

局所荷重を受ける全周固定板の3次元応力解析

出雲測量設計 ○西部 義和
東京測器研究所 清水 利彦
大阪市立大学 堀川都志雄
大阪工業大学 岡村 宏一

1. はしがき 近年、土木の分野で大型構造物が見受けられるようになり、構造設計で3次元問題に対する関心度が高まっている。例えば、フラットスラブ頂部近傍、PCスラブの定着部やコンクリートデープスラブの曲げひびわれによる応力算定等が挙げられる。特に、コンクリートデープスラブは支間長に比して大きな版厚を有し、かつ局所荷重（支間長の約1/10～1/20）が作用する構造物であるために、荷重点近傍では変位や応力の3次元的な挙動が発生する。3次元問題は主として Galerkin vector や Neuber-Papkovich 等の変位関数に基づいて解析されているが、厚板問題に限定すれば全周単純支持板の解のみにとどまっているのが現状である。

一方、他の境界条件すなわち固定端や自由端を有する厚板に対しては、計算途上で無限連立1次方程式を解かねばならず、精度のよい結果を得ることは困難になる¹⁾。従って、構造設計の立場からみれば、3次元理論のみによる手法をいきなり持込むことは得策ではなく何らかの工夫が必要であろうと思われる。

本研究では、①変位関数から得られる厚板理論による級数解を特解とし²⁾、境界条件を満足させるための補足解として薄板理論の同次解を用いる混合法を提案する。②局所荷重が作用する全周固定正方形板を例に、荷重点近傍の応力状態を明らかにする。③部分固定端をもつ単純支持正方形板の問題に適用し、倉田³⁾の級数解との比較を試み、さらに板厚の変化が及ぼす影響を調べる。

2 混合法の誘導

混合法は厚板理論を特解に、薄板理論を補足解として用いる方法であり、以下にそれぞれの概要を示す。

1) 特解

Galerkin vector W と Boussinesq の関数 $\mathcal{Q}$ は次のように与えられる。

$$\Delta \Delta W = -B/(1-\nu), \quad \Delta \mathcal{Q} = 0 \quad (1)$$

ここで、 $W = W_x \hat{i} + W_y \hat{j} + W_z \hat{k}$, $\mathcal{Q} = Q_x \hat{i} + Q_y \hat{j} + Q_z \hat{k}$, $B = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$: 物体力ベクトル,

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2, \quad \partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2, \quad \partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2, \quad \partial_z^2 = \partial^2/\partial z^2, \quad \nu: \text{ポアソン比}$$

変位関数 W , $\mathcal{Q}$ と変位 u , v , w との関数式は次のように示される。

$$\begin{aligned} 2\mu u &= 2(1-\nu)\Delta W_x - \partial_x(\partial_x W_x + \partial_y W_y + \partial_z W_z) + 2(\partial_y \partial_y - \partial_z \partial_z), \\ 2\mu v &= 2(1-\nu)\Delta W_y - \partial_y(\partial_x W_x + \partial_y W_y + \partial_z W_z) + 2(\partial_z \partial_x - \partial_x \partial_z), \\ 2\mu w &= 2(1-\nu)\Delta W_z - \partial_z(\partial_x W_x + \partial_y W_y + \partial_z W_z) + 2(\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 μ : せん断弾性係数, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_z = \partial/\partial z$

さらに、式(2)とフックの法則から、例えば応力 σ_x および τ_{xy} は次のように得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2(1-\nu)\partial_z \Delta W_z + (\nu\Delta - \partial_z^2)(\partial_x W_x + \partial_y W_y + \partial_z W_z) + 2\partial_z(\partial_x \partial_y - \partial_y \partial_x), \\ \tau_{xy} &= (1-\nu)(\partial_y \Delta W_x + \partial_x \Delta W_y) - \partial_x \partial_y(\partial_x W_x + \partial_y W_y + \partial_z W_z) \\ &\quad + (\partial_y^2 \partial_z - \partial_x^2 \partial_z) + \partial_z(\partial_x \partial_x - \partial_y \partial_y) \end{aligned} \quad (3)$$

他の応力は、 x, y, z をそれぞれ入れ換えることにより得られる。

図-1に示される全周単純支持板の上下面に荷重が作用する場合、 $W_x = W_y = \partial_x = \partial_y = 0$ を考慮すれば、関数 $W_z, \mathcal{Q}_z$ は式(1)より次のようになる。なお、 $x-y$ 平面を板の中央面にとる。

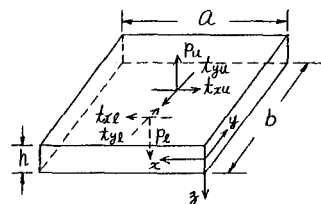


図-1 板の形状と座標系

$$\begin{aligned} W_3 &= \sum_m \sum_n \left[C_1 \operatorname{ch} r_j + C_2 \operatorname{sh} r_j + C_3 r_j \operatorname{ch} r_j + C_4 r_j \operatorname{sh} r_j \right] \sin \alpha m x \sin \beta_n y, \\ \theta_3 &= \sum_m \sum_n \left[C_5 \operatorname{ch} r_j + C_6 \operatorname{sh} r_j \right] \cos \alpha m x \cos \beta_n y \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\alpha m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$, $r_j^2 = \alpha m^2 + \beta_n^2$, $\operatorname{sh} r_j = \sinh r_j$, $\operatorname{ch} r_j = \cosh r_j$.

$C_1 \sim C_6$ は上・下面の境界条件より決定される積分定数

式(4)を式(2)に代入すれば、変位 u , v , w が次のように得られる。

$$\begin{aligned} 2\mu u &= - \sum_m \sum_n \left[C_1 \operatorname{sh} r_j + C_2 \operatorname{ch} r_j + C_3 (r_j \operatorname{sh} r_j + \operatorname{ch} r_j) + C_4 (r_j \operatorname{ch} r_j + \operatorname{sh} r_j) + \frac{\beta_n}{\alpha m} (C_5 \operatorname{ch} r_j + C_6 \operatorname{sh} r_j) \right] \alpha m \delta \cos \alpha m x \sin \beta_n y, \\ 2\mu v &= - \sum_m \sum_n \left[C_1 \operatorname{sh} r_j + C_2 \operatorname{ch} r_j + C_3 (r_j \operatorname{sh} r_j + \operatorname{ch} r_j) + C_4 (r_j \operatorname{ch} r_j + \operatorname{sh} r_j) - \frac{\alpha m}{\beta_n} (C_5 \operatorname{ch} r_j + C_6 \operatorname{sh} r_j) \right] \beta_n \delta \sin \alpha m x \cos \beta_n y, \\ 2\mu w &= - \sum_m \sum_n \left[C_1 \operatorname{ch} r_j + C_2 \operatorname{sh} r_j + C_3 \{ r_j \operatorname{ch} r_j - 2(1-\nu) \operatorname{sh} r_j \} + C_4 \{ r_j \operatorname{sh} r_j - 2(1-\nu) \operatorname{ch} r_j \} \right] \delta \sin \alpha m x \sin \beta_n y \end{aligned} \quad (5)_{1,2,3}$$

板の中央面の変位 w (たわみ) に着目すると、式(5-3)で $\delta = 0$ とおき、さらに板の上下面での境界条件から決定される積分定数 $C_1 \sim C_6$ を考慮すれば、

$$W_0 = \frac{1}{2\mu} \sum_m \sum_n \left[\bar{P}_m \frac{\zeta \operatorname{sh} \zeta + 2(1-\nu) \operatorname{ch} \zeta}{\operatorname{sh} \zeta \operatorname{ch} \zeta - \zeta} - (\alpha m \bar{x}_p + \beta_n \bar{y}_p) \frac{\zeta \operatorname{ch} \zeta + (1-2\nu) \operatorname{sh} \zeta}{\operatorname{sh} \zeta \operatorname{ch} \zeta - \zeta} \frac{1}{\zeta} \right] \frac{1}{\delta} \sin \alpha m x \sin \beta_n y$$

ここで、 $\bar{P}_m = (\bar{p}_x - \bar{p}_u)/2$, $\bar{x}_p = (\bar{x}_{xl} + \bar{x}_{xu})/2$, $\bar{y}_p = (\bar{y}_{yl} + \bar{y}_{yu})/2$, $\zeta = \delta h/2$,

$\bar{p}_x, \bar{p}_u, \dots$, $\bar{x}_{yl}, \bar{x}_{xu}$ は表面に作用する荷重 $p_x, p_u, \dots$, x_{yl}, x_{xu} のフーリエ係数

さらに、板厚 h がスパン a に比して小さいとき、上式は次のようになる。

$$W_0 = \frac{1}{D} \sum_m \sum_n \left[2 \bar{P}_m - h (\alpha m \bar{x}_p + \beta_n \bar{y}_p) \right] \frac{1}{\delta^4} \sin \alpha m x \sin \beta_n y \quad (6)$$

ここで、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$: 板剛度

式(6)は薄板理論の Navier の解と一致していることが分る。

一方、厚板理論のたわみ角は板厚方向の座標 z の関数で表わされるので、次のように定義する。

$$\varphi_x = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_z dz = -\frac{1}{D} \frac{1}{1-\nu} \sum_m \sum_n \left[C_1 (\zeta \operatorname{ch} \zeta - \operatorname{sh} \zeta) + C_4 (\zeta \operatorname{sh} \zeta - \zeta \operatorname{ch} \zeta + \operatorname{sh} \zeta) + \frac{2\beta_n}{\alpha m} C_6 (\zeta \operatorname{ch} \zeta - \operatorname{sh} \zeta) \right] \frac{2\alpha m}{\delta} \cos \alpha m x \sin \beta_n y \quad (7)$$

y 方向のたわみ角 φ_y も同様にして得られる。

II 補足解

補足解に用いられる薄板理論の同次解は、a) 級数表示と b) 差分表示の2つのタイプが考えられる。本研究での境界条件を単純の為に固定端を例として採用するが、自由端の場合についても同様に取扱うことができる。

a) 級数タイプの解⁴⁾

図-2に示すような $y = \pm b/2$ でモーメント $\sum E_m d_s \cos \alpha m x$ が $x=0$ に沿って対称に作用するときのたわみを W_1^h とすれば、

$$W_1^h = -\frac{1}{2D} \sum_m E_m \frac{1}{\alpha m^3 \operatorname{ch} \lambda} (Y \operatorname{sh} Y - \lambda \operatorname{tn} \lambda \operatorname{ch} Y) d_s \cos \alpha m x \quad (8)$$

ここで、 $\lambda = m\pi b/2a$, $\operatorname{tn} \lambda = \tanh \lambda$, $Y = \alpha m y$, $d_s = \sin m\pi/2$

同様に、 $x = \pm a/2$ でのモーメントによるたわみを W_2^h とすると、

$$W_2^h = -\frac{1}{2D} \sum_n F_n \frac{1}{\beta_n^3 \operatorname{ch} \lambda'} (X \operatorname{sh} X - \lambda' \operatorname{tn} \lambda' \operatorname{ch} X) d_s \cos \beta_n y \quad (9)$$

ここで、 $\lambda' = \beta_n a/2$, $X = \beta_n x$, $d_s = \sin n\pi/2$

境界条件が $y = \pm b/2$ および $x = \pm a/2$ でともに固定とすると、次式が成立する。

$$y = \pm b/2; \quad \varphi_y + \partial_y (W_1^h + W_2^h) = 0, \quad x = \pm a/2; \quad \varphi_x + \partial_x (W_1^h + W_2^h) = 0 \quad (10)$$

式(7)~(9)を式(10)に代入し、端モーメントのフーリエ係数 E_m および F_n を求める。

相対2辺が単純支持、残りの2辺が固定の場合には、式(10)のいずれかの式から端モーメントのフーリエ係数が求められる。

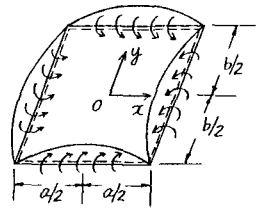


図-2 端モーメントを受ける板

b) 差分タイプの解⁵⁾

板を網目状に分割し、離散化された格子点でのたわみを代表とする方法である。紙面の都合上、端モーメントが作用する場合の単純支持辺近傍および隅角部近傍での差分表示を図-3, 4 に示す。

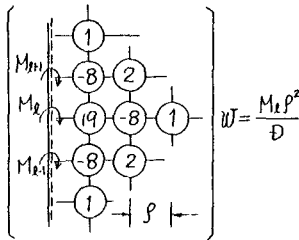


図-3
単純支持梁
近傍の差分表示

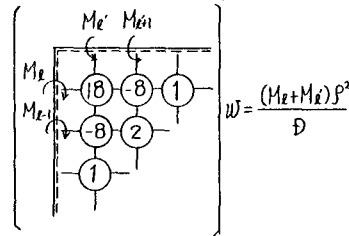


図-4
隅角部近傍
の差分表示

他の場合についても同様にして求められる。

全ての格子点で差分式を立てれば、たわみに関する剛性マトリックス A が得られ、最終的に次式から各格子点でのたわみが求められる。

$$W = A^{-1}Q \quad (11) \quad \text{ここで } W = (w_1, w_2, \dots, w_N), \quad Q: \text{端毛-ノットによる荷重項}$$

式(11)より境界辺でのたわみ角 ψ^h を求め、同じ格子点での特解によるたわみ角 ψ^p とから端モーメントに関する弾性方程式が得られる。

3. 数值计算例

補足解を級数タイプの解式によるものを方法a, 差分によるものを方法bとする。まず、これらの方法の精度を検討するために、相対2辺単純支持、残りの2辺が固定である正方形板に等分布荷重が作用する場合を考える(図-5)。その結果を表-1, 2に示す。表-1は板厚/スパン比($=h/a$)が0.1および0.3の場合の板中央点での上下面のたわみ、断面力と応力の値を表わしている。なお、u, vはそれぞれ上面および下面を示す指標である。

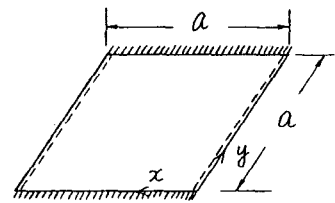


図-5 相対2辺単純支持,他辺固定端の板

表-1 2辺固定板のたわみ, 断面力および応力 ($x/a = y/a = 0.5$)

	$h/a = 0.1$				$h/a = 0.3$			
	DW^*/ga^4	DW^*/ga^4	M_x/ga^2	M_y/ga^2	DW^*/ga^4	DW^*/ga^4	M_x/ga^2	M_y/ga^2
Timoshenko	0.00192	0.00192	0.0244	0.0332	0.00192	0.00192	0.0244	0.0332
方法 a	0.00209	0.00209	0.0248	0.0336	0.00370	0.00336	0.0279	0.0360
方法 b $N=8$	0.00216	0.00216	0.0255	0.0334	0.00375	0.00342	0.0285	0.0358
10	0.00212	0.00212	0.0251	0.0334	0.00372	0.00338	0.0282	0.0358
12	0.00210	0.00210	0.0248	0.0333	0.00370	0.00336	0.0279	0.0357
14	0.00208	0.00208	0.0246	0.0332	0.00368	0.00334	0.0277	0.0357

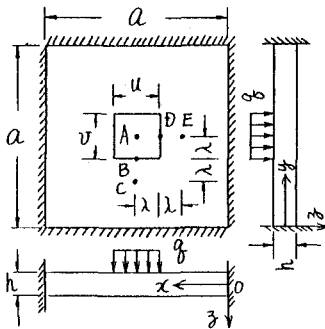
次に、全周固定された正方形板に等分布荷重が作用する場合の板中央点での結果を表-2に示す。

表-2 全周固定板のためみ, 断面力および応力 ($x/a=y/a=0.5$)

	$\lambda/a = 0.1$				$\lambda/a = 0.3$			
	$DW^u/\rho a^4$	$DW^b/\rho a^4$	$M_x/\rho a^2$	σ_x/ρ	$DW^u/\rho a^4$	$DW^b/\rho a^4$	$M_x/\rho a^2$	σ_x/ρ
Timoshenko	0.00126	0.00126	0.0231	-13.86	0.00126	0.00126	0.0231	-15.40
方法a	0.00145	0.00144	0.0233	-14.17	0.00311	0.00277	0.0266	-19.42
方法b $N=8$	0.00146	0.00146	0.0230	-13.98	0.00311	0.00278	0.0263	-19.11
10	0.00144	0.00143	0.0229	-13.92	0.00309	0.00275	0.0262	-19.05
12	0.00142	0.00142	0.0229	-13.88	0.00308	0.00274	0.0261	-19.00
14	0.00141	0.00140	0.0227	-13.79	0.00306	0.00273	0.0260	-18.92

方法aを用いて、部分荷重が作用する場合の全周固定板の荷重点近傍における応力 σ_x/δ の板厚方向の分布を表-3に示す。表-3はそれぞれ h/a が0.1および0.3での結果を表わしている。

表-3 全周固定板の点A~Eにおける応力



$$u/a = v/a = 0.2, \lambda/a = 0.1$$

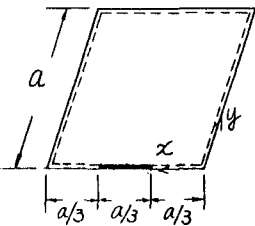
$$h/a = 0.1, 0.3$$

図-6 部分荷重を受ける
全周固定板

h/a	z/h	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
0.1	-0.05	-4.110	-3.165	-1.641	-2.742	-0.731
		-2.676	-2.054	-1.060	-1.813	-0.511
		-1.337	-1.014	-0.513	-0.922	-0.277
	0	-0.067	-0.018	0.022	-0.053	-0.026
		1.193	0.974	0.557	0.815	0.229
		2.513	2.005	1.106	1.705	0.473
0.3	0.05	3.966	3.122	1.682	2.641	0.687
		-0.950	-0.588	-0.169	-0.501	-0.027
		-0.391	-0.256	-0.088	-0.286	-0.106
	0	-0.106	-0.074	-0.030	-0.128	-0.097
		0.019	0.020	0.016	-0.020	-0.045
		0.108	0.094	0.062	0.069	0.011
0.3	0.15	0.218	0.188	0.121	0.167	0.067
		0.399	0.339	0.210	0.304	0.120

方法bを用いて、部分固定部をもつ正方形板に等分布荷重が作用するときの板中央点での結果を表-4に示す。

表-4 部分固定板のたわみ、断面力、応力 ($x/a = y/a = 0.5$)



$$h/a = 0.1, 0.3$$

図-7 部分固定端を
有する板

h/a		$DW^u/\delta a^4$	$DW^b/\delta a^4$	$M_x/\delta a^2$	$M_y/\delta a^2$	σ_x^u/δ	σ_x^b/δ
0.1	倉田	0.00296	0.00296	0.0350	0.0405	-21.00	21.00
	$N=10$	0.00326	0.00326	0.0366	0.0418	-22.14	22.03
	14	0.00314	0.00314	0.0355	0.0410	-21.45	21.33
	16	0.00317	0.00317	0.0357	0.0419	-21.61	21.49
	20	0.00309	0.00308	0.0348	0.0404	-21.05	20.94
	22	0.00309	0.00309	0.0348	0.0403	-21.02	20.90
0.3	$N=10$	0.00476	0.00443	0.0388	0.0435	-27.43	26.28
	14	0.00465	0.00432	0.0377	0.0427	-26.72	25.57
	16	0.00468	0.00434	0.0380	0.0429	-26.88	25.73
	20	0.00460	0.00427	0.0371	0.0422	-26.32	25.17
	22	0.00461	0.00427	0.0371	0.0421	-26.29	25.13

注) u : 板の上面, b : 板の下面

4. あとがき 支向長に比べて大きな版厚のコンクリートデブスラブリガ、種々の境界条件を有する問題に対して3次元理論のみで解析すれば、無限連立1次方程式を解かねばならず構造設計に利用することは得策とはいえない。混合法を用いることにより、局所荷重点下における応力や変形状態が容易に得ることができる。また、部分固定部をもつ複雑な板についても、方法bによれば局所応力を始めとして変位や断面力等が求められ、設計の分野でも十分活用できるものと思われる。

- 1) 小林, 石川, 秦, 短直方柱の応力解析, 機械学会論文集, Vol. 41, 昭和50年, pp. 2265-2277.
- 2) T. Horikawa, K. Sonoda and M. Kurata, A hybrid method for analysis of non-simply supported thick rectangular plates, Memo. Osaka City Univ., Vol. 23, Dec., 1982, pp. 109-122.
- 3) M. Kurata, Bending of simply supported rectangular plates with clamped portions along arbitrary section of the edges, Ing.-Arch., Band 27, 1960, pp. 385-416.
- 4) S. P. Timoshenko and S. W. Krieger, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill.
- 5) 成岡, 丹羽, 山田, 白石, 構造力学 中巻 板の力学, 丸善.