. FEMとBEMによる解法

FEMで得られた部材の両端の物理量を、BEMにおける境界量として用いることにより部材の途中の変位が計算できることになる。

ここで、BEMの変位と力の向きは図-4のように定義され、FEMでは図-5のように定義されている。

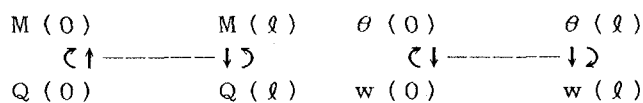


図-4

そこで式(5)における境界量を $M(0) \rightarrow -M(0)$,

$Q(0) \rightarrow -Q(0)$,

$\theta(0) \rightarrow -\theta(0)$,

$\theta(l) \rightarrow -\theta(l)$

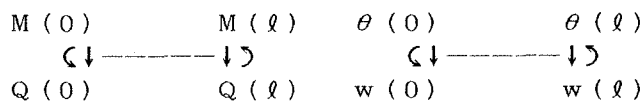


図-5

とおきかえることにより、力と変位の向きをFEMの

向きに統一し、図-1と

図-2の荷重を受ける部材について計算すると次のようになる。

たわみ式は

$$w(y) = Q(l)w^*(l, y) - M(l)\theta^*(l, y) - \theta(l)M^*(l, y) - w(l)Q^*(l, y) \\ + Q(0)w^*(0, y) - M(0)\theta^*(0, y) + \theta(0)M^*(0, y) + w(0)Q^*(0, y) \\ + \int_0^l q(x)w^*(x, y)dx \quad \text{--- (6)}$$

で表わされ、最後の積分項は、次のようになる。

① $0 \leq y < a$ のとき

$$\int_0^l q(x)w^*(x, y)dx \\ = \frac{A}{12EI} \left[\frac{(b-y)^5 - (a-y)^5}{5} + \frac{(b-y)^4 - (a-y)^4}{4} (y-3l) \right. \\ \left. - ly \{ (b-y)^3 - (a-y)^3 \} + l^3 \{ (b-y)^2 - (a-y)^2 \} + 2l^3 y (b-a) \right] \\ + \frac{B}{12EI} \left[2l^3 (b-a) + \frac{(b-y)^4 - (a-y)^4}{4} - l \{ (b-y)^3 - (a-y)^3 \} \right] \\ + \frac{P}{12EI} (2l^3 + r^3 - 3lr^2) \quad \text{--- (7)}$$

② $a \leq y \leq b$ のとき

$$\int_0^l q(x)w^*(x, y)dx \\ = \frac{A}{12EI} \left\{ (b^2 - a^2)l^3 + \frac{y+4a}{20} (a-y)^4 - \frac{l}{4} (y+3a)(y-a)^3 \right. \\ \left. + \frac{y+4b}{20} (b-y)^4 - \frac{l}{4} (y+3b)(b-y)^3 \right\} + \frac{B}{12EI} \left[2l^3 (b-a) \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \{ (b-y)^4 + (a-y)^4 \} - l \{ (b-y)^3 - (a-y)^3 \} \right] \\ + \frac{P}{12EI} (2l^3 + r^3 - 3lr^2) \quad \text{--- (8)}$$

③ $b < y \leq l$ のとき

$$\int_0^l q(x)w^*(x, y)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{12EI} \left[\frac{(y-b)^5 - (y-a)^5}{5} - \frac{(y-b)^4 - (y-a)^4}{4} (y+3\ell) \right. \\
&\quad \left. + \ell y \{ (y-b)^3 - (y-a)^3 \} + \ell^3 \{ (y-b)^2 - (y-a)^2 \} - 2\ell^3 y (a-b) \right] \\
&\quad + \frac{B}{12EI} \left[2\ell^3 (b-a) - \frac{(y-b)^4 - (y-a)^4}{4} + \ell \{ (y-b)^3 - (y-a)^3 \} \right] \\
&\quad + \frac{P}{12EI} (2\ell^3 + r^3 - 3\ell r^2) \quad \text{---- (9)}
\end{aligned}$$

ただし

$$A = \frac{q_2 - q_1}{b-a}, \quad B = \frac{q_1 b - q_2 a}{b-a}, \quad r = |c-y|$$

曲げモーメント式は $M(y) = -EI d^2 w(y)/dy^2$ より

$$\begin{aligned}
M(y) = & -EI \{ Q(\ell) \widetilde{w}^*(\ell, y) - M(\ell) \widetilde{\theta}^*(\ell, y) - \theta(\ell) \widetilde{M}^*(\ell, y) - w(\ell) \widetilde{Q}^*(\ell, y) \\
& + Q(0) \widetilde{w}^*(0, y) - M(0) \widetilde{\theta}^*(0, y) + \theta(0) \widetilde{M}^*(0, y) + w(0) \widetilde{Q}^*(0, y) \\
& + \int_0^\ell q(x) \widetilde{w}^*(x, y) dx \} \quad \text{---- (10)}
\end{aligned}$$

で表わされる。

$$\text{ここで、} \quad \widetilde{w}^*(x, y) = (r-\ell)/2EI, \quad \widetilde{\theta}^*(x, y) = \text{sgn}(x-y)/2EI$$

$$\widetilde{M}^*(x, y) = 0, \quad \widetilde{Q}^*(x, y) = 0$$

$r = |x-y|$, $x > y$ のとき $\text{sgn}(x-y) = 1$, $x < y$ のとき $\text{sgn}(x-y) = -1$ である。また最後の積分項は、次のようになる。

① $0 \leq y < a$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell q(x) \widetilde{w}^*(x, y) dx \\
&= \frac{A}{2EI} \left\{ \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(y+\ell)(b^2 - a^2)}{2} \right\} \\
&\quad + \frac{B}{2EI} \left\{ \frac{b^2 - a^2}{2} - (y+\ell)(b-a) \right\} + \frac{P}{2EI} (r-\ell) \quad \text{---- (11)}
\end{aligned}$$

② $a \leq y \leq b$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell q(x) \widetilde{w}^*(x, y) dx \\
&= \frac{A}{2EI} \left\{ \frac{y^3}{3} - \frac{y(a^2 + b^2)}{2} + \frac{a^3 + b^3}{3} + \frac{\ell(a^2 - b^2)}{2} \right\} \\
&\quad + \frac{B}{2EI} \left\{ y^2 - y(a+b) + \frac{(a^2 + b^2)}{2} + \ell(a-b) \right\} + \frac{P}{2EI} (r-\ell) \quad \text{---- (12)}
\end{aligned}$$

③ $b < y \leq \ell$ のとき

$$\begin{aligned}
&\int_0^\ell q(x) \widetilde{w}^*(x, y) dx \\
&= \frac{A}{2EI} \left\{ -\frac{b^3 - a^3}{3} + \frac{(y-\ell)(b^2 - a^2)}{2} \right\} \\
&\quad + \frac{B}{2EI} \left\{ -\frac{b^2 - a^2}{2} + (y-\ell)(b-a) \right\} + \frac{P}{2EI} (r-\ell) \quad \text{---- (13)}
\end{aligned}$$

せん断力式は $Q(y) = -EI d^3w(y)/dy^3$ より

$$Q(y) = -EI \{ Q(\ell) w^*(\ell, y) - M(\ell) \theta^*(\ell, y) - \theta(\ell) M^*(\ell, y) - w(\ell) Q^*(\ell, y) \\ + Q(0) w^*(0, y) - M(0) \theta^*(0, y) + \theta(0) M^*(0, y) + w(0) Q^*(0, y) \\ + \int_0^y q(x) w^*(x, y) dx \} \quad \text{---- (14)}$$

で表わされる。ここで、

$$w^*(x, y) = -sgn(x-y)/2EI, \quad \theta^*(x, y) = 0, \quad M^*(x, y) = 0, \quad Q^*(x, y) = 0 \\ x > y \text{ のとき } sgn(x-y) = 1, \quad x < y \text{ のとき } sgn(x-y) = -1$$

である。また最後の積分項は、次のようになる。

① $0 \leq y < a$ のとき

$$\int_0^y q(x) w^*(x, y) dx \\ = \frac{A}{4EI} (a^2 - b^2) + \frac{B}{2EI} (a - b) - \frac{P}{2EI} sgn(c - y) \quad \text{---- (15)}$$

② $a \leq y \leq b$ のとき

$$\int_0^y q(x) w^*(x, y) dx \\ = \frac{A}{4EI} (2y^2 - a^2 - b^2) + \frac{B}{2EI} (2y - a - b) - \frac{P}{2EI} sgn(c - y) \quad \text{---- (16)}$$

③ $b < y \leq \ell$ のとき

$$\int_0^y q(x) w^*(x, y) dx \\ = \frac{A}{4EI} (b^2 - a^2) + \frac{B}{2EI} (b - a) - \frac{P}{2EI} sgn(c - y) \quad \text{---- (17)}$$

これらの式は局所座標系でのものである。画面に表示するときは、全体座標系での数値に変換する必要がある。

主な計算の手続きは図-6のようになる。

図-6を簡単に説明すると、部材の剛性マトリックスと荷重項を計算してから構造全体の剛性マトリックスを重ね合わせ、支点条件を与えて、節点変位と部材端力を計算する。ここまですべてFEMによる計算である。以下BEMにより部材の途中の変位と応力を、式(6)、(10)、(14)により計算する。その際部材間にヒンジ継ぎ手があると、FEMではヒンジ端のたわみ角を求めていないので、改めてそのたわみ角を計算してから、境界量から内点の情報である変位と応力を計算する。そして図化するために部材座標系で計算したBEMの計算値を全体座標系に変換して、ディスプレイ画面に描かせるのである。

5. 出力例

このプログラムを使って、変位図や曲げモーメント図やせん断力図などを描いたものを示す。図-7は門形ラーメンの水平はり部材の途中に台形分布荷重が作用する場合である。実線は本方法によるもの、破線は各節点での数値を直線でつないだものである。この場合FEMのデータは6節点を考えて計算している。

FEMだけによる場合では途中の節点を多くとると、それらを結んだ破線はしだいになめらかになる(多

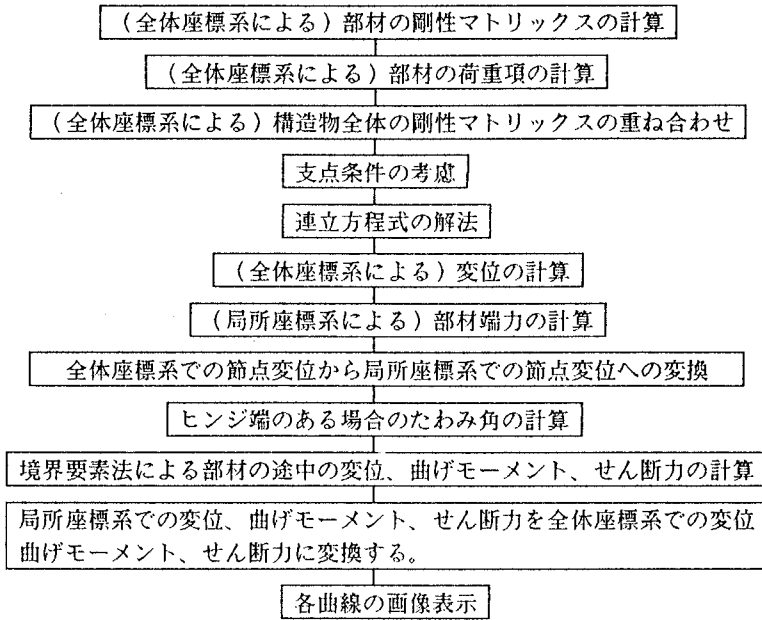


図-6

数の分割点をとるほどなめらかな曲線が得られるが、連立方程式の元数がふえ計算時間もよけいかかる。しかし本方法の場合、部材端部の4点だけ設定しただけでなめらかな曲線が得られる。

ただしディスプレイ画面に適当なバランスで変位や応力が配置されよう、節点の変位の中の最大値で調整している。そのため部材間の数値がこの最大値をはなはだしく上回るときは、図が画面からはみだすこともあり、計算例によっては最大値の場所になりそうな節点を新しく設けて再計算する必要がある。

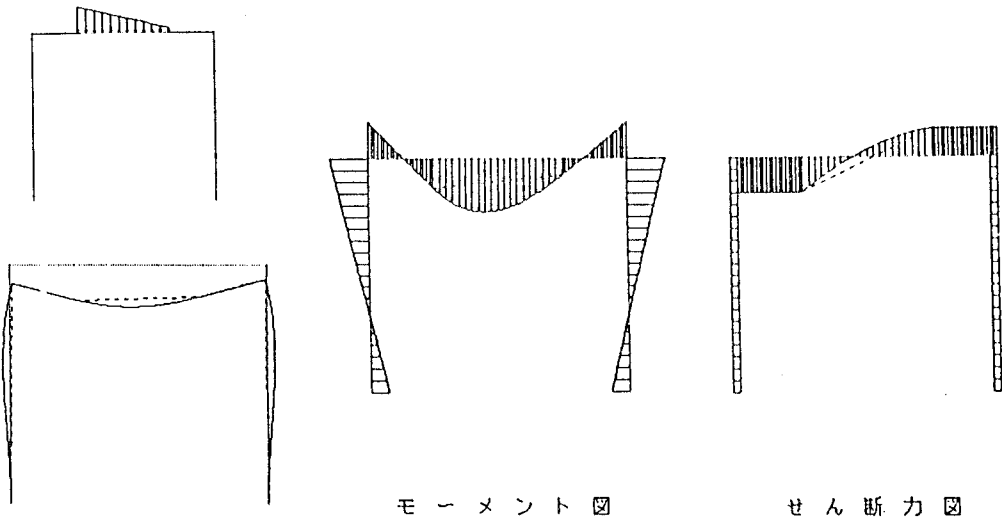


図-7

6. あとがき

BEMを使わなくても、たとえば還元法などの基本式で途中の値は計算される。ちなみに式(5)と同様な式が、文献6の10頁あるいは文献7の15頁にある。BEMは桁の両端部の情報から内部を計算し、還元法は左端の情報から桁の途中の情報を計算するので、端部の情報から途中の情報を計算するという意味では同じである。分布荷重の数学的处理をするときはBEMのほうが一般的にあつかえ、弾性床上の桁や、板などの構造物に対して拡張性が高いことや、計算手続きが機械的に処理できるなどの理由で、BEMを採用した。著者らはむしろ、BEMも還元法も広い意味でまとめて、新しいBEMと考えたい。

またBEMによらずFEMの内挿関数を用いても部材の途中の数値は計算できるが、この骨組部材の場合はたまたま上記の文献にあるような解析解と一致するが、あくまでもFEMは近似解であり、弾性床上の桁などに適用するときは、基本解を解析解から引用した場合に、より真の値に近い答が得られる(数値的にも、また陽な形で厳密解としての公式としてもあつかえる)。BEMとFEMはこのように互いに補いあいながら使用するのがよいと考えている。

本プログラムを使うと、任意形状の平面骨組構造物の変位や曲げモーメントやせん断力図などの分布の状態や挙動がユーザに明らかになり、実用的なシュミレーションの道具として価値があると思われる。ラーメンのたわみの状態を再現する模型も販売されているが、本プログラムを用いると、もっと広範囲に一般的な構造物の変位や応力の挙動が把握できることになる。

今後の改善すべき点は、データ作りを容易にすることが望ましく、たとえばメニュー形式と会話形式を取り入れて初心者でも簡単にデータを作られるようにすることであろう。

またPC98でも上位のマシンで動かせばより高速になる。高速BASICコンパイラ(Quick BASIC)を用いるのもよい。図形処理できるFORTRANコンパイラを使用してFORTRANに移植するのも処理が速くなる上、アルゴリズムが理解されやすくなるであろう。

このプログラムは公開するので、興味のある方は問い合わせいただきたい。

本プログラムの開発にあたって、昭和62年度の文部省教育方法等改善経費を受けたことを感謝する。

参考文献

1. 戸川隼人: BASICによる有限要素法の基礎、サイエンス社 (1985)
2. 渡辺昇・宮本裕: 時刻歴地震応答解析法、技報堂 (1985)
3. 竹洞聡・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明・辻野哲司: FEMとBEMを用いた骨組構造解析の教育パソコンシステム、土木学会第12回電算機利用に関するシンポジウム講演集(1987)
4. Miyamoto, Iwasaki, Deto, Takehora and Tsujino: Personal Computer Drawing Program of Plane Frame Structure by FEM and BEM, Proceedings of the 2nd China-Japan Symposium on Boundary Element Methods, pp375~382 (1988)
5. 高久田英一郎・宮本裕・岩崎正二・出戸秀明: 平面骨組構造物の変位および曲げモーメント描画パソコンプログラム、昭和63年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要、pp26~27 (1989)
6. ケルステン(伊藤学訳): 構造力学における還元法、技報堂 (1968)
7. 大地羊三: 構造解析とコンピュータ、産業図書 (1971)