円錐シェルの解析解誘導への数式処理の応用

国士舘大学電子計算機センター
正会員　　矢島鎗司

有限要素法をはじめとして　いわゆる離散化計算法は、電子計算機の高度の技術発達と共に構造物の計算のみならず工学、理学における広範囲な利用を大型だけではなく，パーソナルコンピュータでも可能になってきた。　この数値計算法は、複雑な形状や荷重状態に対して強力な問題解決手段を与えている。　シェルや板構造物は、特に有限要素法にとって、非常に適した応用対象物として、その汎用性の証しとなっている。

事実、有限要素法なしでは、到底、計算不可能なシェル構造物の出現は周知のとうりである。　このような現在の計算環境により、従来から行われていたシェル構造などの解析解の研究が、停滞して、あまり顧みられなくなってきているようにおもえる。　他の理由としてはその微分方程式の複雑性や、その解法における変数変換などの煩雑さなどに起因しているようにおもわれる。　事実　シェル構造、例えば球形シェルの解析解は、古くから知られているベッセル、ノイマン関数により表現されることが分かっているがこれらの解析解の計算には面倒な級数計算がいつもともなうのである。　これらの級数計算の検算には文字どうり機械的な項ごとの計算がつきまとい、また　微分方程式の変数変換に関してもまた同様である。

従来より一般に使用されてきた電子計算機の数値計算ツールの面ばかりでなく最近注目を集めてきた人工知能の分野における記号処理、数式処理の使用により改めて古典的なシェル構造物の解析解を求める事に応用を試みる。　例として円錐シェルの微分方程式の解をとりあげるが、ここでは、電子計算機の使用に関する点に問題を絞ることとして、円錐シェルの式の誘導についての詳細は、論じないことにする。　回転対称荷重下における円錐シェルの解析解は、フリュッゲによりもとめられているが、一般荷重下において、Ψを求める（変位と応力関数からなる）複素関数とすれば

$$\Delta\Delta\Psi + i\,\frac{\omega^2}{\rho}\,\ddot{\Psi} = 0 \qquad (1)$$

と表せる。　ここで　$\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial\rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\,\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,\dfrac{\partial^2}{\partial\phi^2}$　　(2)

ωは、材料、幾何学的条件によって決まる定数、ρは、母線方向の座標位置（単位当たりの長さ）。

（２）式を使ってΔΔを展開するだけでも面倒な計算をする必要がある。　そこで数式処理アプリケーション言語　ＲＥＤＵＣＥ２を使用することとした。まずΔを表現すれば

```
ALGEBRAIC  PROCEDURE  DELTA(PHI, ZZ, Y);
BEGIN
 RETURN
 DF(PHI, ZZ, 2)+DF(PHI, ZZ, 1)/ZZ
                    +DF(PHI, Y, 2)/(ZZ*COS(THETA)**2);
END;
```

又、微分方程式の第一項は

```
ALGEBRAIC PROCEDURE D1(GG);
BEGIN
 RETURN
 DELTA(DELTA(PG(GG,Y),RHO,Y)、RHO,Y);
END;
```

微分方程式の第二項は、同様に

```
ALGEBRAIC PROCEDURE D2(FFF);
BEGIN
 RETURN
 OMEGA**2/RHO*DF(PG(FFF,Y),RHO,2);
END;
```

と表すことができる。 ここで関数PG（ψ）を変数分離により

```
ALGEBRAIC PROCEDURE PG(EE,Y);
BEGIN
 RETURN EE*COS(M*Y);
 END;
```

として、これらの表現を使い、数式処理演算をすれば 微分方程式は、展開され 次のように表される。

```
(cos(y*m)

     4                                   4      3        2
*(rho  *df(f(rho,y),rho,4)*cos(theta)  + rho  *omega  *df(f(rho,y),rho,2)*

             4          3               4                             2
 cos(theta)   + 2*rho  *cos(theta)  *df(f(rho,y),rho,3) - rho  *df(f(rho,y

                    4          2                                   2  2
 ),rho,2)*cos(theta)   - 2*rho  *df(f(rho,y),rho,2)*cos(theta)  *m   + rho

            4                                            2
 *cos(theta)  *df(f(rho,y),rho) + 2*rho*cos(theta)  *df(f(rho,y),rho)*

  2                 2             2               4         4            4
 m   - 4*cos(theta)  *f(rho,y)*m   + f(rho,y)*m  ))/(rho  *cos(theta)  )
```

このように数式処理REDUCEを使用することにより退屈で面倒な機械的な計算をしなくても良いこととなる。 また、この微分方程式の解は、級数解により求めるわけであるが、その検算については、上記の展開式に各項ごと代入計算を繰り返す場合、数式処理が大きな威力を発揮することとなる。 この円錐シェルへの応用に限らず、微分方程式の解の自動検算アプリケーションの開発など、数値計算とは、違った使用法であり今後、様々な分野に応用が期待できる。

参考文献

Anthony Hearn:REDUCE2 USER'S MANUAL