

FEMとBEMを用いた骨組構造解析の教育パソコンシステム

日立オートモティブエンジニアリング

○竹洞 聡

岩手大学工学部土木工学科

宮本 裕

岩崎正二

出戸秀明

岩手大学教育学部技術科

辻野哲司

1. まえがき

平面骨組構造物を解析し、変形図を図形出力処理することは、構造物の変形性状を視覚的にとらえるという意味で、教育的にも研究的にも重要である。従来はFEMで解析していた結果を図形出力する際、節点の変位を直線で結んでいた。そのため部材間の結合状態による変形の影響を正しく反映することは困難であった（完全固定結合の場合端部のたわみ角は0になるのに対し、ヒンジ結合ではたわみ角が0にはならない）。また分布荷重による桁の連続的な変形状態を正確に作図することも困難であった。

ところで、最近注目されつつあるBEM（Boundary Element Method 境界要素法）の手法をこの変形計算にあてはめると、部材両端の変位や力から、部材間の途中の変位や力を計算することは容易である（BEMで言えば、境界量から内点の情報を計算する手続きとなる）。

全体の手法をまとめると、骨組構造物をFEMで解析し、さらに細部の変形状態をBEMで計算し、変形の結果を図化するものである。

本研究の特徴を箇条書にすると以下ようになる。

①図形処理のため、日本電気製のPC9801のBASIC言語を使用している。

②対象となる平面骨組構造物はラーメン構造物も扱え、自由度は3（水平変位、垂直変位、回転角）である。

③対象とする荷重は一般的な台形分布荷重であり²⁾、この特別な例として等分布荷重や水圧などの三角形分布荷重も扱える。なお集中荷重も当然扱える。

④支点条件として固定のほかヒンジ支点や弾性支点も扱える。

⑤部材間の結合状態は（ラーメンのような）完全固定のほかヒンジ結合も扱える。

⑥数値実験であるが、精度の良いシュミレーションとしての教育用の利用が考えられる。

2. 理論

周知のように台形分布荷重を受ける部材の剛性マトリックスはつぎのようになる²⁾。

$$\begin{Bmatrix} M(0)/EI \\ M(l)/EI \\ Q(0)/EI \\ Q(l)/EI \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/l & 2/l & -6/l^2 & 6/l^2 \\ 2/l & 4/l & -6/l^2 & 6/l^2 \\ -6/l^2 & -6/l^2 & 12/l^3 & -12/l^3 \\ 6/l^2 & 6/l^2 & -12/l^3 & 12/l^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta(l) \\ w(0) \\ w(l) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{Bmatrix}$$

ここで

.....(1)

$$G_1 = \frac{Ab+B}{12EI l^2} (3\xi^4 - 4l\xi^3) - \frac{Aa+B}{12EI l^2} (3\eta^4 - 4l\eta^3) \\ + \frac{A}{60EI l^2} [3(\xi^5 - \eta^5) - 5l(\xi^4 - \eta^4)],$$

$$G_2 = \frac{Ab+B}{12EI l^2} (3\xi^4 - 8l\xi^3 + 6l^2\xi^2) \\ - \frac{Aa+B}{12EI l^2} (3\eta^4 - 8l\eta^3 + 6l^2\eta^2) \\ + \frac{A}{60EI l^2} [3(\xi^5 - \eta^5) - 10l(\xi^4 - \eta^4) + 10l^2(\xi^3 - \eta^3)],$$

$$H_1 = -\frac{A b + B}{2 E I \ell^3} (\zeta^4 - 2 \ell \zeta^3) + \frac{A a + B}{2 E I \ell^3} (\eta^4 - 2 \ell \eta^3) \\ - \frac{A}{20 E I \ell^3} [2 (\zeta^5 - \eta^5) - 5 \ell (\zeta^4 - \eta^4)],$$

$$H_2 = -\frac{A b + B}{2 E I \ell^3} (\zeta^4 - 2 \ell \zeta^3 + 2 \ell^3 \zeta) \\ - \frac{A a + B}{2 E I \ell^3} (\eta^4 - 2 \ell \eta^3 + 2 \ell^3 \eta) \\ + \frac{A}{20 E I \ell^3} [2 (\zeta^5 - \eta^5) - 5 \ell (\zeta^4 - \eta^4) + 10 \ell^2 (\zeta^3 - \eta^3)],$$

$$A = \frac{q_2 - q_1}{b - a}, \quad B = \frac{q_1 b - q_2 a}{b - a}, \quad \zeta = \ell - b, \quad \eta = \ell - a$$

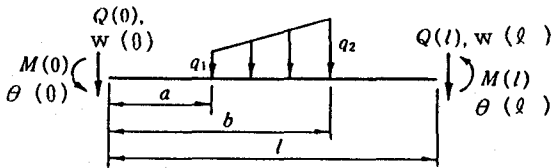


図 - 1

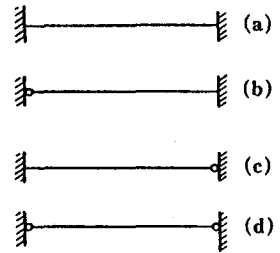


図 - 2

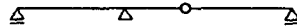


図 - 3

なおこの剛性マトリックスをもとにして、図-2のような部材端にヒンジのある場合の剛性マトリックスも誘導できる。これらのマトリックスを使えば図-3のような途中にヒンジがある場合の構造物も解析できる。従来は剛性マトリックス法により各節点での変位を計算し、それらの各節点での変位を直線でつないでディスプレイ画面に表示していた。しかしこれだと支点などの拘束条件による変位の実際の状態（固定端におけるたわみ角の零となる場合）が必ずしも正確には表せなかった。一方BEM（境界要素法）という計算方法によれば、部材の両端の物理量（たわみや力）から部材の途中の変位が計算される。このことはBEMにおいては、内点での変位の計算として位置づけられる。

そこでこの内点の変位という考え方を使得、この剛性マトリックス法による部材端の物理量（つまり節点での変位と力）から部材の途中の変位を計算する。

まず、はりに分布荷重 $q(x)$ が作用するとき、微分方程式はつぎようになる。

$$E I \frac{d^4 w(x)}{dx^4} = q(x) \quad (2)$$

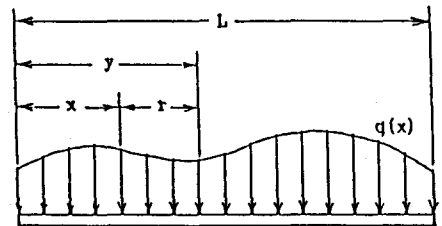


図 - 4

いま無限長はりに対して、つぎのように定義される2点関数 $w_0^*(x, y)$ を考える³⁾。

$$E I \frac{d^4 w_0^*(x, y)}{dx^4} = \delta(x - y) \quad \delta: \text{デルタ関数} \quad (3)$$

このとき $w_0^*(x, y)$ は無限長はりの 1 点 y に単位荷重が作用するときの点 x でのたわみである。

式 (2) の両辺に基本解 $w_0^*(x, y)$ をかけ、はりのスパン l にわたって積分する。

$$\int_0^l EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} w_0^*(x, y) dx = \int_0^l q(x) w_0^*(x, y) dx \quad (4)$$

式 (4) の左辺を $w(x)$ の微係数がなくなるまで部分積分を繰り返すと式 (5) が得られる。ただし

$w_0^*(x, y)$ の 4 階微分の項を式 (3) を使ってデルタ関数に置き換え、さらにデルタ関数の性質を考慮して簡単にしている。

$$w(y) = [Q(x) w_0^*(x, y) - M(x) \theta_0^*(x, y) + \theta(x) M_0^*(x, y)$$

$$- w(x) Q_0^*(x, y)] \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l q(x) w_0^*(x, y) dx \quad (5)$$

ただし、

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx}, \quad M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad Q(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3},$$

$$\theta_0^*(x, y) = \frac{dw_0^*(x, y)}{dx}, \quad M_0^*(x, y) = -EI \frac{d^2 w_0^*(x, y)}{dx^2}, \quad Q_0^*(x, y) = -EI \frac{d^3 w_0^*(x, y)}{dx^3}$$

すなわち

$$\begin{aligned} w(y) = & Q(l) w_0^*(l, y) - M(l) \theta_0^*(l, y) + \theta(l) M_0^*(l, y) - w(l) Q_0^*(l, y) \\ & - Q(0) w_0^*(0, y) + M(0) \theta_0^*(0, y) - \theta(0) M_0^*(0, y) + w(0) Q_0^*(0, y) \\ & + \int_0^l q(x) w_0^*(x, y) dx \quad (6) \end{aligned}$$

このようにして節点の力と変位 $Q(0)$, $M(0)$, $\theta(0)$, $w(0)$, $Q(l)$, $M(l)$, $\theta(l)$, $w(l)$ から部材の途中の変位が計算できることになる。

なお、はりの基本解は以下ようになる。

$$w_0^*(x, y) = (2l^3 + r^3 - 3lr^2) / (12EI), \quad M_0^*(x, y) = -(r-l)/2$$

$$\theta_0^*(x, y) = r(r-2l) \operatorname{sgn}(x-y) / (4EI), \quad Q_0^*(x, y) = -\operatorname{sgn}(x-y) / 2$$

$$\text{ただし } r = |x-y|, \quad x > y \text{ のとき } \operatorname{sgn}(x-y) = 1 \\ x < y \text{ のとき } \operatorname{sgn}(x-y) = -1$$

したがって、以上の方法を使えば正確な変位図が描けることになるが、骨組構造物においては各部材が必ずしも水平に配置されているとは限らないので、ひとまず BEM で部材座表系 (局所座標系) での部材の途中の変位分布を計算する。そして図化するときには全体座表系での変位に変換しなおしてからプロットすればよい。

おもな計算の手続きは図-6 のようになる。

なお図-5 のモデルについて計算し画面表示した図は図-7 のようになる。

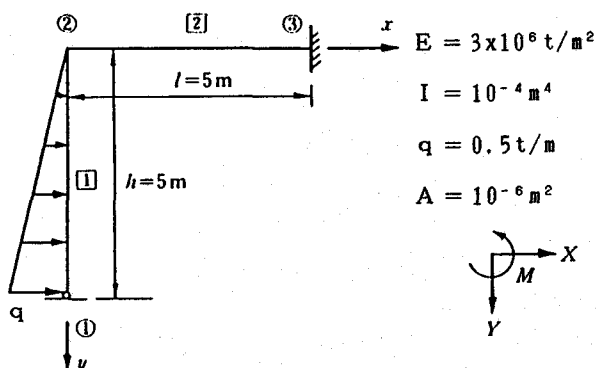


図-5

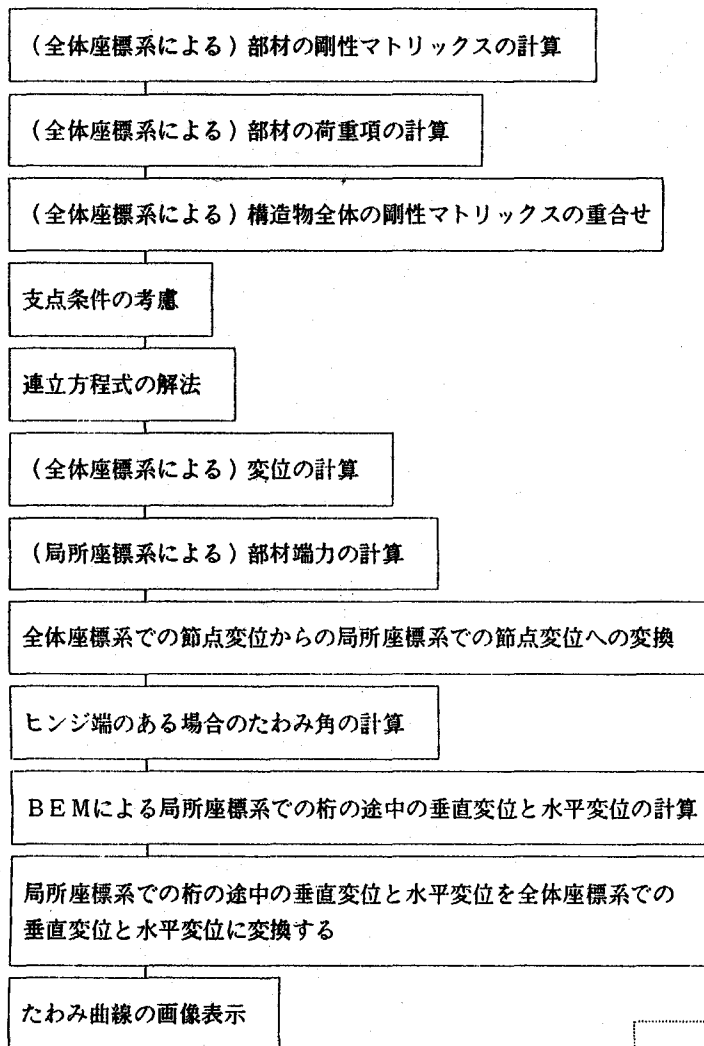


図-6

この原稿はジャストシステム
社の一太郎を用いて書いた。

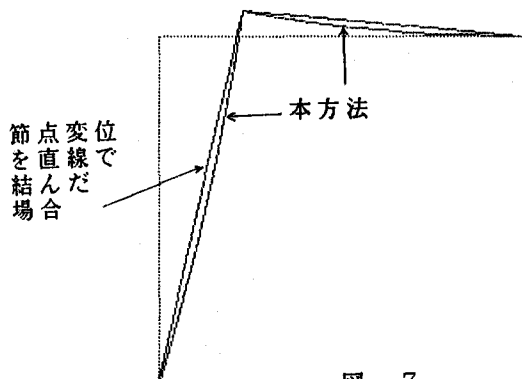


図-7

参考文献

1. 戸川隼人: BASICによる有限要素法の基礎, サイエンス社 (1985)
2. 渡辺昇・宮本裕: 時刻歴地震応答解析法, 技報堂 (1985)
3. Miyamoto, Iwasaki and Deto: BEM Approach to Analysis of Bridge Structures, 8th International Conference on BEM in Engineering (1986)