クロソイド曲線の簡便計算法について

名古屋大学　正　島田　静雄

1．概説

道路、鉄道の緩和曲線にはクロソイド曲線が採用されることが多い。この曲線は数学ではCornuの螺旋と呼ばれ、座標値は Fresnelの積分で求める（1）。英語の技術用語ではHighway Spiralと呼ぶようであって、ドイツ語（klothoide）に相当する用語は見当たらない。何れにせよ、道路・鉄道の線形設計にクロソイドを応用することは既に実用的に定着して久しい（2）。本論文においてクロソイドの計算方法を改めて取り上げたのは、この曲線を手軽に精度良くコンピュータグラフィックスで描きたい、という単純な理由で出発したのであるが、実務の計算にも耐える簡便さと精度とが得られるので、クロソイド計算の実用式としても提案することにした。

計算の方法は、任意の区間のクロソイド曲線を等間隔に分割して、格点座標を順に追跡して求める、つまり和文法である。格点間の性質については、この小区間の曲線が梁の曲げ変形と同じ性質を持つことを応用したアルゴリズムを用いた。クロソイドの基本的性質は、曲率が曲線の長さ方向に直線的に変化する。これはこの小区間を、両端で曲げモーメントが作用する梁の変形、即ち三次式で近似することができる。

大きな曲線は、この小区間の曲線を接線を一致させて接続させる。この際、梁の支間は曲げによって幾らか短くなるので、これを補正する。図・1はこの様にして2回り(720°)の螺旋を描いたものである。全長を100等分、20等分、10等分してえがいた 図を重ねて図示してあるが、多角形の頂点が曲線に接していることがこの計算方法の精度を証明している。作図に用いたプログラムは著者の開発した G-BASICである（3）。

計算の精度は小区間の曲線の精度と分割数で決まる。級数の最初の数項で充分な精度が得られるように分割数を決めることができる。

2．クロソイドの級数式

曲線の式を表すにはベクトルを用いる表現が便利である。いま、曲線の性質を下に示すベクトル及びスカラーで与えることにする。

$\mathbf{r}$：曲線状の点を表す位置ベクトル（x，y）
t：スカラー、曲線に沿って測った長さ
$\mathbf{v}$：接線ベクトル、$|\mathbf{v}|=1$
$\mathbf{c}$：法線ベクトル、$|\mathbf{c}|=1$、$\mathbf{v}$と直交する
k：曲線の曲率　（1／R）

これらについて、次の関係式があって、Frenet-Serretの公式といはれる

$$d\mathbf{r}/dt=\mathbf{v}$$
$$d\mathbf{v}/dt=k\mathbf{c}$$
$$d\mathbf{c}/dt=-k\mathbf{v}$$

さて、クロソイドの関係式は、曲率kが一様に増加、もしくは減少するものであって、クロソイドのパラメータAをつかうと$|\rho|=1/A^2$であって

$$dk/dt=\rho$$

但し、数学的にはρに負の値も許せるが、普通の参考文献では$\rho>0$の場合を取り扱っている。

クロソイドのパラメータとして、曲線の接線とx軸とのなす角度をτの記号を用い、

$$d\tau/dt=k$$

```
 10 REM ====== Cornu's Spiral Drawing =======
 20 DEF2PT P : DEF2ED E : CLS : GROFF
 30 DPWIND 0.5, 0.5, 2.1
 40 TH=4*3.1416 : REM ----- two rounds spiral -----
 50 INPUT N
 60 P=P0 : SEGL=SQR(TH*2)/N
 70 LET E0=0,0,SEGL,0 : ANG0=SEGL*SEGL/6*180./3.1416
 80 FOR I=1 TO N
 90 K=1-3*I+3*I*I : ANG=ANG0*K
100 TR=SEGL*SEGL*(I+I-1) : TR=1-TR*TR/96 : E1=E0*TR
110 GRON : E=MROT(ANG,P0)*E1+P : GROFF
120 P=REV(E)
130 NEXT I
140 GOTO 40
```

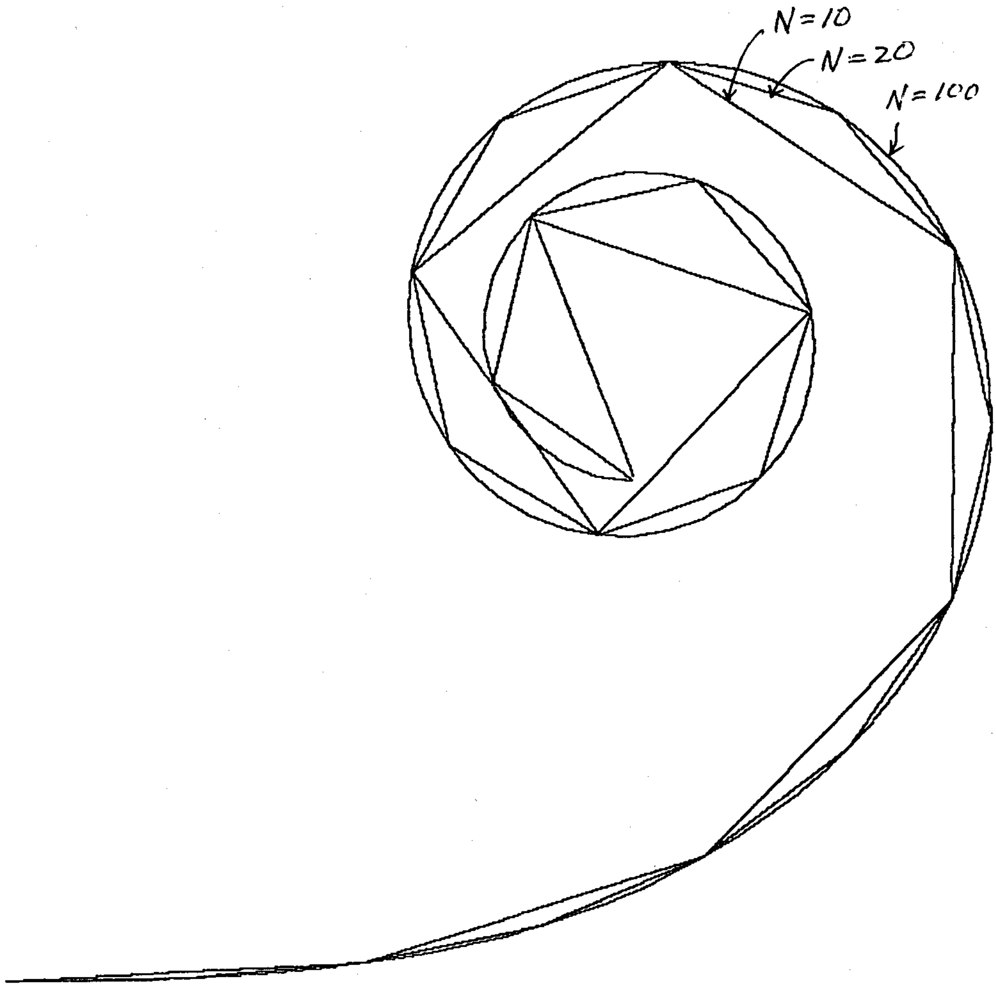

図-1

上の関係式を用いると、ある曲線上の点rについて次のマクローラン展開式が求められる。

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} + t\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \frac{t^3}{3!}\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} + \frac{t^4}{4!}\cdots\cdots$$
$$= \mathbf{r} + f(t,k,\rho)\mathbf{v} + g(t,k,\rho)\mathbf{c}$$

ここにfとgとはt、k、ρ の関数であって、パラメータが複雑になるので下に示すように表の形で整理して示す。上式において、rはt＝0の曲線の座標、d$\mathbf{r}$／dtの微分はFrenet-serretの公式を順に適用して求め、ベクトル$\mathbf{v}$と$\mathbf{c}$との成分について係数を級数和で表したものをfとgとで表した。級数の各項の値は表-1に示す。

この展開式は、クロソイド上の任意の点を基点としてその近傍の座標値を求めるのに用いることができる。この際ベクトル$\mathbf{v}$は基点での接線方向でx軸、ベクトルの向きをy軸と置けばよい。普通に用いるクロソイドの級数式はk＝0となる点を基点としたもので、$\rho＝1／A^2$を代入する。$\mathbf{v}$の項の和がx座標、$\mathbf{c}$の項の和がy座標である。このとき、偶数次の項は0になり、実用式は表-1には示さなかったが15次までの項の和で与えてある。

また、表-1において$\rho＝0$と置いたものは円弧である。v、cの各項はCOS(K)、及びSIN(K)の展開式の級数を与える。

表−1　fとgを構成する級数のパラメータ

		f	g
		v	c
1	t	1	0
2	$t^2/2!$	0	k
3	$t^3/3!$	$-k^2$	ρ
4	$t^4/4!$	$-3k\rho$	$-k^3$
5	$t^5/5!$	$k^4-3\rho^2$	$-6k^2$
6	$t^6/6!$	$10k^3\rho$	$k^5-15k\rho^2$
7	$t^7/7!$	$-k^6+45k^2\rho^2$	$15k^4\rho-15\rho^3$
8	$t^8/8!$	$-21k^5\rho+105k\rho^3$	$-k^7+105k^3\rho^2$
9	$t^9/9!$	$k^8-210k^4\rho^2+105\rho^4$	$-28k^6\rho+420k^2\rho^3$
	-----	-----	-----

3．クロソイドの和分式

クロソイドの曲線に沿って測った一定長さℓごとに格点を定め、これにi＝0、1、2…の様に番号をつける。i番目の格点の性質を次のように決めよう。

x_i, y_i ：座標

$t_i = \ell i$ ：部材長

$k_i = k_0 + \ell\rho i$ ：曲率

$\tau_i = \tau_0 + k_0\ell i + \rho\ell^2 i^2/2$ ：接線とX軸とのなす角

$\theta_i \fallingdotseq \ell(2k_i + k_{i+1})/6$ ：接線と線分とのなす角

$\quad = k_0\ell/2 + (1+3i)\rho\ell^2/6$

$\varphi_i = \tau_i + \theta_i$ ：線分の偏角

$\quad = \tau_0 + k_0\ell(2+i)/2 + \rho\ell^2(1+3i+3i^2)$

$d_i \fallingdotseq \ell$ ：線分長

ここでθ_iはi点とi＋1点とを結ぶ直線と曲線の接線とのなす角度であって、図-2に示す様に、この区

間を弾性梁と考えたときの梁のタワミ角である。d_i は i 点と（i＋1）の直線距離で、近似的に ℓ であるが ℓ よりも小さくなる。この値については後述する。θ_i についても補正して用いることもできる。

格点 i から接点（i＋1）の座標は次式で求まる。

$$x_{i+1} = x_i + d_i \mathrm{COS}\,\phi_i$$

$$y_{i+1} = y_i + d_i \mathrm{SIN}\,\phi_i$$

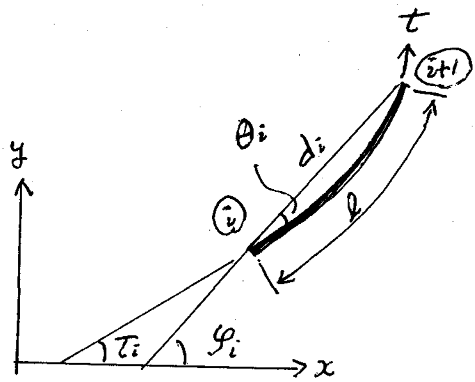

図-2

4．誤差とその補正

あるクロソイド上の点から、次の点を決める理論式は表-1に示す無限級数である。和分における誤差は差分項と級数表示との相違によって生ずる。まず一般論として、曲線の区間長 ℓ その弦長 d の差を考えよう。仮に曲率 k の円弧であると、$k\ell$ は円弧をはさむ角度である。弦長と弧長との比は

$$d/\ell = (2/k\ell)\ \mathrm{SIN}\ (k\ell/2)$$

$$= 1 - k^2\ell^2/24 + k^4\ell^4/1920 - \cdots$$

長さの補正を第2項で止めれば、計算の精度は $k^4\ell^4/1920$ の値で決まる。$k\ell=1$ とすれば、計算精度は有効数字4桁 $k\ell=0.1$ とすれば、有効数字7桁、$k\ell=0.01$ とすれば12桁になる。仮に $k\ell=1$ とすると長さの誤差は4％、$k\ell=0.1$ では0.04％であるので、このことを考えて $k\ell$ の値を1より小さく選び ℓ を決めるべきである。k の最大値、つまり回転半径の最小値を見て区間長 ℓ を決定する。次に ρ の値であるが、これはクロソイドのパラメータ（$1/A^2$）であるが、式の扱いは常に $\rho\ell^2$ の形を用いる。求めるクロソイドの曲線を n 等分して求めることを考えると $\rho\ell^2 \approx k\ell/n$ の大きさである。

k と ρ とを含めた長さの補正係数は表-1の級数項の性質を用いて求め、下のように得られる。

$$d/\ell = 1 - \frac{k^2\ell^2}{24} + \frac{k^4\ell^4}{1920} - \frac{\rho^2\ell^4}{1440} \cdots$$

角度 θ については、同じく表-1の　に関する級数が SIN θ であることを考えて理論上の誤差を求めると

$$-\Delta\theta = \frac{k^2\rho\ell^4}{720} + \frac{k\rho^2\ell^5}{720} + \frac{\rho^3\ell^6}{2835} \cdots$$

θ の誤差は長さの誤差に対して1桁以上小さいので $k\ell$ の値を充分小さく選べば、角度の補正は必要としない。

長さの補正を第2項で止めれば、計算の精度は $k^4\ell^4/1920$ の値で決まる。$k\ell=1$ とすれば、計算精度は有効数字4桁、$k\ell=0.1$ とすれば、有効数字7桁、$k\ell=0.01$ とすれば12桁になる。

参考文献

1．森口、宇田川、一松、数学公式Ⅲ　岩波全書、２４４、１９６０、Ｐ．２３

2．伊吹山他　クロソイドポケットブック　日本道路協会編、１９７３

3．島田　幾何言語(GEOMETRY)の開発　第１０回電算機利用に関するシンポジウム講演集　ＰＰ．４５～５２、土木学会１９８５