

1. まえがき

数値最適設計の工業設計への応用は、米国において、航空・宇宙産業を中心に活発に行われている。また、有限要素法の汎用プログラム NASTRAN と汎用最適化プログラム ADS¹⁾ の内的な結合が現在研究されているように、工業設計の分野において、現在最も活発に研究されているテーマの一つである。国内においても、構造設計、複合材料の設計および種々の構造体の形状最適化など、その応用の範囲は広がってきている。

数値最適設計のプログラムとしては、前記の ADS などがあるが、まだそのためのプレおよびポストプロセッサは、その必要性は高いがまだほとんど研究されていない。

プレプロセッサには、最適化問題のスケールリング²⁾、制約条件式の分類 (regiolization)、スクリーニングのためのパラメーターなど、数値最適設計を実行するうえでの種々のパラメーターの値の決定など、多くの機能が要求されるが、初期値の設定も重要な機能の一つである。

図-1 は、簡単な格子構造の設計問題³⁾ の設計空間で、図のように全域的な最適解 X^* と局所的な最適解 X^1 、 X^2 をもつ問題である。図より、初期値が A の領域にあれば解は X^* に収束し、B および C の領域に初期値があれば、解はそれぞれ X^1 、 X^2 に収束することが予想される。さらに、D の領域に初期値があれば、どの解に収束するかは選択する手法により異なるが、繰り返し計算の回数は多くなることが考えられる。

このように、数値最適設計においては、その信頼性、効率が初期値に大きく依存する。数値最適設計においては、初期値は自動的に決定されることはなく、ユーザーの判断により適当に与えられていた。問題によっては、最適解の存在する範囲がある程度予想できる場合もあるが、まるで検討のつかない場合もある。不適当な初期値を与えれば、効率が非常に悪い (計算時間が多くかかる) か、適当な解に収束しないことも十分ありうる。

本論文は、数値最適設計の効率と信頼性を向上させるために、ユーザーから与えられた初期値 (以下、単に『初期値』とする) を簡単な手続きにより改良する方法 (得られた設計を、以下『改良初期値』とする) の研究をしたものである。

初期値改良の目的は、初期値を簡単な手続きで改良し、真の最適解にできるだけ近い改良初期値を求めることにある。そのために本論文では、三浦らの ACCESS 2 の NEWSUMT 2⁴⁾ を応用した。NEWSUMT 2 は、2 次拡張ペナルティ関数法⁵⁾ に近似の概念を応用した手法である。SUMT 系の手法は、一般にかなり多くの計算時間を要するが、近似の概念を応用することにより効率を向上させている。この手法を初期値改良に応用することにより、ペナルティパラメーターの値のコントロールのみにより、SUMT 変換された設計空間を変更でき、初期値をある程度自由に改良できるようになった。また、ペナルティパラメーターの値の更新をコンピューターとの対話で行うことにより、より効率的な初期値改良システムを作ることができた。

以下に、2 次拡張ペナルティ関数法、NEWSUMT 2 および本論文の初期値改良システムを説明し、最後に計算例で本論文の手法の効果を説明する。

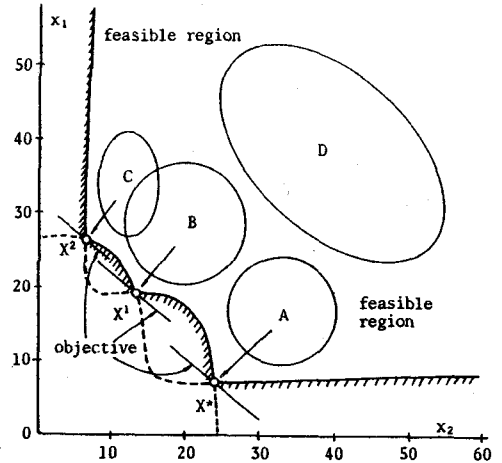


図-1 格子構造の設計問題の設計空間

2. 2次拡張ペナルティ関数法⁵⁾

SUMT系の手法としては、その初期に外点および内点ペナルティ関数法がそれぞれ応用されたが、前者には非許容領域から収束すること、後者には非許容領域での関数の評価ができないという欠点があり、さらに両者共通の欠点として、最適解に近いところまで収束してからの数値的悪条件があげられる。

そこで、これらの欠点を解消しながら両定式化の長所を有する新しい定式化として、拡張ペナルティ関数法が提案された。拡張ペナルティ関数法としては、発表された順番に、線形拡張ペナルティ関数法^{6) 7)}、2次拡張ペナルティ関数法⁵⁾および可変ペナルティ関数法⁸⁾がある。ここでは、これらのうちNEWSUMT 2で使われている2次拡張ペナルティ関数法について簡単に説明する。

まず、最適設計問題は、一般に次のように定式化される。

$$\text{目的関数} : F(X) \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\text{制約条件} : g_j(X) \leq 0 \quad (j=1 \sim m) \quad (2)$$

$$\text{設計変数} : X = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$$

これらの対して、2次拡張ペナルティ関数法においては、ペナルティ関数 Φ およびペナルティ項 $\tilde{g}_j$ ($j=1 \sim m$) は、次式で定義される。

$$\Phi(X, r^{(k)}, \varepsilon^{(k)}) = F(X) + r^{(k)} \sum_{j=1}^m \tilde{g}_j(X, \varepsilon^{(k)}) \rightarrow \min \quad (3)$$

ここで、

$$\tilde{g}_j(X, \varepsilon^{(k)}) = \begin{cases} -\frac{1}{g_j(X)} & (g_j(X) \leq \varepsilon^{(k)}) \\ -\frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \left\{ \left(\frac{g_j(X)}{\varepsilon^{(k)}} \right)^2 - 3 \left(\frac{g_j(X)}{\varepsilon^{(k)}} \right) + 3 \right\} & (g_j(X) > \varepsilon^{(k)}) \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 k は繰り返し計算の過程の k 回目であることを示し、 $r^{(k)}$ はペナルティパラメーター、 $\varepsilon^{(k)}$ は内点ペナルティ関数から2次拡張ペナルティ関数へ移行する遷移点を与える値で、絶対値の小さな負の実数である。この手法は、 k に関する収束計算になる。

式(3)は、無制約の最適化問題となり、DFP⁹⁾あるいはBFGS⁹⁾により最適解を得ることができるが、最適化の過程では、式(3)つまり式(4)の計算を多数回することになる。式(4)には式(2)の g_j ($j=1 \sim m$)が含まれるので、これは、原問題のシステムを多数回解析することを意味する。1回の解析に多くの計算時間を要しない小さなシステムの設計であれば、この手法は応用できるが、そうでなければこの手法の応用は難しい。

そこで考えられたのが、近似の概念を応用したNEWSUMT 2である

3. NEWSUMT 2

2次拡張ペナルティ関数法では、上記のように原問題のシステムを非常に多数回解析する必要がある。そこで三浦らは、各 k 回目のイテレーション毎に、目的関数および制約条件式を現在の設計点に関して線形近似し、各イテレーションの最適化の過程(無制約の最適化)では、現問題のシステムではなく近似モデルを解析する方法を提案した。

NEWSUMT 2におけるペナルティ関数 Φ およびペナルティ項 $\tilde{g}_j$ ($j=1 \sim m$) は、次式で定義される。

$$\Phi(X, r^{(k)}, \varepsilon^{(k)}) = \bar{F}(X) + r^{(k)} \sum_{j=1}^m \tilde{g}_j(X, \varepsilon^{(k)}) \rightarrow \min \quad (5)$$

ここで、

$$\tilde{g}_j(X, \varepsilon^{(k)}) = \begin{cases} -\frac{1}{\bar{g}_j(X)} & (\bar{g}_j(X) \leq \varepsilon^{(k)}) \\ -\frac{1}{\varepsilon^{(k)}} \left\{ \left(\frac{\bar{g}_j(X)}{\varepsilon^{(k)}} \right)^2 - 3 \left(\frac{\bar{g}_j(X)}{\varepsilon^{(k)}} \right) + 3 \right\} & (\bar{g}_j(X) > \varepsilon^{(k)}) \end{cases} \quad (6)$$

また、

$$\bar{F}(X) = F(X^{(k-1)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(X^{(k-1)})}{\partial x_i} (x_i - x_i^{(k-1)}) \quad (7)$$

$$\bar{g}_j(X) = g_j(X^{(k-1)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(X^{(k-1)})}{\partial x_i} (x_i - x_i^{(k-1)}) \quad (j=1 \sim m) \quad (8)$$

である。式(5)の無制約の最適化問題を解く過程においては、式(7)、式(8)の数式を計算するのみでよく、原問題のシステムを解く必要はないので、全体の最適化の効率はかなり向上する。

このNEWSUMT2の考え方を、初期値の改良に用いることにする。

4. コンピューターとの対話による初期値改良法

NEWSUMT2はすぐれた手法であり、安定性もあるが、やはりSUMT系の手法であるので、SLPあるいはその後応用されるようになったSQP¹⁰⁾、GRG¹¹⁾などに比べると効率は落ちる。しかし、初期値改良のための手法としては適しているので、NEWSUMT2により、初期値を改良し、改良初期値を用いて他の手法により最適化するというシステムは有効と考えられる。

NEWSUMT2が初期値改良に適している理由としては、ペナルティパラメーターの値のみで、無制約化された設計空間を自由に変形できるので、例えば、ユーザーからの初期値が極端に非許容な設計であっても、容易に許容設計を得られること、また、初期値が最適解から遠くても、制約条件の値を参考にしながらより最適解に近い改良初期値を得られることがあげられる。

また、他の最適化手法が初期値改良に向かない理由としては、まず、NEWSUMT2の場合のように、少ないパラメーターの値のみで設計空間を変形できないこと。初期値が悪条件であれば、得られる解(改良初期値)の安定性に欠けること。また、得られる解が許容領域(feasible region)の一方に偏る可能性があることなどがあげられる。

初期値改良には、NEWSUMT2を1回($k=1$)用いることにする。そのとき、式(5)～(8)は次のように定義される。

$$\Phi(X, r, \varepsilon) = \bar{F}(X) + r \sum_{j=1}^m \tilde{g}_j(X, \varepsilon) \rightarrow \min \quad (9)$$

ここで、

$$\tilde{g}_j(X, \varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{\bar{g}_j(X)} & (\bar{g}_j(X) \leq \varepsilon) \\ -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\bar{g}_j(X)}{\varepsilon} \right)^2 - 3 \left(\frac{\bar{g}_j(X)}{\varepsilon} \right) + 3 \right\} & (\bar{g}_j(X) > \varepsilon) \end{cases} \quad (10)$$

また、

$$\bar{F}(X) = F(X^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \quad (11)$$

$$\bar{g}_j(X) = g_j(X^0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(X^0)}{\partial x_i} (x_i - x_i^0) \quad (j=1 \sim m) \quad (12)$$

X^0 は初期値であり、問題によっては複数(N)の初期値を与えたほうが良い場合がある。そのとき、

$$x_{i0} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_{ik0} \quad (i=1 \sim n) \quad (13)$$

となり、また、 $\bar{F}(X)$ および $\bar{g}_j(X)$ は次式となる。

$$\bar{F}(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{F}_k(X) \quad (14)$$

$$\bar{g}_j(X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{g}_{jk}(X) \quad (j=1 \sim m) \quad (15)$$

ここで、 $\bar{F}_k(X)$ 、 $\bar{g}_{jk}(X)$ は、それぞれ X_{k0} に関して近似された目的関数および制約条件式である。本論文の初期値改良のアルゴリズムを説明すると以下ようになる。

まず、初期値 X_{k0} ($k=1 \sim N$) に対してシステムの感度解析を行い、式 (11)、(12) および式 (14)、(15) の近似式の係数を決定する。

次に、式 (13) で計算される初期値 X^0 に対してシステムを1度解析し、そのときの目的関数および制約条件式の値をそれぞれ F^0 、 g_j^0 ($j=1 \sim m$) とする。これらの値が、初期値改良の良否の判断の基準となる。

ペナルティパラメータ r の最初の値を F^0 と同じオーダーの10のべき乗とし、式 (9) を最小化する X を求める。この X にたいしてシステムをまた解析し、そのときの目的関数および制約条件式の値 F 、 g_j ($j=1 \sim m$) と F^0 、 g_j^0 ($j=1 \sim m$) とを比較し、改良初期値が満足できる設計であれば、それらを初期値とする最適化の過程に進み、満足できなければ、 r の値を変更して、上記の過程を繰り返すことになる。このとき、あらためてシステムの感度解析は必要なく、 r の更新のたびに1回のシステムの解析のみで良い。

以上のアルゴリズムの流れ図を、図-2に示した。

改良初期値の良否の判断は、目的関数の値と制約条件を満足しているかどうかを基準となる。目的関数の値が減少しているかどうか、制約条件を満足しているかどうかを、初期の状態 (F^0 、 g_j^0 ($j=1 \sim m$)) との関係で検討する。改良初期値が不適当であれば、ペナルティパラメータの値を変更するが、変更するかどうかの判断および新しいペナルティパラメータの値の決定を自動的に行うアルゴリズムを作成するのは困難であるし不十分なアルゴリズムでは逆効果になるので、コンピューターとの対話により決定することにした。

複数の初期値を考慮する理由は、例えば、図-1のような設計空間をもつ問題に、1点のみに関する近似モデルを作成すると、局地的な影響を受けて不適当なモデルを形成することがあるからである。

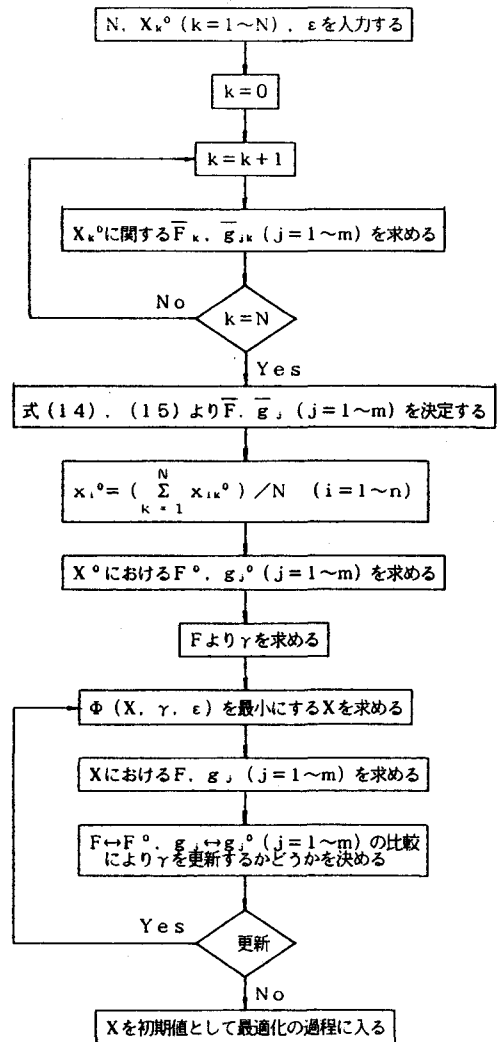


図-2 初期値改良のアルゴリズム

5. 対話型処理の例

図-1に設計空間を示した格子構造の設計問題を例にとり、対話型処理の例を説明する。図-3はコンピュータのスクリーンをコピーしたものである。

この場合は、初期値として(3, 50)と(55, 3)の2点を与えている。□で囲ったのが、コンピュータの間に対するユーザーの答えである。

以下、図の右の番号にしたがって説明する。

- (1) 式(13)で計算された初期値 X^0 に対してシステムを解析し、目的関数(OBJZ)および制約条件式の値(GZ)を出力する。GZの値より、初期値は制約領域内に十分入っていることがわかる。このとき、ペナルティパラメーター(GANMA)の値は 10^4 に設定されている。
- (2) 式(9)を最小にするXを求め、Xに対するシステムの解析の結果を出力する。()内は、 X^0 に対する値である。制約条件式の値は、最大値(GMAX)のみを出力している。GMAXの行の(1)は、制約条件式(1)の値が最大であったことを示す。NINF、NCRIおよびNFEAはそれぞれ、満足していない、クリテカルおよび満足している制約条件の数を示す。この結果は、目的関数の値は減少しているが、制約領域から大きくはずれていると判断される。
- (3) そのため、不可(1)と解答し、新しいペナルティパラメーターの値として 2×10^4 を解答する。
- (4) 新しいペナルティパラメーターに対するXと、そのときのシステムの解析結果である。目的関数も減し、制約条件も満足している。
- (5) そのため、可(0)と解答し、改良初期値と以上の改良の過程の結果のみを出力する。

OBJZ= 0.6080E+04 XZ= 0.2900E+02 0.2650E+02 GZ=-0.5442E+00 -0.7460E+00	(1)
** USABILITY CHECK OF INITIAL DESIGN ** * OBJECTIVE * 0.3150E+04(0.6080E+04) * CONSTRAINS * GMAX 0.5063E+00(1) (-0.5442E+00(1)) NINF,NCRI,NFEA 1(0) 0(0) 1(2) * DESIGN VARIABLES * 1 0.1540E+02(0.2900E+02) 2 0.1341E+02(0.2650E+02)	(2)
IF YOU USE THIS DESIGN,INPUT 0. OTHERWISE 1. FORMAT I1 1 CURRENT GANMA WAS 0.1000E+05. INPUT NEW GANMA. FORMAT F15.4 20000.0	(3)
** USABILITY CHECK OF INITIAL DESIGN ** * OBJECTIVE * 0.4199E+04(0.6080E+04) * CONSTRAINS * GMAX -0.1077E+00(1) (-0.5442E+00(1)) NINF,NCRI,NFEA 0(0) 0(0) 2(2) * DESIGN VARIABLES * 1 0.2063E+02(0.2900E+02) 2 0.1779E+02(0.2650E+02)	(4)
0 IF YOU USE THIS DESIGN,INPUT 0. OTHERWISE 1. FORMAT I1 OBJN= 0.4199E+04 GANMA= 0.2000E+05 XN= 0.2063E+02 0.1779E+02 GN=-0.1077E+00 -0.5268E+00	(5)

図-3 初期値改良の対話型処理の例

6. 数値計算例

数値計算例として、10部材トラスの設計および図-1に設計空間を示した格子構造の設計に応用した結果を示す。最適化手法としては、逐次2次計画法(SQP)、一般化縮約勾配法(GRG)、逐次線形計画法(SLP)および拡張ラグランジュ係数法(AL)を用いた。また、初期値改良のための無制約最適化手法としてはBFGSを用いた。いずれも汎用最適化プログラムADS¹⁾に含まれるものである。

また、式(9)の ε の値は-0.05としている。

(1) 10部材トラス

図-4に構造と荷重を示す10部材トラスの最小重量設計の例である。設計変数は、各部材の断面積(cm^2)であり、目的関数は総重量(kg)である。制約条件は、各部材の応力度であるが、詳細は省略する。

3種類の初期値を与え、初期値を改良した場合としない場合の結果を表-1に示した。最適化手法は、SQPの結果である。1~10が部材番号に対応し、Fは目的関数、 N_f は初期値あるいは改良初期値に対して行った最適設計に要した構造解析の回数である。初期値改良がある場合の N_f は、初期値改良に要した回数も含まれている。()内の数字が、改良初期値決定後の最適設計に要した構造解析の回数である。

初期値が 1 cm^2 で初期値の改良が行われない場合は、最適解に収束していない。また、 N_f の値の比較より、初期値を改良することにより、効率が向上していることが分かる。

(2) 格子構造

図-5に示す格子構造の最小重量設計問題である。この問題は、荷重とスパン長の与え方で、局所的最適解の数が異なる。詳細²⁾は省略する。この例題は、図-1に示すように解が3つあるケースである。

計算結果を、図-6~8、表-2に示した。図-6~8は、式(9)の等深線図を、 r の3種類の値(1000, 20000, 50000)に対して示した図である。 r の値のみで、無制約最適化問題の設計空間を自由にコントロールできることがわかる。

計算結果を表-2に示した。上段が初期値を改良しない場合、下段が2点の初期値を用い、その改良初期値をもちいた場合の結果である。初期値を改良しない上段の場合は

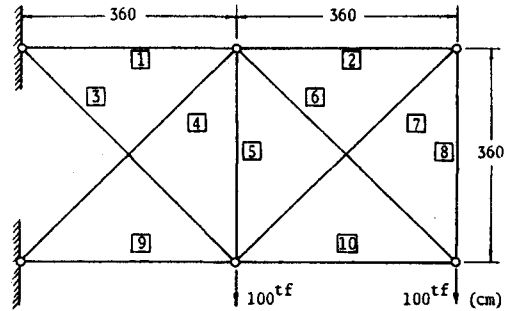


図-4 10部材トラス

表-1 10部材トラスの最小重量設計の結果

	初期値	初期値の改良		初期値	初期値の改良		初期値	初期値の改良	
		無	有		無	有		無	有
1	1.0	116.78	199.92	10.0	200.51	199.47	300.0	199.42	199.62
2		91.47	0.10		0.26	0.45		0.43	0.39
3		439.93	141.56		141.74	142.01		142.16	141.98
4		0.10	141.30		141.43	140.71		140.74	140.86
5		55.82	0.10		0.10	0.43		0.10	0.10
6		61.92	94.31		93.77	93.81		94.09	93.94
7		331.14	0.14		0.37	0.63		0.62	0.56
8		102.77	0.10		0.26	0.45		0.44	0.39
9		409.64	200.11		200.54	200.23		200.91	200.39
10		128.77	99.90		99.71	99.39		99.48	99.61
F		5887.8	2921.6		2924.9	2921.6		2924.4	2922.5
N_f		300	138(123)		177	96(82)		300	173(158)

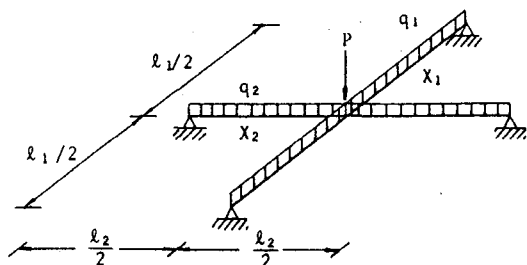


図-5 格子構造の問題

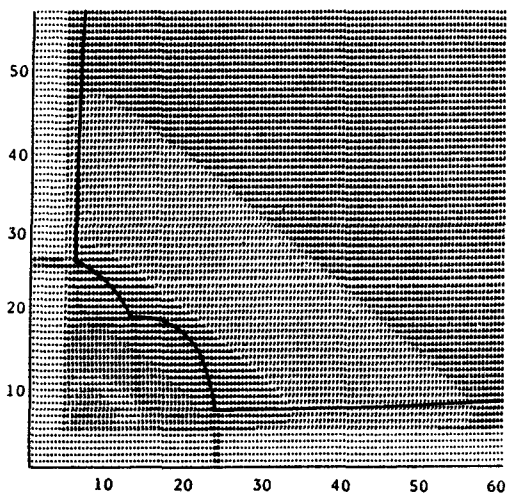


図-6 $r=1000$ のときの Φ の等深線図

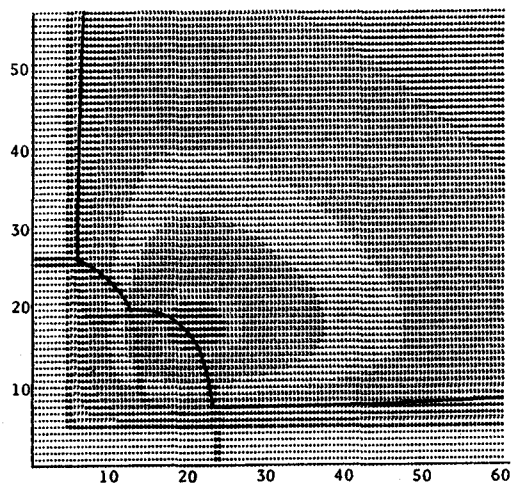


図-7 $r=20000$ のときの Φ の等深線図

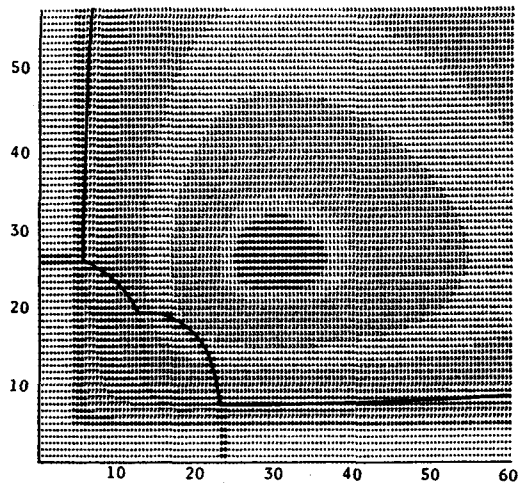


図-8 $r=50000$ のときの Φ の等深線図

表-2 格子構造の設計問題（3極値問題）の結果

最適化手法		SQP		GRG		SLP		AL	
初期値	計算された初期値	F	Nf	F	Nf	F	Nf	F	Nf
(3.50)		3607	35	3216	55	3607	20	3607	153
(8.30)		3607	40	3608	19	3607	17	3606	111
(30.10)		3199	23	3198	14	3196	17	3196	102
(55. 3)		3195	29	3199	32	3196	26	3196	137
(50.50)		3569	65	3197	37	3566	29	3196	118
(3.50)+(55. 3)	(20.6, 17.8)	3196	53(43)	3197	45(35)	3196	32(22)	3196	148(138)
(8.30)+(55. 3)	(36.2, 11.1)	3198	32(22)	3196	25(19)	3196	26(16)	3196	99(89)
(8.30)+(30.10)	(22.5, 19.0)	3196	54(42)	3196	51(41)	3196	35(25)	3196	132(122)
(50.50)+(55. 3)	(39.8, 15.4)	3196	37(28)	3197	41(32)	3196	31(22)	3196	151(142)

9 ケースで局所的最適解に収束しているが、改良初期値を用いた下段の場合は、全て全域的最適解に収束し、構造解析の回数もほとんど上段と差がない。

7. 結論およびあとがき

従来ほとんど研究されていなかった、数値最適設計のプレプロセッサの機能の一つとして、初期値改良について1方法を提案した。本論文より得られた事項を箇条書きにすると、以下のようになる。

- (1) 初期値改良の目的を考慮して、手法としてNEWSUMT2を用いた。基本的にはNEWSUMT2を初期に1回用いるという考え方であるが、改良初期値の可否の判断およびペナルティパラメータ r の更新は、コンピューターとの対話で行うことにしたので、初期値改良の過程の信頼性、効率が増した。
- (2) 本論文の方法は、汎用最適化プログラムADSのプレプロセッサの一部として研究されているものである。そのため、ユーザーから非常に悪条件の初期値を提供されることも考慮しなければならないが、対話型システムおよび複数の初期値(設計)の情報を利用することにより、数値計算例に見られるように、最適設計の過程の信頼性、効率を向上させる改良初期値が得られることがわかった。
- (3) 本論文の近似モデルは、設計変数に関する制約条件式の1次近似であり、最も簡単な近似モデルに属する。しかし、より高度な近似モデルを用いることにより、より効率的な初期値改良システムを作ることが可能である。

参考文献

- 1) Vanderplaats, G.N. and H.Sugimoto : A GENERAL-PURPOSE OPTIMIZATION PROGRAM FOR ENGINEERING DESIGN, Computers and Structures, Vol. 24, No. 1, pp. 96-100, 1986.
- 2) 杉本博之 : 制約最適化問題のスケーリングについて, 土木学会論文集(ノート), 第 356号, pp. 579-582, 1985.
- 3) Kirsh, U. (山田善一, 大久保禎二監訳) : 最適構造設計—概念・方法・応用—, 丸善株式会社, 1983.
- 4) Schmit, L.A. and H.Miura: AN ADVANCED STRUCTURAL ANALYSIS/SYNTHESIS CAPABILITY-ACCESS2, Inter. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 12, pp. 353-377, 1978.
- 5) Haftka, R.T. and J.H. Starnes: Application of a Quadratic Extended Interior Penalty Function for Structural Optimization, AIAA J., Vol. 14, No. 6, pp. 718-724, 1976.
- 6) Karvlie, D. and J. Moe: Automated Design of Frame Structures, ASCE J. Struct. Div., Vol. 97, No. ST1, pp. 33-62, 1971.
- 7) Cassis, J.H. and L.A. Schmit: On Implementation of the Extended Interior Penalty Function, Int. J. Num. Meth. Engin., Vol. 10, No. 1, pp. 3-23, 1976.
- 8) Prasad, B. : A Class of Generalized Variable Penalty Methods for Nonlinear Programming, J. Optim. Theory Appl., Vol. 35, No. 2, pp. 159-182, 1981.
- 9) 今野浩・山下浩 : 非線形計画法, 日科技連, 1978.
- 10) Vanderplaats, G.N. and H.Sugimoto: Application of Variable Metric Methods to Structural Synthesis, Engineering Computations, Vol. 2, No. 2, pp. 96-100, 1985.
- 11) Abadie, J. and J. Carpentier: Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints, in Optimization, R. Fletcher (ed.), Academic Press, 1969.