

常時微動法を応用したケーブル張力 測定器の開発研究

石川島検査計測（株） 正会員 ○島田忠幸
石川島播磨重工（株） 高橋正孝

1. 緒 言

最近、斜張橋やニールセン橋のように、ケーブルを組み込んだ大スパン橋梁の建設が多い。この形式の橋においては、張力が計画値どおりになっていることを、工事完了後のみならず、計画中に確認することが必要になる。

従来、ケーブル張力の測定は、油圧ジャッキやロードセルを用いて行っていた。しかし、最近では測定が簡便である、いわゆる振動法を採用することが多い。この方法は、ケーブルの振動数から張力を求めるものであるが、ケーブルを強制加振させて振動数を測定する方法では、測定精度や作業性等の面で問題が多い。

しかし、ケーブルは風・地盤等の外乱で常時微動している。この常時微動の振動波形をスペクトル解析すれば、振動数の測定は容易になる。さらに、急速な発展をみせている、最近のエレクトロニクス技術を利用した、計測システムを完成すれば、測定は著しく簡便になる。このような観点から、マイクロコンピュータを応用した測定器の開発を行った。その過程において、この測定器に適した時系列データのフーリエ変換計算法について一つの考案を行った。

2. 測定器の構成

図-1に装置構成図を示す。以下、これに基づいて測定器構成の説明を行う。

(1) 計測部

サーボ型加速度計をケーブルに取り付けて、ケーブルの常時微動波形を測定する。したがって、ケーブルを加振しなくても測定が可能である。

(2) 入力データ設定部

測定に先立ち、必要な全ケーブル諸元のインプットを行う。具体的にはケーブル長さ・単位長さ重量・断面積・曲げ剛性・および計画張力等である。

(3) 可変ローパスフィルタ

計測部からの出力は、カットオフ周波数をデジタル値で制御できるローパスフィルタに入力される。このローパスフィルタは、高周波数の雑音を除去し、離散的フーリエ変換における折り返し現象を防止する。カットオフ周波数をサンプリング定理のナイキスト周波数と一致させるとき測定精度は向上する。既製の周波数分析器を用いるときは、測定ケーブルの振動数に応じて、測定者がその都度、値を設定することになる。しかし、開発した測定器は測定開始時にケーブル諸元を入力するので、最大推定張力に対応した振動数は、ケーブルごとに計算することができ、この値を計算機から可変フィルタに伝えることによって、フィルター機能が自動的に働くよう設計されている。

このような方法で、データを読み込むときのサンプリング間隔： Δt とすると、サンプリング定理より、カットオフ周波数： f_s と Δt の間には

$$\Delta t = 1 / (2 f_s) \quad (1)$$

の関係がある。

(4) パルス雑音除去

橋桁は、自動車が走行していないときでも、衝撃音の生じることがある。読み込まれたデータには、これによってパルス雑音が含まれる。このような雑音があると、振動数の読み取りの困難になることがあるので、パルス雑音除去部でこれを除去する。

ここでは、読み込みデータを x_t 、一つ前のデータを x_{t-1} とするとき、

$$|x_t - x_{t-1}| < R \quad (R: \text{定数})$$

のときは入力データ (x_t) を通過させるが、

$$|x_t - x_{t-1}| \geq R$$

であると、読み込みデータ (x_t) は、前後のデータの平均をとり

$$x_t = (x_{t-1} + x_{t+1}) / 2 \quad (2)$$

として出力する。

(5) 離散的フーリエ変換部

離散的フーリエ変換は、原波形時系列データ

のパワースペクトルを求める処理である。測定振動数を f 、測定器が分解できる周波数を Δf 、データのサンプリング数を N とするとき、波形の定義は少なくとも、2 個のデータが必要になるので、

$$\Delta f = 2 * f_s / N \quad (3)$$

となる。周波数の分解能 $\Delta f / f$ は

$$\Delta f / f > \Delta f / f_s = 2 / N \quad (4)$$

$\Delta f / f$ の小さいときは測定精度は向上するが、このためには (3) にて述べたようにカットオフ周波数: f_c を測定振動数: f にできるだけ接近させることが必要になる。さらに、 $\Delta f / f \approx \Delta f / f_s = 0.005$ 以下にするためには、データのサンプリング数を少なくとも、1024 以上にする必要がある。この計算をマイクロコンピュータで行うため、高速フーリエ変換 (FFT) よりも演算回数が少なく、かつメモリー容量の少ない一つのアルゴリズムを考案した。

(6) 固有振動数探索部

固有振動数は、パワースペクトルの卓越周波数を計算機が自動的に探索するよう設計されている。しかし、例えばケーブルのサグの大きいときは、一次の振動数が卓越していても、二次の振動数が必要になる。このため、測定器の画面に表示されたスペクトルを測定者が判断して、マニュアルで振動数を設定することもできる。

(7) 張力演算部

ケーブル長さの長いときは、ケーブルの振動数と張力の関係は弦に対する式で充分であるが、長さの短いときはケーブルの曲げ剛性の影響が大きくなるので、振動方程式は

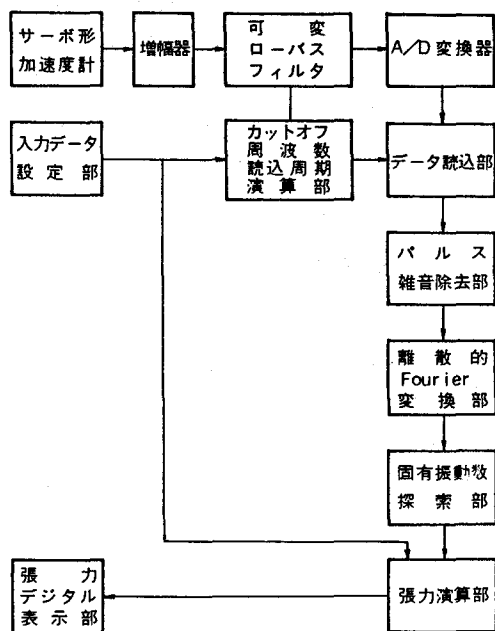


図-1 装置構成図

$$\frac{w}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

ここで x ケーブル長さ方向の座標 y 座標 x におけるケーブル変位
 t 時間 w 単位長さ重量
 EI ケーブルの曲げ剛性 T ケーブル張力

ケーブルの端部がオープンソケットのついた長さの短いケーブル以外は、端部の境界条件は固定と考えることができる。このとき、式(5)は

$$2\alpha\beta(1 - \cos\alpha\ell \cosh\beta\ell) + (\beta^2 - \alpha^2) \sin\alpha\ell \sinh\beta\ell = 0 \quad (6)$$

となる。ここで

$$\alpha^2 = \frac{-\sqrt{b^2 + 4a\omega^2} - b}{2a} \quad \beta^2 = \frac{\sqrt{b^2 + 4a\omega^2} + b}{2a}$$

$$a = EIg/w$$

$$b = Tg/w$$

式(6)は超越方程式になり、測定中に簡単に計算をすることが困難である。このため、新家ら¹⁾は線型化した張力実用算定式を提案している。張力はこの実用算定式を用いて計算することもできるが、本測定器は計算機能を内蔵するので、式(6)を基に反復計算を行って張力を求めている。

(8) デジタル表示部

測定したケーブルの振動数・張力は画面表示されるが、この他必要に応じて、プリンターあるいは、プロッターに打ち出すことができる。

3. フーリエ変換アルゴリズム

マイクロコンピュータを用いて、スペクトル解析のプログラムを作成するとき、メモリ容量と演算回数を極力少なくすることが必要になる。1965年、CooleyとTurkeyによって発表されたFFT²⁾によって、それまでの計算方法と比較して、DFT演算を高速に計算することが可能になった。

しかし、FFTアルゴリズムは複素演算を前提としているため、データエリヤはデータ点数の倍だけ必要になる。ここでは、マイクロコンピュータを用いた計算を行うため、さらに演算回数の少ない計算法が要望された。

このため、DFT行列を新たな方法で分解することによって、入力波形を実数として取り扱い、データエリヤはデータ点数と同じになる一つのアルゴリズム：MFT(Micro Fourier Transform)を作成した。この方法によると、例えば、データ点数が1024点のとき、FFTと比較して、乗算数は1/3、加算数は1/2となり、張力測定器への適用については、適切な方法であると言える。

一方、フーリエ変換アルゴリズムとしては、1975年、Winogradが発表したWFT³⁾⁴⁾がある。この演算方法では、データ点数が二つ以上の素数を含むときに、演算回数はFFTと比較して圧倒的にすくなくなる。これらのアルゴリズムは、計算用途に応じた特質があり、単に演算回数だけで評価を行うことは適切ではない。ここでは、張力測定器への適用を目的としたアルゴリズム(MFT)として紹介を行う。

(1) 本アルゴリズムの計算原理

時系列データ $x(t)$ を時間間隔 Δt でサンプリングしたデータを x_k ($k=0,1,\dots,N$) で表示

すると、 x_k は離散的フーリエ変換 (DFT) で表すことができる。

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i \frac{2\pi}{N} k j} \quad (7)$$

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i \frac{2\pi}{N} k j} \quad (8)$$

離散的フーリエ変換式 (7) で得られた X_k と、 X_{N-k} ($k=0, 1, \dots, N/2$) が互いに共役であること、実数演算のみを使うことを考え、式 (7) を

$$Y = W X \quad (9)$$

とする。ここで

X N次列ベクトルで、時間波形 x_j ($j=0, 1, \dots, N-1$) を成分とする。

Y N次列ベクトルで、各成分はフーリエ成分 X_k ($k=0, 1, \dots, N-1$) により、つぎのように表される。

$$\begin{aligned} Y_k &= N \cdot \operatorname{Re} (X_k) & (k=0, 1, \dots, N/2) \\ Y_{N-k} &= N \cdot \operatorname{Im} (X_k) & (k=1, 2, \dots, N/2-1) \end{aligned} \quad (10)$$

W $N \times N$ 行列で各成分は三角関数により、つぎのように表される。

$$\begin{aligned} W_{k,j} &= \cos 2\pi k j / N & (k=0, 1, \dots, N/2) \\ W_{N-k,j} &= \sin 2\pi k j / N & (k=1, 2, \dots, N/2-1) \end{aligned} \quad (11)$$

さらに、Wをつぎの形に分解できるようにした。

$$W = V_1^N V_{N-1}^N \cdots V_1^N U_1^N U_2^N \cdots U_{N/2}^N \quad (12)$$

ここで、 V_r^N 、 U_r^N は $N \times N$ 行列であり、 $r \leq m-1$ のとき $2^r \times 2^r$ 行列 V_r 、 U_r を対角行列としてもつ。式 (12) の具体的な形を示すため、Nが小さいものから分解する。N=2のときYは式 (9) から、Wは式 (11) から求めると

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} x_0 + x_1 \\ x_0 - x_1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

となる。よって

$$V_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad U_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

とすることができる。N=4のとき、式 (15) よりWを計算すると、

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

式 (15) を式 (12) の形に分解すると

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & U_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (16)$$

$(V_2^4) \quad (V_1^4) \quad (U_1^4) \quad (U_2^4)$

同様に、 $N=8$ における (V_3^8, U_3^8) と、 $N=16$ における (V_4^{16}) の値を図-2, 3に示す。このように順次、 N が大きいものに分解すると、 V_r, U_r の一般形はつぎのように分解することができる。 V_r の非零成分は

$$\begin{aligned} V_{0,0} &= V_{2^r-1,0} = V_{0,2^r-1} = V_{2^r-2,2^r-2} = V_{3,2^r-2,3,2^r-2} = 1 \\ V_{s,s} &= V_{2^r-1-s,s} = V_{2^r-s,2^r-1-s} = 1 \\ V_{2^r-1,2^r-1} &= V_{2^r-1+s,2^r-1-s} = -1 \\ V_{s,2^r-1+s} &= V_{2^r-1+s,2^r-s} = V_{2^r-s,2^r-s} = C_s \\ V_{2^r-1-s,2^r-1+s} &= -C_s \\ V_{2^r-1-s,2^r-s} &= V_{2^r-1+s,2^r-1+s} = V_{2^r-s,2^r-1+s} = S_s \\ V_{s,2^r-s} &= -S_s \end{aligned} \quad (17)$$

となる。ただし、上記の S は $(S=1, 2, \dots, 2^{r-2}-1)$ である。また $C_s = \cos(2\pi S/N)$, $S_s = \sin(2\pi S/N)$ である。 U_r の非零成分は

$$U_{s,2s} = U_{2^r-1+s,2s+1} = 1 \quad (S=0, 1, \dots, 2^{r-1}-1) \quad (18)$$

となる。この分解が $N=2, 4$ について正しいことは前述した。 $m (= \log_2 N)$ のすべての級数について正しいことは、数学的帰納法によって証明できる。

(2) アルゴリズム

式(9)(12)による演算

$$Y = W X = V_N^N V_{N-1}^N \cdots V_1^N U_1^N U_2^N \cdots U_N^N X \quad (19)$$

の手順を定める。 $U_1^N U_2^N \cdots U_N^N$ は順次成分の並べ替えを行う。2進数で順番を表すと、 x の $(b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1)$ 番目のデータは、 U_N^N により $(b_1, b_{n-1}, \dots, b_2)$ 番目に移り、 U_{N-1}^N により $(b_1, b_2, b_{n-1}, \dots, b_3)$ 番目に移り $\cdots U_2^N$ により $(b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ 番目に移る。すなわち、 $(U_1^N U_2^N \cdots U_N^N x)$ は、 x に逆順序のビット並び替え⁵⁾を行う。つぎに、 $U_1^N U_2^N \cdots U_N^N x = x_0, V_1^N x_0 = x_1, V_2^N x_1 = x_2, \dots, V_N^N x_{N-1} = x_N = Y$ として、 r 段目の演算である、 $x_r = V_r x_{r-1}$ を考える。 V_r は行列 V_r を $N/2^r$ 個、対角行列で構成したものであるから、 $p=0, 1, \dots, N/2^r-1$ として、 p 番目の V_r を調べる。式(17)の

$$V_{0,0}=1 \quad V_{0,2^r-1}=1 \quad V_{2^r-1,0}=1 \quad V_{2^r-1,2^r-1}=-1$$

に対して式(20)の計算を行い、モス演算と呼ぶ。

$$U_3^8 = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$V_3^8 = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{vmatrix}$$

図-2 V_3^8 , U_3^8 の計算

$$V_4^{16} = \begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_s = \cos \frac{2\pi}{16} S, \quad S_s = \sin \frac{2\pi}{16} S$$

図-3 V_4^{16} の計算

$$x_r^{p2^r} = x_{r-1}^{p2^r} + x_{r-1}^{p2^r+2^{r-1}} \quad x_r^{p2^r+2^{r-1}} = x_{r-1}^{p2^r} - x_{r-1}^{p2^r+2^{r-1}} \quad (20)$$

$$V_{2^{r-2}, 2^{r-2}} = V_{3, 2^{r-2}} = 1$$

に対して式(21)の計算を行い、これをアロー演算と呼ぶ。

$$x_r^{p2^r+2^{r-2}} = x_{r-1}^{p2^r+2^{r-2}} \quad x_r^{p2^r+3 \cdot 2^{r-2}} = x_{r-1}^{p2^r+3 \cdot 2^{r-2}} \quad (21)$$

この演算はなにもしないことに対応する。

$$V_{s,s} = V_{2^{r-1}-s,s} = V_{2^r-s, 2^{r-1}-s} = 1$$

$$V_{2^{r-1}+s, 2^{r-1}-s} = -1$$

$$V_{s, 2^{r-1}+s} = V_{2^{r-1}+s, 2^r-s} = V_{2^r-s, 2^r-s} = C_s$$

$$V_{2^{r-1}-s, 2^r-s} = V_{2^{r-1}+s, 2^{r-1}+s} = V_{2^r-s, 2^{r-1}+s} = S_s$$

$$V_{s, 2^r-s} = -S_s$$

$$V_{2^{r-1}-s, 2^{r-1}+s} = -C_s$$

に対して式(22)の計算を行い、これをスパイダ演算と呼ぶ。

以上、MFTの演算フロー例を図-4に示し、アルゴリズムを図-5に示す。つぎに、このアルゴリズムによる演算数を調べる。モス演算は加算2個、スパイダ演算は加算6個

$$x_r^{p2^r+2^r+s} = x_r^{p2^r+2^{r-1}-s} + C_s x_{r-1}^{p2^r+2^r-s} + S_s x_{r-1}^{p2^r+2^{r-1}+s}$$

$$x_r^{p2^r+2^{r-1}+s} = -x_r^{p2^r+2^{r-1}-s} + C_s x_{r-1}^{p2^r+2^r-s} + S_s x_{r-1}^{p2^r+2^{r-1}+s}$$

$$x_r^{p2^r+2^{r-1}+s} = x_{r-1}^{p2^r+s} - C_s x_{r-1}^{p2^r+2^{r-1}+s} + S_s x_{r-1}^{p2^r+2^r-s} \quad (22)$$

$$x_r^{p2^r+s} = x_{r-1}^{p2^r+s} + C_s x_{r-1}^{p2^r+2^{r-1}+s} - S_s x_{r-1}^{p2^r+2^r-s}$$

乗算4個から構成される。r 段目には 2^{m-1-r} 個の組がある。一組にはモス演算、アロー演算がそれぞれ1個、スパイダ演算が $2^{r-1} - 1$ 個ある。よって全体で

$$\begin{aligned} \text{スパイダ演算乗算数} &= \sum_{r=2}^{m-1} 2^{m-1-r} \times 4 \times (2^{r-1} - 1) \\ &= (m-3) 2^m + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{スパイダ演算加算数} &= \sum_{r=2}^{m-1} 2^{m-1-r} \times 6 \times (2^{r-1} - 1) \\ &= 3(m-3) 2^{m-1} + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{モス演算加算数} &= \sum_{r=0}^{m-1} 2^{m-1-r} \\ &= 2(2^m - 1) \end{aligned}$$

になり、全乗算数 $(m-3) 2^m + 4$ 、全加算数 $(3m-5) 2^{m-1} + 4$ となる。表-1 にMFTとFFTの演算比較を示す。

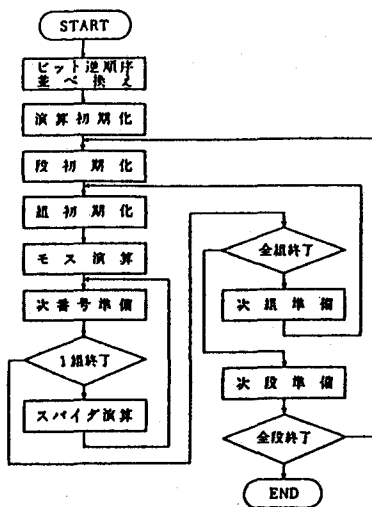


図-4 MFTの演算フロー

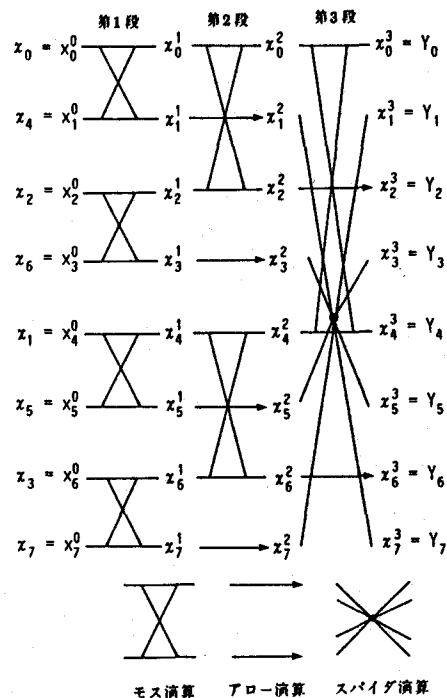


図-5 アルゴリズム

表-1 MFTとFFTの演算比較

種別	項目	単純DFT	FFT	本方式	本方式/FFT
N = 8 のとき	乗算数	64	48	4	1/12
	加算数	56	72	20	1/3.6
N = 1024 のとき	乗算数	1 048 576	20 480	7 172	1/3
	加算数	1 047 552	30 720	12 804	1/2.3

つぎに、Winogradの考案したWFTとの比較を行ってみる。WFTのデータは2個以上の素数を含むので、1024近辺のデータとしては、N=1008のときに、WFTでは乗算数4212加算数35244 になり、FFTでは乗算数20115，加算数30172 になる。一方、MFTのデータ数は2のべき乗である。データ数を同じにした比較はできないが、いまN=1008におけるWFTと、N=1024におけるMFTの演算数を比較してみると、加算数はMFTがWFTの1/2.7 になっており、乗算数はMFTがWFTの1.7 倍になっている。つまり、乗算数はMFTの方が大きく、加算数はWFTが大きい。

データエリアについては、WFTはデータ数の7倍必要になるが、MFTはデータ数だけのエリアがあれば充分である。データエリアの少ない点で、MFTは張力測定器に適している。さらに、WFTはデータ数に関係しない統一的なアルゴリズムになっていないので、張力測定器への応用には適さないと思われる。

4. まとめ

- 1) 振動法によるケーブル張力測定の実用化を目的として、常時微動法を原理とする、マイクロコンピュータを内蔵した張力測定システムの紹介を行った。センサーをケーブルに取り付けるだけで張力測定が可能であり、ケーブルを組み込んだ橋梁の施工管理に適用できる。
- 2) 加速度波形をフーリエ変換して、パワースペクトルを計算するに際して、張力測定器に適した一つのアルゴリズム(MFT)の考案を行った。FFTと比較すると、データ数1024のとき、乗算回数は1/3，加算回数は1/2.3になる。

参 考 文 献

- 1) 新家 徹・広中邦汎・頭井 洋・西村春久：振動法によるケーブル張力の実用算定式について、土木学会論文集，第291号，1980年2月，pp.25-30
- 2) Cooley, J.W. and Turkey, J. W.: An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series, Mathematics of Computation vol 19, No.90, pp.247-301 (1965).
- 3) L.Ausland, E.Fei and S.Winograd: New Algorithms for the Multidimensional D.F.T., IEEE Trans.ASSP-31.2, pp.388-403(1973)
- 4) Harvery F.Silverman :An Introduction to Programming the Winograd Fourier (WFTA)., IEEE Trans.ASSP-25, No.2 April(1977)
- 5) BRIGHAM 著，宮川洋・今井秀樹訳：高速フーリエ解析変換，科学技術出版社，昭和54年12月