

EK-WGI法による山留め計測データ処理について

フジタ工業（株）技術研究所	正員	○斉藤悦郎
フジタ工業（株）技術研究所	正員	山県達弥
フジタ工業（株）技術研究所	正員	古賀重利

1. はじめに

EK-WGI法¹⁾は現代制御理論の拡張カルマンフィルター²⁾によるランダムデータからのパラメータ推定に対して、より精度の良い安定した推定結果が得られるように開発したものである。

現代制御理論すなわちカルマンフィルターは、古典制御理論のワイナーフィルターの仮定であったランダムデータ（計測データ）の定常性と無限時間観測を状態空間表示と直交射影の理論を用いてとり除くことに成功した理論である。カルマンフィルターは、システムの出力として得られたランダムデータから、システムの制御、予測及びパラメータ推定のデータ処理をシーケンシャルに行なうアルゴリズムによって構成されている。またカルマンフィルターのデータ処理方法としてのもう一つの特徴は、システムの状態を表わす状態方程式（線形）と観測系を表わす観測方程式（線形）を基本式としている点である。このことにより、観測データは、状態量と何等かの関係があれば任意の物理量で良いことになる。なお、システムの状態量及び観測量は、確率量として取り扱っており、上述の特徴と総合すると、カルマンフィルターは実測のデータ処理方法として適しているものと思われる。

現在では、計算機等の急速な進歩によりデータ収集が容易になり、安価になったこと、またより安全で信頼性の高い施工のための管理ということから、土木建築分野でも今後ますます多くの測定が行なわれるものと思われる。しかしながらこれらのデータ処理に関しては、計算機及び計測器の急速な進歩に追いついていないように思われる。

カルマンフィルターをパラメータ推定問題に応用するためには、システムが線形の数学モデルで表わされている場合においても、パラメータを未知量とすることから、非線形の数学モデルとなるため、仮定した数学モデルを、確率モデルや定差方程式により定式化し直す方法が一般的である。このためカルマンフィルターをパラメータ推定に用いる場合には、その定式化が繁雑となり、また状態量と観測量との分離ができる特徴を生かせなくなる。拡張カルマンフィルターは、カルマンフィルターの線形システムに対するデータ処理方法に対して、より一般的に非線形システムに対する処理方法として開発されたものである。拡張カルマンフィルターを用いれば、上述の問題は解決され、工学分野で用いられる数学モデルを簡単に組み込むことができ、制御、予測及びパラメータ推定が容易にできる。しかしながら、拡張カルマンフィルターをパラメータ推定に応用^{3), 4)}すると推定されたパラメータが安定せず、推定結果が悪くなることがある。前述したように、この問題を解決するために開発した方法がEK-WGI法^{5)~8)}である。

本論文では、EK-WGI法を山留めの施工過程における計測データ処理方法として応用したものである。山留めの施工過程における計測項目としては、山留め壁の変位量の測定、切梁の軸力の測定、土圧の測定、水圧の測定及び山留め壁のひずみ量の測定がある。これらの内、山留め壁の変位及びひずみ量の測定は、山留め壁の状態把握のための計測である。また、土圧、水圧及び切梁軸力の測定は、山留め壁に作用する外力の把握のための計測である。ここではEK-WGI法を、測定によって得られた山留め壁の変位量又は回転角のみから

1. 山留め壁の状態把握、すなわち曲げモーメント推定のためのデータ処理、及び
2. 山留め壁に作用する外力の推定すなわちパラメータ同定（逆解析）のデータ処理 に適用し、その有効性を数値的に明らかにしたものである。

2. EK-WGI法¹⁾

2.1 拡張カルマンフィルター²⁾

カルマンフィルターは、線形離散型状態方程式と線形離散型観測方程式を基本式として、漸化的な最適状態量推定のアルゴリズムを構成したものである。これに対して、拡張カルマンフィルターは、非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を基本式としたものである。この基本式に対するアルゴリズムは、カルマンフィルターアルゴリズムに、非確率関数である基準軌跡を基に構成されている。

非線形連続型状態方程式と非線形離散型観測方程式を

$$dX_t/dt = f(X_t, t) + G(t)w_t, \quad X_{t_0} \sim N(X_{t_0}, P_{t_0}) \quad (1)$$

$$Y_{t_k} = h(X_{t_k}, t_k) + v_k \quad (2)$$

ただし、 $X_{t_0} \sim N(X_{t_0}, P_{t_0})$; X_{t_0} は、平均値 X_{t_0} 、分散値 P_{t_0} のガウス分布、 w_t, v_k ; ガウス白色雑音、 $E[v_k] = 0.0, E[w_t] = 0.0, E[v_k v_k^T] = R(k) \delta_{k\ell}, E[w_t w_\tau^T] = Q(t) \delta(t - \tau) (E[\cdot]$;期待値), $\delta_{k\ell}$; クロネッカーデルタ関数、 X_t, X_{t_k} ; システムの状態変数、 Y_{t_k} ; 観測ベクトル、として表わすと、拡張カルマンフィルタアルゴリズムは、

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_k) = \hat{X}(t_k|t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\hat{X}(t|t_k), t) dt \quad (3)$$

$$P(t_{k+1}|t_k) = \Phi[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] P(t_k|t_k) \Phi^T[t_{k+1}, t_k; \hat{X}(t_k|t_k)] + Q(t_{k+1}) \quad (4)$$

$$\hat{X}(t_{k+1}|t_{k+1}) = \hat{X}(t_{k+1}|t_k) + K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] [Y_{t_{k+1}} - h(\hat{X}(t_{k+1}|t_k), t_{k+1})] \quad (5)$$

$$P(t_{k+1}|t_{k+1}) = [I - K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)]] M[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] \times P(t_{k+1}|t_k) [I - K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)]] M[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)]^T + K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] R(k+1) K^T[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] \quad (6)$$

$$K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] = P(t_{k+1}|t_k) M^T[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] [M[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] P(t_{k+1}|t_k) M^T[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)] + R(k+1)]^{-1} \quad (7)$$

ここに、 $\hat{X}(t_k|t_k)$; Y_{t_k} が与えられたときの t_k 時間における状態推定ベクトル(最適推定値)

$P(t_k|t_k)$; $\hat{X}(t_k|t_k)$ と真の値 $X(t_k)$ との差の共分散行列

$K[t_{k+1}; \hat{X}(t_{k+1}|t_k)]$; t_{k+1} 時間でのフィルタゲイン行列

Y_k ; $\{Y_1, \dots, Y_k\}$, I ; 単位行列

となり、初期の最適推定値 $\hat{X}(t_0|t_0)$ と初期の推定誤差の共分散行列 $P(t_0|t_0)$ が与えられれば(3)式～(7)式を用い漸化的に最適推定値を求めることができる。

2.2 EK-WGI法

拡張カルマンフィルタは、任意の初期条件を与え、順次計測データを取り込み、有限個の計測データにより推定を行なう。このため推定結果が安定した結果であるかの疑問が残る。そこで推定結果が初期条件の影響を受けなければ安定である、という基本的な考え方を基に図-1のアルゴリズムを構成した。このアルゴリズムは、任意の初期値 X_0 での推定結果 $\hat{X}(t_s|t_s)$ を初期値 $\hat{X}(t_0|t_0)$ として再び推定を行なう方法である。そしてこのグローバルな繰返しにより $\hat{X}(t_0|t_0)$ と $\hat{X}(t_s|t_s)$ の値がほぼ等しくなる $\hat{X}(t_s|t_s)$ を安定した推定結果であると判断するものである。 $P(t_0|t_0)$ は初期値 $\hat{X}(t_0|t_0)$ の動き易さを意味したもので、可制御性であれば $P(t_s|t_s)$ の値は、かなり小さくなる。この理由からアルゴリズム中に導入した重み W は、各グローバルな繰返し初期の活性化による、不安定な推定結果の判断し易さと、安定速度を高める

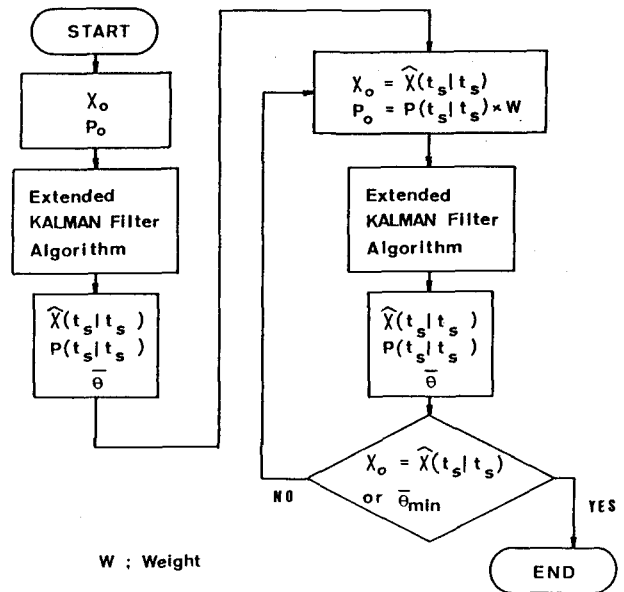


図-1 EK-WGI法

効果を意図したものである。このアルゴリズムを用いても、パラメータの推定結果がある値に漸近してこない場合には、

$$\begin{aligned}\gamma_i &= \left[\sum_k [y_{ik} - h_i\{\hat{x}(t_k|t_k), t_k\}]^2 \right] / \left(\sum_k y_{ik}^2 \right) \\ \beta &= \sum_i \gamma_i / \alpha \\ \theta &= \left\{ \sum_i (\gamma_i - \beta)^2 \right\}^{1/2}\end{aligned}\quad (8)$$

ここに、 s ：計測データのデータ総数、 α ：計測データの種類の総数

の評価値 θ を用い、 θ_{min} の評価基準を導入することにより、その判断を行なった。この θ_{min} は、各観測データと最適推定値の差の正規化二乗平均(γ_i)が、バランス良く最小になる値を意味したものである。

3. 山留め壁に生ずる曲げモーメントの推定

場所及び時間に対して離散的に計測されたデータの基本的データ処理としては、人為的なエラーやノイズ等の処理、離散データ点の少ない場合のデータ補間処理、及び他の物理量に変換するための微分や積分の処理等が考えられる。

山留め壁に生ずる曲げモーメントの推定は、傾斜計によって測定された離散データの傾斜角を微分し、壁の断面剛性の評価をして行なわれる。一般に傾斜計による傾斜角のデータは、深さ方向に1m～2mピッチで測定される場合が多く図形処理や逆解析用にデータの補間が必要となる。曲げモーメントを求めるための傾斜角の変化率は、計測したデータをそのまま数値微分して求める方法と、カーブフィッティングを行ない関数微分して求める方法がある。カーブフィッティングによる方法は、多項式の数学モデルを用いて最小二乗法(パッチ処理)により計算されるのが一般的で、データ補間も同時に行なえる。数値微分により求めた場合には、そのデータ補間として、Lagrange補間多項式やChebyshevの近似多項式による方法があり、また最近ではスプライン関数⁹⁾による方法が注目を集めている。

本章では、多項式の数学モデルによるカーブフィッティングをカルマンフィルター(シーケンシャル処理)によって行なう方法を示し、従来一般的に用いられているパッチ処理方法との比較からシーケンシャル処理による方法の有効性を数値的に明らかにした。

3.1 定式化

数学モデルは前述した n 次の多項式とした

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad (9)$$

上式を拡張カルマンフィルターの基本式と対応させると、

(1) 式の状態方程式は、

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_k \quad (10)$$

(2) 式の観測方程式は、

$$[y]_k = [1, x_k, x_k^2, \cdots, x_k^n] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}_k \quad (11)$$

として示される。

カーブフィッティングの方法としてカルマンフィルターを応用する場合には、計測点をすべて通ることを前提として、状態方程式に付加するノイズ(w_k)は、任意の値を与え、観測方程式に付加するノイズ(v_k)は、0.0として計算を行なえば良い。すなわち、未知パラメータは、時間もしくは場所によって変化しても良いことを条件としている。

3.2 計算例

図-2は、計算に用いた実測データの地盤柱状図及び掘削断面を示したものである。図-2 (a)の地盤は、以下の様である。70cm厚の表土の下は、9.5mまで腐食物～砂混りシルトで、ここまです沖積層である。その下には40cm厚程度の洪積砂礫層があり、これ以深は第三紀の土丹と砂の互層となっている。山留め工事は、平面規模11m×8m、深さ17.5mまで掘削を行なうもので、使用した山留め壁は、鋼矢板Ⅳ型である。なお傾斜計は挿入式傾斜計を用い、深さ方向の計測ピッチは0.5mである。図-2 (b)の地盤は7.0m付近までが埋立層、29m付近までが古沖積層でこれ以深は洪積層と大別される。山留め工事は、平面規模87m×61m、深さ21mまで掘削を行なうもので、使用した山留め壁は、壁厚1mの地下連続壁である。傾斜計は固定式傾斜計で、深さ方向の計測ピッチは2mである。

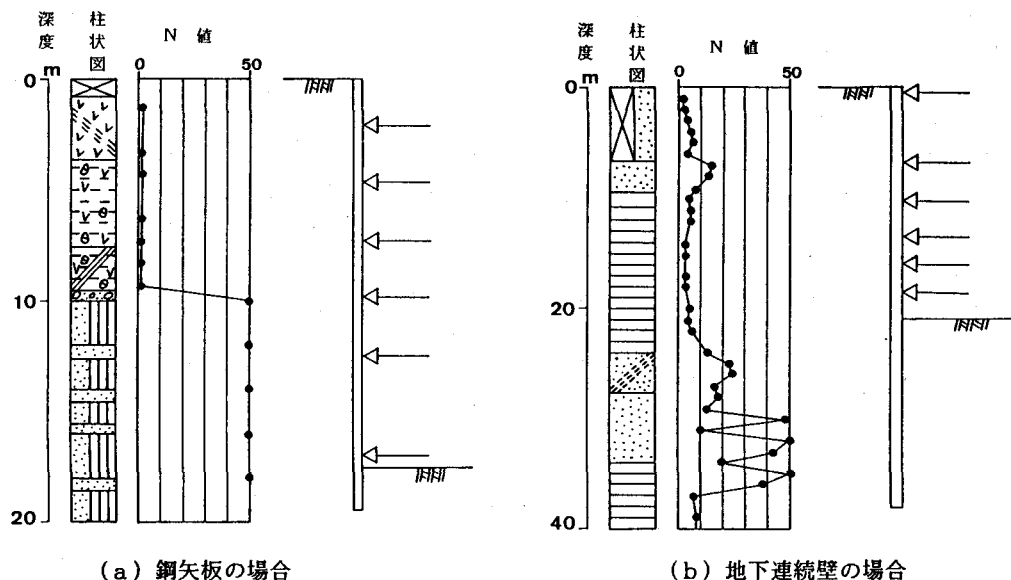


図-2 柱状図及び掘削断面

図-3は、図-2 (a)の場合、すなわちたわみ性の山留め壁の場合の計算結果である。計測データ総数は、35点で、各計測点間の中間1点の補間を行なった。シーケンシャル処理の場合(図-3 (a))は、4次の多項式を用いてカーブフィッティングを行なった。同図より計測データ(傾斜角)はスムーズにカーブフィッティングを行なうことができ、また曲げモーメントも切梁位置と良い対応をした分布形状が推定されており、山留め壁の連続梁挙動が明確に表わせることがわかる。パッチ処理の場合(図-3 (b))は、多項式の次数により、特に微分した曲げモーメント分布形状が異なる。図-3 (b)は、25次の多項式を用いた場合で、傾斜角は、ほぼ良いカーブフィッティングができたものと思われるが、曲げモーメントに変換した場合、特に傾斜角の変化が複雑な1段切梁～3段切梁間では、シーケンシャル処理のように切梁位置と曲げモーメント分布の対応がつかないことがわかる。多項式の次数を29次にすると、上述の位置では、シーケンシャル処理とほぼ同様な曲げモーメント分布形状の推定が可能であるが、山留め壁頭部付近及び最下部付近がかなり乱れを生じ、上下端部の何等かの処理が必要となる。

図-4は、図-2 (b)の場合の計算結果である。計測データ総数は19点で、計測データ間を3点の補間を行なった。シーケンシャル処理(図-4 (a))の場合には、前述と同様に4次の多項式でカーブフィッティングを行ない曲げモーメントの推定を行なった。本工事は、山留め壁のひずみ量を計測しており、この値から曲げモーメントを計算した値が同図中の○印である。これらを比較すると、山留め壁に生ずる曲げモーメントの分布形状は、非常に良い対応を示し、傾斜角から曲げモーメントの推定が可能であることがわかる。パッチ処理(図-4 (b))の場合には、前述のたわみ性の山留め壁に比べ傾斜角の変化があまり複雑でないため、高次の多項式を必要としない。図-4 (b)は、17次の多項式を用いたもので、曲げモーメント分布は、山留め壁

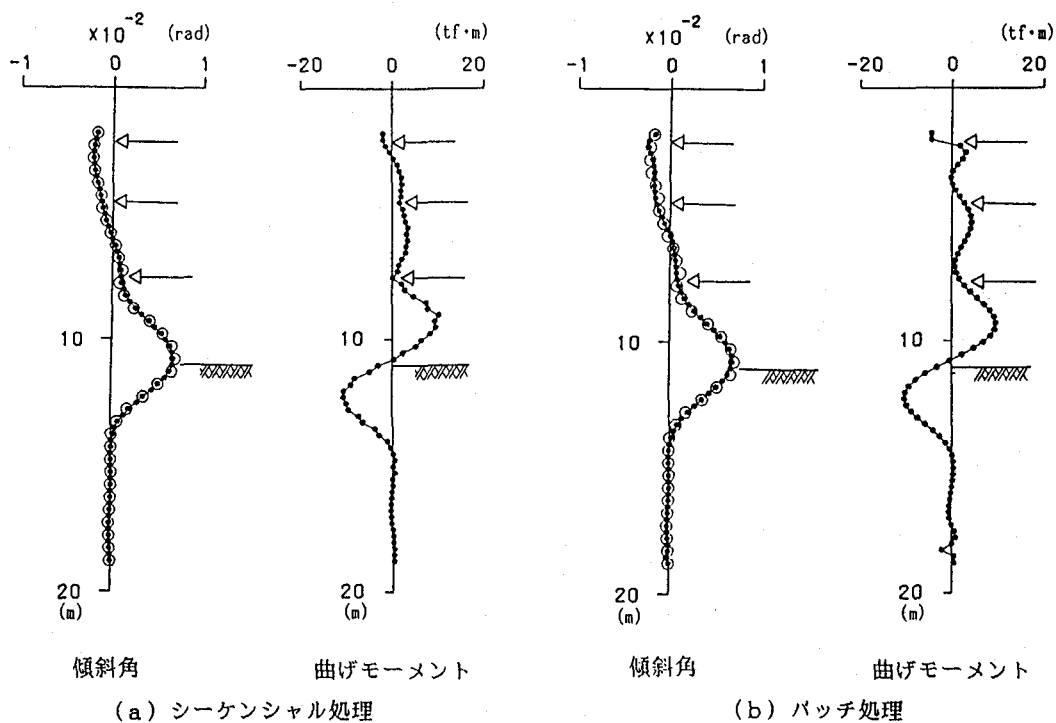


図-3 シーケンシャル処理とパッチ処理との比較（鋼矢板の場合）

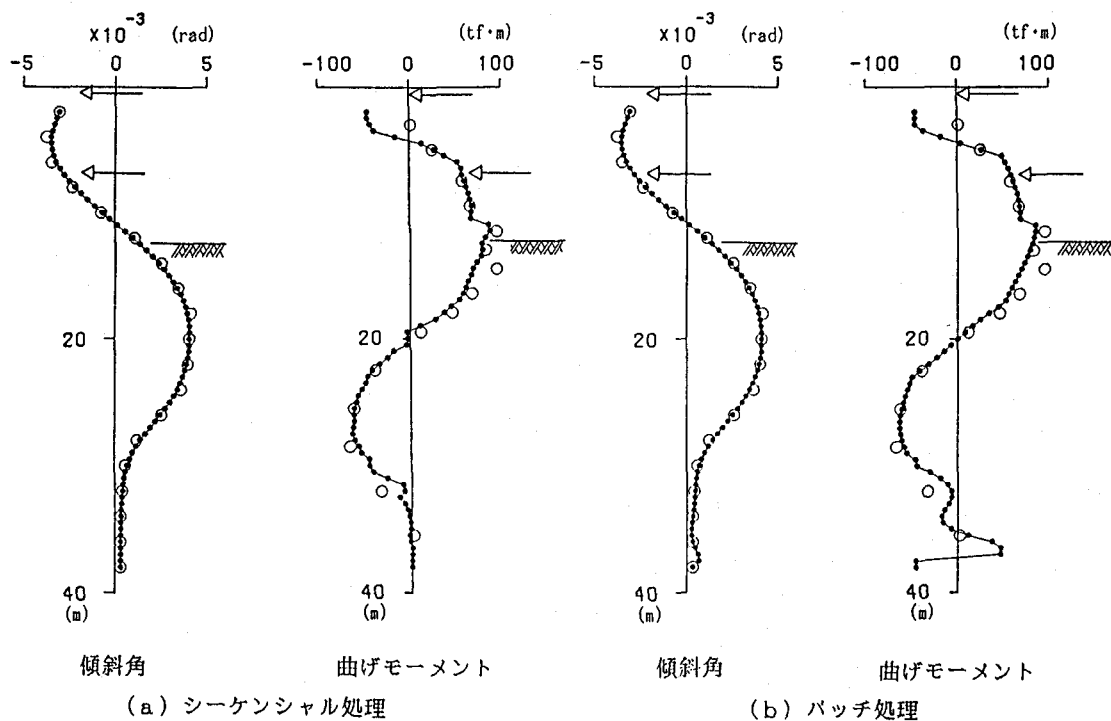


図-4 シーケンシャル処理とパッチ処理との比較（地下連続壁の場合）

最下端付近に乱れを生じ、下端部では何等かの処理が必要となる。12次の多項式では、シーケンシャル処理による結果とほぼ良い一致を示した。なお、曲げモーメントに変換する場合の断面剛性は、鋼矢板の場合には、継手効率を0.4として断面剛性を評価し、また地下連続壁の場合には、図-5の一点鎖線のM-φ曲線を用いて剛性低下を考慮した。ただし図-5中の実線は、通常のコンクリート理論によるM-φ曲線、一点鎖線は修正したM-φ曲線¹⁵⁾である。また

My: 降伏モーメント (Whitneyの式),

Mc: ひびわれモーメント (コンクリートの引張り
ひずみ 120×10^{-6})

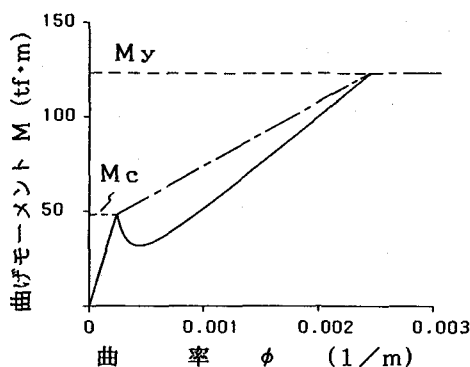


図-5 M-φ曲線

である。

4. 山留め壁に作用する外力の推定¹³⁾

4.1 定式化

ある物理現象を数学モデルで表わす場合、微分方程式による定式化が一般的である。このモデル化によって生ずる定数 (パラメータ) を未知パラメータとして推定する問題をパラメータ同定と呼ばれている。拡張カルマンフィルターによる未知パラメータ推定への定式化は、2つの方法が考えられる。すなわち、A 微分方程式を状態空間表示を用い、1階のベクトル微分方程式として (1) 式に対応する状態方程式とする方法 B 微分方程式の一般解を求め (2) 式の観測方程式とする方法である。

さて山留め架構に対する定式化は、地表面～掘削面間、掘削面下の塑性域に対して荷重のつり合いにより

$$EI (d^4 y / dx^4) = f(x) \quad (12)$$

モーメントのつり合いにより

$$EI (d^2 y / dx^2) = f'(x) \quad (13)$$

また掘削面下の弾性域に対しては

$$EI (d^4 y / dx^4) + E_s y = g(x) \quad (14)$$

ただし E: 山留め壁の弾性係数, I: 山留め壁の断面2次モーメント, E_s: 土の横方向弾性係数,

f(x), f'(x) 及び g(x); 多項式

として示される¹⁴⁾。

A の方法では、(12)式～(14)式に対して状態空間表示を用いることにより (1) 式の状態方程式と対応した1階のベクトル微分方程式を求めることができる^{10)~12)}。

B の方法で定式化する場合には (12), (13)式の一般解は、多項式として示され、また

(14)式の一般解は

$$y = e^{\beta x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (c_3 \cos \beta x + c_4 \sin \beta x) + g(x) / (4EI\beta^4) \quad (15)$$

$$\beta = \sqrt[4]{E_s / (4EI)}$$

となる。

(15)式及び多項式は (2) 式の観測方程式と対応したベクトル方程式を求めることができる。なお、この時の状態方程式は線形となり遷移行列は単位行列となる。

4.2の計算例に用いた定式化は、次式とした (図-6)。

地表面～掘削面間

$$EI_{k,k} (d^2 y / dx^2) = \sum_{i=1}^{k-1} \left[(1/6) \{3p_{i,k} + q_{i,k}(h_{i-1,k} - h_{i,k})\} \{h_{i-1,k} - h_{i,k}\}^2 \right. \\ \left. + (1/2) \{2p_{i,k} + q_{i,k}(h_{i-1,k} - h_{i,k})\} \{h_{i-1,k} - h_{i,k}\} \{h_{i,k} + x\} \right] \\ \left. + (1/6) \{3p_{k,k} + q_{k,k}(h_{k-1,k} + x)\} \{h_{k-1,k} + x\}^2 - \sum_{i=1}^{k-1} N_i(h_{i,k} + x) \right] \quad (16)$$

掘削面下

$$E I_{k,k} (d^4 y / d x^4) = q_{k,k} (x + h_{k-1,k}) + p_{k,k} \quad (17)$$

ここで、地表面～掘削面間は、切梁軸力をも未知パラメータとすることからモーメントのつり合いより定式化を行なった。また掘削面下の塑性域と弾性域との定式化を異にすることは、推定時点で塑性域の深さが明らかでないので塑性域の範囲を推定するために繰返し計算が必要となる。そこで、掘削面下を(17)式による定式化とし、塑性域と弾性域との区別を行なわないこととした。

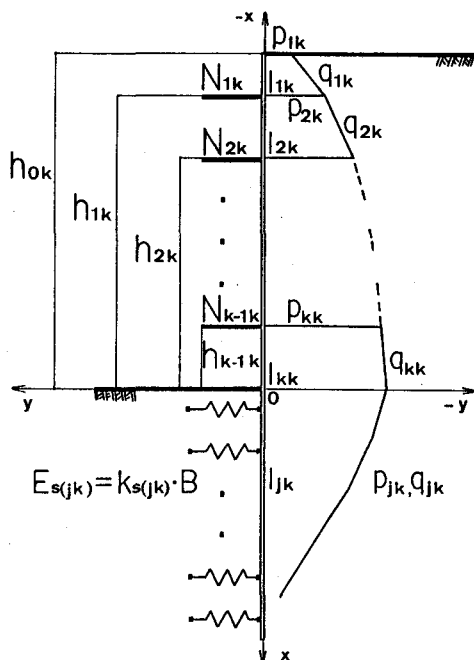


図-6 k次掘削過程の推定モデル

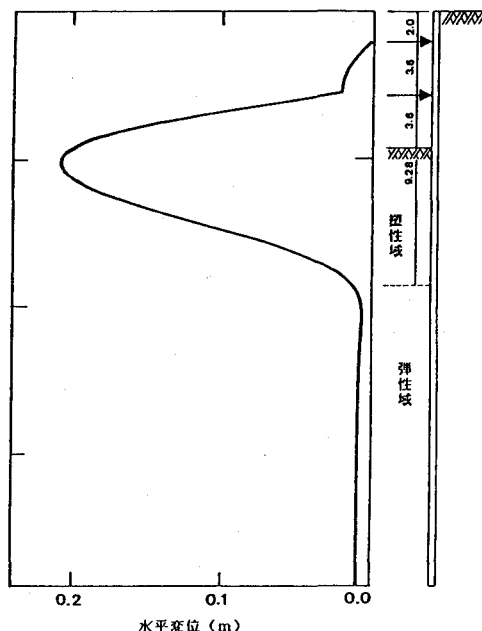


図-7 シミュレーションデータ

4.2 計算例

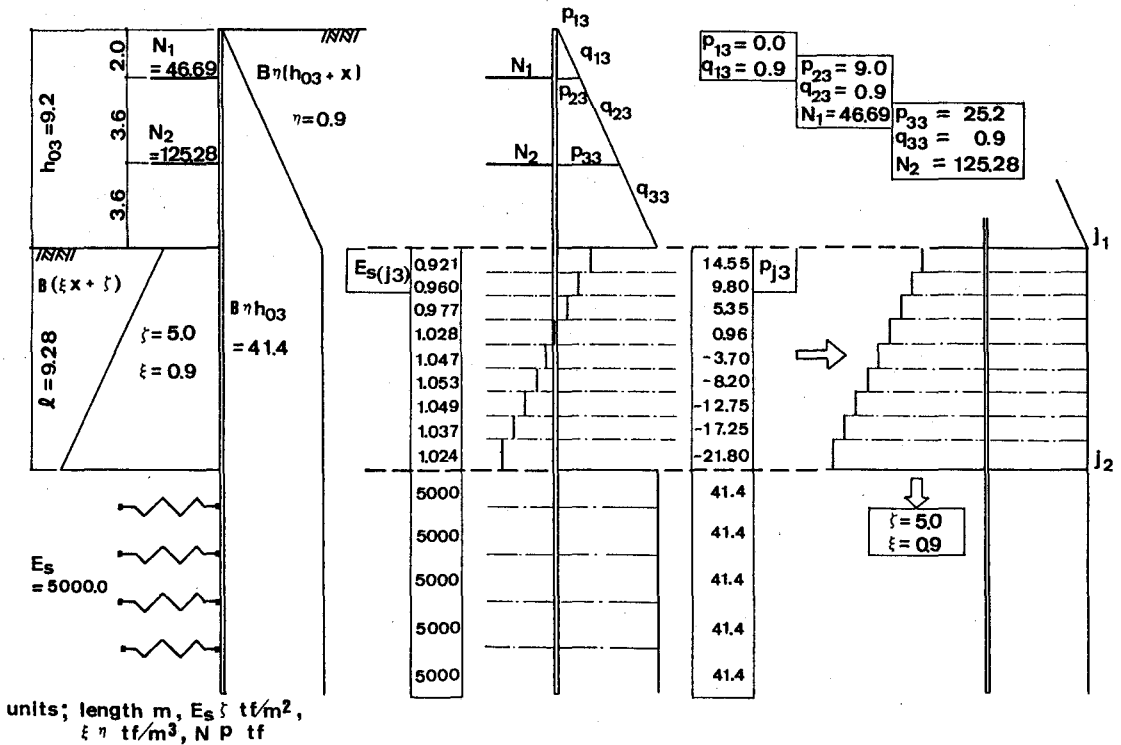
ここでの数値計算例は、推定結果の検証のため図-8 (a)に示した山留め架構モデル及び各定数を用いてシミュレーションデータ(回転角、変位)を求め、そして求められたシミュレーションデータ(図-7)から未知パラメータの同定を行なった。図-8 (b)及び(c)の□内は、推定結果である。地表面～掘削面間の切梁軸力及び側圧は、以下の方法により推定した。まず、 p_{13} 、 q_{13} の推定は、地表面～1段切梁位置までのデータから推定する。そして推定した p_{13} 、 q_{13} を既知量として、1段切梁～2段切梁間のデータより側圧 p_{23} 、 q_{23} 及び軸力 N_1 を推定する。以上の方法により順次側圧及び切梁軸力の推定を行なった。これらの推定結果は、図-8 (a)の切梁軸力及び側圧と比較すると非常に良い精度で推定できることがわかる。

掘削面下について土の横方向弾性係数 $E_{s(j3)}$ 及び側圧 p_{j3} をデータ区間を区分し、順次推定を行なうと図-8 (b)の推定結果が得られた。同図から明らかなように側圧分布形状は、不連続な分布形状となることがわかる。また、この区間では、 $E_{s(j3)}$ も非常に小さな値として推定される。

図-8 (c)は、 j_1 、 j_2 点で等しい値として主働側側圧を求め、図-8 (b)の相対的な側圧とつり合う側圧を受働側に作用させたものである。この方法により、主働側及び受働側側圧の推定は、図-8 (a)の順解析に用いた結果と良い一致を示すことがわかる。以上のように塑性域の深さ l の判断も繰返し計算を行うことなく可能となる。また弾性域での $E_{s(j3)}$ 及び p_{j3} の推定結果も、順解析で用いた値と良い精度で一致することがわかる。ここでのシミュレーションデータの深さ方向ピッチは、0.1mとした。掘削面下では、本方法を用いる場合特に深さ方向のデータピッチを細かくする必要がある。

なお、これらの推定は、EK-WGI法を用いればA及びBによる定式化方法とも同様な精度の結果が得られる。またA及びBによる定式化の数値計算上の注意点は、A 離散化に注意を要する点¹⁾ B 掘削面

下では β の初期値の与え方により発散現象を生ずる点、また非線形（掘削面下）である場合には、繰返し拡張カルマンフィルターアルゴリズム¹⁾を併用する必要がある点である。



(a) 順解析モデル

(b) 推定結果

(c) 塑性域の推定

図-8 順解析モデル及び推定結果

5. おわりに

本論文は、シーケンシャルなデータ処理である拡張カルマンフィルターを基本として、より精度の良い安定した推定結果が得られるように開発したEK-WGI法の、山留め計測データ処理への応用に関する研究の一部である。ここでは、山留め壁の変位量又は回転角のみから 1. 山留め壁の状態把握、すなわち曲げモーメント推定のためのデータ処理、及び 2. 山留め壁に作用する外力の推定すなわちパラメータ同定（逆解析）のデータ処理に適用し、その有効性を数値的に明らかにしたものである。

1. に関しては、従来のバッチ処理の方法に比べ本方法が有効であることが数値的に明らかになった。
2. に関しては、良い精度で山留め壁に作用する外力の推定が可能であることが数値的に明らかになった。

参考文献

- 1) M.Hoshiya, E.Saito: Structural Identification by Extended Kalman Filter, Jour. E.M.Div., ASCE, Vol.110, No.12, Dec., 1984.
- 2) Jazvinski, A.H.: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
- 3) Carnichael, D.G.: The state estimation problem in experimental structural mechanics, Application of Statistics & Probability in Soil and Structural Engineering, 3rd Inter. Conf. 1979
- 4) Yun C.-B. and Shinozuka M.: Identification of nonlinear structural dynamic systems, J.Struct.Mech., 8(2), 1980
- 5) 星谷, 斉藤: 振動を伴う地盤の等価線形化, 土木学会論文報告集, 第340号, 昭和58年12月.
- 6) 星谷, 斉藤: 線形多自由度系の動特性の推定, 土木学会論文集, 第344号/I-1, 昭和59年4月.
- 7) 星谷, 斉藤: 常時観測記録を用いたEK-WGI法による建物の動特性の推定, 土木学会論文集, 第350号/I-2, 昭和59年10月.
- 8) 星谷, 斉藤, 丸山: 単一走行荷重による単純桁橋の動特性の推定, I-247, 土木学会第39回年次学術講演会, 昭和59年10月.
- 9) 吉本, 市田: スプライン関数とその応用, 教育出版
- 10) 斉藤, 山県: 拡張カルマンフィルターによる山留め設計パラメータの推定(その1), 土質工学研究発表会, 1985.
- 11) 山県, 斉藤: 拡張カルマンフィルターによる山留め設計パラメータの推定(その2)-実測データを用いた場合-, 土質工学研究発表会, 1985.
- 12) 山県, 斉藤: 拡張カルマンフィルターによる山留め設計パラメータの推定(その3)-次の掘削段階の予測計算-, 土木学会第40回年次学術講演会, 1985.
- 13) 斉藤, 山県: 拡張カルマンフィルターによる山留め設計パラメータの推定(その4)-定式化の改良-, 土木学会第40回年次学術講演会, 1985.
- 14) たとえば 山岡, 吉田, 秋野: 掘削工事における切バリ土留め機構の理論的考察, 土と基礎, 17-9, 1969.
- 15) 日本建築学会: 鉄筋コンクリート構造計算基準同解説, 1982.