

大阪工業大学 ○ ヒ フェルト
 (中国内蔵建築設計院 何 其 図)
 大阪工業大学 正員 岡村 宏一
 大阪市立大学 正員 園田 恵一郎
 大阪市立大学 正員 堀川 都志雄

1. はしがき: 近年, 土木構造においても, 支間長に比べて厚みのなる板の挙動や, 局所荷重下での応力算定の問題が議論されるようになった。元来, この種の問題を「平面保持の仮定」に基づく薄板理論を用いて解析することには疑問があり, 厳密には3次元解析によるのが望ましい。しかし3次元解析を実際の構造物に適用するには解析上の制約が厳しすぎる難点がある。このような問題点に対する1つの方法として, 種々の境界条件に対応できる薄板理論の汎用性と, 応力や変形の3次元挙動を近似的に表現し得る性質を相補的に保有する中等厚板理論を考えることができる。中等厚板については, Love, Reissner, Krumm らを始めとする多くの研究が見られるが, 計算例の段階では, 特定の荷重の場合や, 2重級数を用いる方法に限られている感がある。

一方, 小型計算機の構造解析分野での利用も増大しつつあり, 板の解析への活用も十分見込まれるが, 上述のような問題を解析する場合, いかにして計算時間を短縮するかが1つの課題となる。従って解析上, 明らかに2重級数よりも単級数の解を用いるのが有利である。これまで中等厚板に単級数による解を用いた例として, 等方性板については V. L. Salerno らのもの, 直交異方性板については S. A. Ambartsumyan のものがあるが, いずれも等分布満載荷重の場合に限られており, 部分荷重や集中荷重の場合は扱っていない。

以上の観点を踏まえ, 本研究では主に, 次の諸点についての検討を行なった。

- (1) 等方性中等厚板の曲げと引張り問題における補助関数を基礎にして, 左わみと断面力を単級数で表わし, 総和公式を併用して部分荷重に対する代数的に表わされな解(閉じた解)を誘導する。
- (2) 相対2辺単純支持の無限板に部分荷重が作用する問題を例として上記の解を吟味する。
- (3) 相対2辺単純支持, 他の2辺が種々の境界条件を有する中等厚板を解析し, また, 局所荷重下での応力分布についても吟味する。

2. 等方性中等厚板の単級数表示と代数解

板の中央面に $x-y$ 座標軸をおき, それと垂直 downward なる z 軸をとる(図1)。

鉛直荷重 q が作用する場合の曲げおよび引張り問題の補助関数の

基礎式は次のように与えられる。

$$\Delta \Delta (1 - \frac{h^2}{10} \Delta) \Phi_j = -X_j \quad (j=1, 2)$$

$$\Delta \Delta \Phi_3 = -X_3, \quad (1 - \frac{h^2}{10} \Delta) \Phi_3 = 0 \quad (1)$$

$$H^2 \frac{1-\nu}{2} \Delta \Phi_j = -Y_j \quad (j=1, 2) \quad (2)$$

ここで, $\Delta = Eh^3/12(1-\nu^2)$, $H = Eh/(1-\nu^2)$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $\partial_x = \partial/\partial x$, $\partial_y = \partial/\partial y$, $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$, $\partial_y^2 = \partial^2/\partial y^2$,

$$X_1 = \frac{h^2}{10} \Delta \frac{\nu}{1-\nu} \partial_x q, \quad X_2 = \frac{h^2}{10} \frac{\nu}{1-\nu} \partial_y q, \quad X_3 = -q, \quad Y_1 = -\frac{h}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \partial_x q, \quad Y_2 = -\frac{h}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \partial_y q.$$

左わみ w , セン断力 Q_x, Q_y と補助関数 Φ_j ($j=1, 2$), Φ_3 , $\bar{\Phi}_3$ との関係式は次のように表わされる。

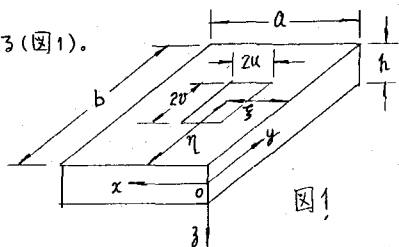
$$w = (\frac{h^2}{10} \Delta - 1)(\partial_x \Phi_1 + \partial_y \Phi_2) - (\frac{h^2}{5} \frac{1-\nu}{1-\nu} \Delta - 1) \Phi_3, \quad Q_x = -\Delta \Delta (\partial_y \Phi_1 - \partial_x \Phi_2) - \Delta \partial_x \Phi_3 + \partial_y \bar{\Phi}_3,$$

$$Q_y = -\Delta \Delta (-\partial_x \Phi_1 + \partial_y \Phi_2) - \Delta \partial_y \Phi_3 - \partial_x \bar{\Phi}_3 \quad (3)$$

板の中央面での水平変位 u_0, v_0 と関数 Φ_j ($j=1, 2$) との関係式は以下に示される。

$$u_0 = H(\partial_x^2 + \frac{1-\nu}{2} \partial_y^2) \Phi_1 - H \frac{1+\nu}{2} \partial_x \Phi_2, \quad v_0 = -H \frac{1+\nu}{2} \partial_y \Phi_1 + H(\frac{1-\nu}{2} \partial_x^2 + \partial_y^2) \Phi_2 \quad (4)$$

今, 単級数表示を x 方向にとれば, 式(1)~(4)で y に関する微分項が削除される。最終的に, 曲げ問題での左わみとセン断力は次のように得られる。



$$W = \sum_m \bar{w} a_m^2 \sin m\pi x, \quad Q_x = \sum_m \bar{Q}_x a_m^2 \cos m\pi x \quad (5)$$

ここで、 $a_m = m\pi/a$, a : x 方向の支間長,

$$\bar{w} = \frac{1}{D} \frac{q}{a^2} + \frac{1}{D} \left[\frac{h^2}{5(1-\nu)} - \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} \right] \frac{q}{a^2}, \quad \bar{Q}_x = \frac{\bar{q}}{a_m}, \quad \bar{q} = \frac{4q}{a} \sin m\pi u \sin m\pi \xi,$$

q : 荷重強度, u : x 方向の荷重幅, ξ : x 方向の荷重中心位置

さらに、式(5)に表1で与えられる総和公式を適用すれば、たわみ W の代数解は

3つの区間 $0 \leq x \leq \xi-u$, $\xi-u \leq x \leq \xi+u$, $\xi+u \leq x \leq a$ で区分される。

例えば、 $0 \leq x \leq \xi-u$ では

$$W = \frac{q a^4}{3D} \left[\left(\frac{2\xi u}{a^2} - \frac{3\xi u}{a^2} - \frac{u^3}{a^2} + \frac{\xi u^3}{a^2} + \frac{\xi^3 u}{a^2} \right) \frac{x}{a} - \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right) \frac{x^3}{a^3} \right] + \frac{2q a^2}{D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right) \frac{x}{a} - \frac{2q a^2}{D} \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right) \frac{x}{a} \quad (6)$$

明らかに第1項は平面保持仮定によるはりの解であり、第2及び第3項はそれぞれ

せん断力による影響項と直応力 σ_y による項を示している。第2項までの和は静的問

題での Timoshenko beam の解に相当している。

次に、せん断力 Q_x も同様にして $0 \leq x \leq \xi-u$ の区間で

$$Q_x = 2q a \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right) \quad (7)$$

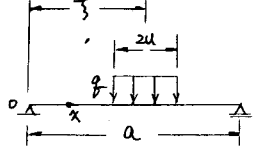
他の区間についての結果を表2にまとめた。また、引張り問題についても同様にして得られ、その結果を

表2に併記した。

他の荷重状態すなわち等分布荷重荷重の場合は $u = \xi = a/2$ と置換え、また集中荷重については $q = P/2u$ とおき

さらに $u \rightarrow 0$ の極限を採れば、表2より容易に解が得られる。

表2 たわみ、せん断力、水平変位の代数解

範囲	部分荷重	範囲	等分布荷重
$0 \leq x \leq \xi-u$	$W = \frac{q a^4}{3D} \left[\left(\frac{2\xi u}{a^2} - \frac{3\xi u}{a^2} - \frac{u^3}{a^2} + \frac{\xi u^3}{a^2} + \frac{\xi^3 u}{a^2} \right) \frac{x}{a} - \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right) \frac{x^3}{a^3} \right] + \frac{2q a^2}{D} \frac{h^2}{5(1-\nu)} \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right) \frac{x}{a} - \frac{2q a^2}{D} \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right) \frac{x}{a}$ $Q_x = 2q a \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right)$ $u_0 = -\frac{q a}{H} \frac{\nu h}{1-\nu} \left(\frac{u}{a} - \frac{\xi u}{a^2} \right)$		$W = \frac{2q a^4}{24D} \left(\frac{x^4}{a^2} - 2\frac{x^3}{a} + \frac{x}{a} \right) + \frac{2q a^2}{D} \frac{h^2}{10(1-\nu)} \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right) - \frac{2q a^2}{D} \frac{\nu h^2}{20(1-\nu)} \left(\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right)$ $Q_x = \frac{q a}{2} \left(1 - \frac{2x}{a} \right)$ $u_0 = -\frac{q a}{H} \frac{\nu h}{2(1-\nu)} \left(1 - \frac{2x}{a} \right)$
$\xi-u \leq x \leq \xi+u$	$W = \frac{q a^4}{24D} \left[\left(\frac{\xi-u}{a} \right)^4 - 4 \left\{ \frac{4\xi u}{a^2} - \left(\frac{\xi+u}{a} \right)^2 + \frac{2\xi^2 u}{a^2} + \frac{2\xi^2 u^3}{a^2} \right\} \frac{x}{a} + 6 \left(\frac{\xi-u}{a} \right)^2 \frac{x^2}{a^2} - 4 \left(\frac{\xi+u}{a} - \frac{2\xi u}{a^2} \right) \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{a^4} \right] + \frac{2q a^2}{D} \frac{h^2}{10(1-\nu)} \left[- \left(\frac{\xi-u}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{\xi+u}{a} - \frac{2\xi u}{a^2} \right) \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right] - \frac{2q a^2}{D} \frac{\nu h^2}{20(1-\nu)} \left[- \left(\frac{\xi-u}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{\xi+u}{a} - \frac{2\xi u}{a^2} \right) \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2} \right]$ $Q_x = q a \left(\frac{\xi+u}{a} - \frac{2\xi u}{a^2} - \frac{x}{a} \right)$ $u_0 = -\frac{q a}{H} \frac{\nu h}{2(1-\nu)} \left(\frac{\xi+u}{a} - \frac{2\xi u}{a^2} - \frac{x}{a} \right)$		
$\xi+u \leq x \leq a$	$W = \frac{q a^4}{3D} \left[- \left(\frac{\xi u}{a^2} + \frac{\xi u^3}{a^2} \right) + \left(\frac{2\xi u}{a^2} + \frac{\xi^2 u}{a^2} + \frac{\xi^3 u}{a^2} \right) \frac{x}{a} - 3 \frac{\xi u}{a^2} \frac{x^2}{a^2} + \frac{\xi^2 u}{a^2} \frac{x^3}{a^3} \right] + \frac{2q a^2}{D} \frac{2h^2}{5(1-\nu)} \frac{\xi u}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a} \right) - \frac{2q a^2}{D} \frac{\nu h^2}{5(1-\nu)} \frac{\xi u}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a} \right)$ $Q_x = -2q a \frac{\xi u}{a^2}$ $u_0 = \frac{q a}{H} \frac{\nu h}{1-\nu} \frac{\xi u}{a^2}$		 D: 曲げ剛性 $(= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)})$ H: 延び剛性 $(= \frac{Eh}{1-\nu^2})$

式(5)の解を特解とすれば、 $y=0, b$ での境界条件を満足させるための同次解は式(4)より得られる。

$$\begin{aligned}\Phi_3 &= \sum_m [A_m \cosh k_m y + B_m \sinh k_m y + C_m k_m y \sinh k_m y + D_m k_m y \cosh k_m y] \sin k_m x \\ \Phi_3 &= \sum_m [E_m \cosh k_m y + F_m \sinh k_m y] \cos k_m x \\ \Psi_1 &= \sum_m [G_m \cosh k_m y + H_m \sinh k_m y + I_m k_m y \sinh k_m y + J_m k_m y \cosh k_m y] \cos k_m x\end{aligned} \quad (8)$$

ここで $\cosh k_m y = \cosh k_m y$, $\sinh k_m y = \sinh k_m y$, $k_m^2 = k_m^2 + 10/h^2$

$A_m, B_m, \dots, I_m, J_m$ は $y=0, b$ の境界条件により決定される未定定数である。

中等厚板の一般解は、式(5)と(8)を重ね合わせることで、と得られる。

3. 中等厚板の境界条件

境界条件は薄板理論での Kirchhoff の条件と異なり、3, の物理量で規定される Poisson 型の条件で与えられる。今、 $x=0, a$ の辺を例とすれば、次のように示される。

- ・単純支持 $w = M_x = \varphi_y = 0$, $v_0 = N_x = 0$
- ・固定 $w = \varphi_x = \varphi_y = 0$, $u_0 = v_0 = 0$
- ・自由 $M_x = M_y = Q_x = 0$, $N_x = N_y = 0$ — (9)

ここで $\varphi_x = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} u_z dz$, $\varphi_y = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} v_z dz$
 u, v : x, y 方向の水平変位

4. 中等厚板の応力法

$y_i=0, b_i$ で力が規定される曲げ問題の場合を考えてみる(図2)

式(9)で示される10ヶの未定定数のうち6ヶをそれぞれ $A_m, \dots, F_m$ はそれぞれ $y_i=0, b_i$ で力と表され、両端辺でのたわみ w , 換算たわみ角 φ_x, φ_y の式に代入すればこれらの変形量は境界辺の断面力に関連づけられる。

$$\begin{bmatrix} W^i \\ W^{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{2i}^i \\ F_{2i+1}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^i \\ M^{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{F}_{2i}^i \\ \bar{F}_{2i+1}^i \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで $W^i = [w^i \ \varphi_x^i \ \varphi_y^i]^T$, $M^i = [M_y^i \ M_x^i \ Q_y^i]^T$

F_{2i}^i : 板 i の変位行列, $\bar{F}_{2i}^i$: 板 i での荷重項のベクトル

板 i と $i+1$ との変位の連続条件を考慮すれば、接合線 i における断面力 M^i を未知量とする漸化式が得られる。これらを板全体にわたる式系を構成すれば、バンドマトリクス型の連立1次方程式に帰着する。

また、引張り問題についても式(10)と同様の式が得られる。

5. 数値計算例

まず、相対2辺が単純支持された無限板に部分荷重が作用する問題を取上げる(図3)。なお、図中において S は単純支持辺、 F は自由辺、とは固定辺を意味する。

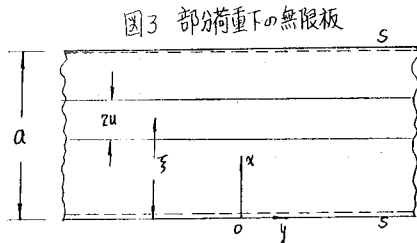


表3 板中央点($x/a=0.5$)でのたわみ($w/q a^4$)

h/a	①	②	③	①+②+③
0.1	0.01059	0.0003	-0.00005	0.01084
0.2	0.01059	0.0012	-0.00018	0.01161

(注)表中の記号は式(6)の各項に対応する。

今、板および荷重の諸元を次のようにとり、

$$h/a = 0.1 \sim 0.2, \nu (\text{ポアソン比}) = 0.3$$

$$2u/a = 0.3, \xi/a = 0.5$$

結果を表3及び4に示す。

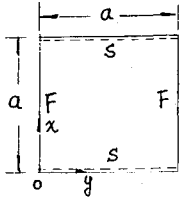
$$\text{ここに、} \Theta = \frac{E h^3}{12(1-\nu)}, H = \frac{E h}{1-\nu^2}$$

表4 板中央面の水平変位($u_0 H/q a$)

$h/a \backslash x/a$	0.0	0.25	0.5
0.1	-0.00643	-0.00536	0.0
0.2	-0.01286	-0.01071	0.0

次に、相対2辺単純支持、残りの辺が自由あるいは固定の正方形板に等分布満載荷重が作用する問題での計算結果を表5および表6に示す。なお、板のポアソン比 ν を0.3とする。

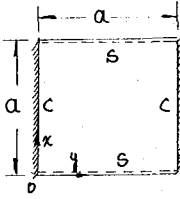
表5 たわみおよびモーメントの比較 ($\nu/a=0.5$)



h/a \ y/a	WD/qa^4		M_x/qa^2		M_y/qa^2	
	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5
0.0*	0.01509	0.01309	0.1318	0.1225	0.0	0.0271
0.1	0.01557	0.01341	0.1273	0.1220	0.0	0.02583
0.2	0.01678	0.01433	0.1225	0.1211	0.0	0.02440

注) Timoshenko, S.P., Theory of Plates and Shells による値

表6 たわみおよびモーメントの比較 ($\nu/a=0.5$)

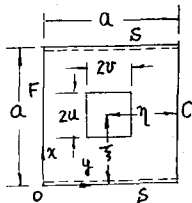


h/a \ y/a	WD/qa^4		M_x/qa^2		M_y/qa^2	
	0.0	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5
0.0*	0.0	0.00192	—	0.0244	-0.0697	0.0332
0.1	0.0	0.002201	-0.01905	0.02576	-0.06862	0.03359
0.2	0.0	0.002982	-0.01649	0.02893	-0.06228	0.03434

注) Timoshenko, S.P., Theory of Plates and Shells による値

以上の結果から、単級数表示による計算方法の妥当性が確かめられたので、式(10)の応力法を用いて y 方向の両端の境界条件が異なる場合の問題を扱う。板には部分荷重($2u/a=2v/a=0.2$)が作用し、荷重の中心位置を板の中央奥($x/a=y/a=0.5$)に一致させるものとする。

表7 $\nu/a=0.5$ でのたわみ W 、モーメント M_x の比較



h/a \ y/a	$W(10^{-3} qa^4/D)$			$M_x(10^{-2} qa^2)$		
	0.0	0.5	1.0	0.0	0.5	1.0
0.1	0.5674	0.5097	0.0	0.4999	0.8264	-0.2618
0.2	0.6252	0.6316	0.0	0.5035	0.7761	-0.2283

h/a \ y/a	$M_y(10^{-2} qa^2)$		
	0.0	0.5	1.0
0.1	0.0	0.7367	-0.8726
0.2	0.0	0.7771	-0.7609

次に、局所荷重奥下の応力について議論する。

全周単純支持された正方形板の中央に部分荷重($2u/a=2v/a=0.1$)が作用する場合の板中央奥($x/a=y/a=0.5$)の上面の応力の比較を図4に示す。

6.5とがき 単級数で表された解に総和公式を用いれば容易に代数解が得られる。式(10)で示される応力法を適用すれば、境界条件や荷重状態がどのように変化しても解が得られることが分った。また、引張り問題で示された解はこれまでの中等厚板では提示されなかったものである。

参考文献 1) Salerno, V.L. and Goldberg, M.A., Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates, Trans. ASME, Vol. 72, 1960, P.54-58

2) Ambartsunyan, S.A., Theory of Anisotropic Plates, Technomic, 1970.

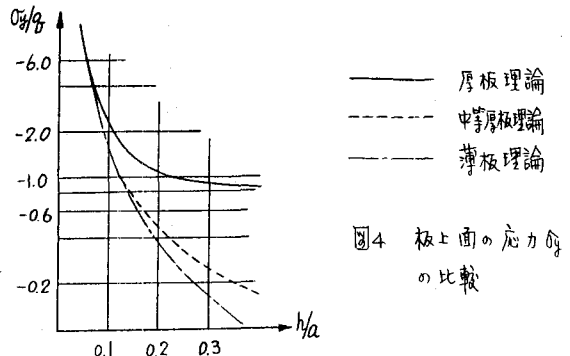


図4 板上面の応力 σ_y の比較