

1. まえがき

自己回帰 (AR) モデル, 移動平均 (MA) モデルあるいは自己回帰移動平均 (ARMA) モデル等の時系列解析法を利用したスペクトル解析法は, 周波数領域での解析法に比べより短いデータからもスペクトルの計算が可能であり, 分解能も高い事等の利点がある。したがって, 時系列理論を用いたスペクトル解析法の利用は特に非定常な時系列を扱う場合には有効な手法となろう。ここでは先に提案した多次元非定常時系列理論によるスペクトル解析手法を, 振幅および周波数面特性が非定常である地震加速度波形 (水平 2 成分, 垂直 1 成分の合計 3 成分波形) に適用して以下の検討を行った。1). 本スペクトル手法の妥当性の検証。2). 従来の周波数領域での解析手法による結果との比較検討。以上より本スペクトル解析手法の妥当性が検証できたとともに, 地震波等のように, 多次元でかつ非定常特性を有する時系列の解析には利用価値が高いことを示した。

2. 多次元非定常時系列モデル (AR および ARMA モデル)

平均値 0 の m 次元非定常確率過程 $x_i(t)$; $i=1, 2, \dots, m$ に対する m 次元非定常 AR および ARMA モデルを次式で定義する。

<AR モデル>

$$x_i(j) = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \phi_{ip}(k, j) x_p(j-k) + a_i(j) \quad ; \quad i=1, 2, \dots, m \quad (1)$$

<ARMA モデル>

$$x_i(j) = \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{M(j)} \phi_{ip}(k, j) x_p(j-k) + \sum_{p=1}^m \sum_{k=1}^{L(j)} \hat{\phi}_{ip}(k, j) a_p(j-k) + a_i(j) \quad ; \quad i=1, 2, \dots, m \quad (2)$$

ここで, $a_i(j)$ は平均値 0, 時刻が異なる場合には互いに独立で同一時刻では其分散 $\sigma_{p_i}^2(j) = E[a_p(j)a_p(j)]$ を持つ有帯域ホワイトノイズである。また $x_i(j)$ は式(1)および式(2)ともに $a_i(j)$ を入力としたときのフィルタ-出力として表わされている。式(1)に示す AR モデルの係数 $\phi_{ip}(k, j)$, あるいは式(2)に示す ARMA モデルの係数 $\phi_{ip}(k, j)$ および $\hat{\phi}_{ip}(k, j)$ の推定は, ある時刻 j での $a_i(j)$ の 2 乗平均値の和すなわち $\sum_{i=1}^m E[a_i^2(j)]$ を最小とするように最小二乗法を用いて行う。ただし, ARMA モデルの場合には $x_i(j)$ と $a_i(j)$ の相互相関々数が必要となるが, $a_i(j)$ は未知の入力であり, このままでは求めることができない。したがって, Gersch¹⁾ の提案した 1 次元定常モデルに対する二段階最小二乗法を多次元非定常モデルに適用できるように拡張して $x_i(j)$ と $a_i(j)$ の相互相関々数を計算して ARMA モデルの係数を推定する。なお, 多次元非定常 AR モデルの同定法および非定常相互スペクトル解析法の詳細は文献(2)を, また多次元非定常 ARMA モデルの同定法および以下の非定常相互スペクトル解析法の詳細は文献(3)をそれぞれ参照いただきたい。

3. 非定常相互スペクトル解析

式(1)あるいは式(2)に示した係数 $\phi_{ip}(k, j)$, $\hat{\phi}_{ip}(k, j)$ および入力 $a_i(j)$ の其分散 $\sigma_{p_i}^2(j)$ より求める非定常相互スペクトル解析法を以下に簡単に示す。多次元非定常確率過程 $x_p(t)$; $p=1, 2, \dots, m$ の非定常相互スペクトルは次式で表わされるものとする。

$$S_{p_i}(\omega, t) = E\left[\frac{1}{2\pi} X_p(\omega, t) X_{p_i}^*(\omega, t)\right] \quad ; \quad \begin{matrix} -\infty < \omega < \infty \\ -\infty < t < \infty \\ p=1, 2, \dots, m \quad i=1, 2, \dots, m \end{matrix} \quad (3)$$

$$\text{ここで, } X_p(\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t-u) x_p(u) e^{-i\omega u} du, \quad \int_{-\infty}^{\infty} W^2(t) dt = 1 \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 W^2(t) dt = -1$$

*は共役複素数を、また $W(x)$ はウィンドウ関数(本解析ではガウス型ウィンドウを使用)を表わす。

式(1)の両辺に重みつきフーリエ変換を行えば、

$$X_p(\omega, j) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j-l) x_p(l) e^{-i\omega l \Delta t} \Delta t$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} W(j-l) \left\{ \sum_{k=1}^m c_{pk}^{M(j)} x_k(l-k) + a_p(l) \right\} e^{-i\omega l \Delta t} \Delta t \quad (4)$$

j と l が近い値をとるときには、 $c_{pk}(k, l) \cong c_{pk}(k, j)$ 、また入力 $a_i(j)$ の共分散 $\sigma_{pi}^2(j)$ に対しても $\sigma_{pi}^2(j) \cong \sigma_{pi}^2(l)$ とみなして変数変換を行い、上式をマトリックス表示し式(3)の関係を用いれば、次式で示す多次元非定常AR過程に対する非定常相互スペクトル $S_x(\omega, j)$ を得る。

<ARモデル>

$$S_x(\omega, j) = \frac{\Delta t}{2\pi} C^{-1}(\omega, j) \Sigma^2(j) \{C^*(\omega, j)\}^{-1} \quad ; \text{ T は転置を表わす。} \quad (5)$$

ここで、
$$S_x(\omega, j) = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega, j) & S_{12}(\omega, j) & \cdots & S_{1m}(\omega, j) \\ S_{21}(\omega, j) & S_{22}(\omega, j) & \cdots & S_{2m}(\omega, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1}(\omega, j) & S_{m2}(\omega, j) & \cdots & S_{mm}(\omega, j) \end{bmatrix}, \quad \Sigma^2(j) = \begin{bmatrix} \sigma_{p1}^2(j) & \sigma_{p1}^2(j) & \cdots & \sigma_{p1}^2(j) \\ \sigma_{p2}^2(j) & \sigma_{p2}^2(j) & \cdots & \sigma_{p2}^2(j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{pm}^2(j) & \sigma_{pm}^2(j) & \cdots & \sigma_{pm}^2(j) \end{bmatrix}$$

$$C(\omega, j) = I - \sum_{k=1}^{M(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} c_{11}(k, j) & c_{12}(k, j) & \cdots & c_{1m}(k, j) \\ c_{21}(k, j) & c_{22}(k, j) & \cdots & c_{2m}(k, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(k, j) & c_{m2}(k, j) & \cdots & c_{mm}(k, j) \end{bmatrix}$$

$\sigma_{pi}^2(j) = \text{ARモデルの入力 } a_i(j) \text{ の共分散}$
 $I = \text{単位マトリックス}$
 $c_{pk}(k, j) = \text{ARモデルの係数}$

同様に多次元非定常ARMA過程に対する非定常相互スペクトル $S_x(\omega, j)$ は次式で表わされる。

<ARMAモデル>

$$S_x(\omega, j) = \frac{\Delta t}{2\pi} C^{-1}(\omega, j) G(\omega, j) \Sigma^2(j) G^*(\omega, j) \{C^*(\omega, j)\}^{-1} \quad (6)$$

ここで、
$$G(\omega, j) = I + \sum_{k=1}^{L(j)} e^{-i\omega k \Delta t} \begin{bmatrix} g_{11}(k, j) & g_{12}(k, j) & \cdots & g_{1m}(k, j) \\ g_{21}(k, j) & g_{22}(k, j) & \cdots & g_{2m}(k, j) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(k, j) & g_{m2}(k, j) & \cdots & g_{mm}(k, j) \end{bmatrix}$$

なお、式(6)中の $S_x(\omega, j)$ 、 $C(\omega, j)$ および $\Sigma^2(j)$ は式(5)と同様に与えられるが、ここでは $\sigma_{pi}^2(j)$ はARMAモデルの入力 $a_i(j)$ の共分散であり、 $C(\omega, j)$ 中の $c_{pk}(k, j)$ はARMAモデルの係数を意味する。

ところで、非定常相互スペクトル $S_{pg}(\omega, j)$ は相互相関関数が偶関数ではないため、一般に複素領域にある。したがって、非定常相互スペクトル $S_{pg}(\omega, j)$ を複素極表示すると

$$S_{pg}(\omega, j) = C_{pg}(\omega, j) - i Q_{pg}(\omega, j) = |S_{pg}(\omega, j)| e^{-i\theta_{pg}(\omega, j)} \quad (7)$$

ここで、 $C_{pg}(\omega, j)$ 、 $Q_{pg}(\omega, j)$ はそれぞれ $S_{pg}(\omega, j)$ の実部および虚部を表わし、 $|S_{pg}(\omega, j)|$ および位相角 $\theta_{pg}(\omega, j)$ はそれぞれ次のように表わせる。

$$|S_{pg}(\omega, j)| = \sqrt{C_{pg}^2(\omega, j) + Q_{pg}^2(\omega, j)}, \quad \theta_{pg}(\omega, j) = \tan^{-1} \left\{ \frac{Q_{pg}(\omega, j)}{C_{pg}(\omega, j)} \right\} \quad (8)$$

また、コヒーレンス $\gamma_{pg}^A(\omega, j)$ は

$$\gamma_{pg}^2(\omega, j) = \frac{|S_{pg}(\omega, j)|^2}{S_{pp}(\omega, j) \cdot S_{gg}(\omega, j)} \quad (9)$$

4. 数値計算例および考察

数値計算に用いた実地震加速度波形は1971年2月に発生したSan Fernando地震の際にカルフォルニア

科学の Millikan Library の地階で観測された成分記録 (図-1(a), 以後これを原波形と呼ぶことにする)。離散時間間隔 Δt は $\Delta t = 0.04$ 秒である。ARモデルによる解析結果も ARMAモデルによる解析結果もほぼ同一であったので、ここではARMAモデルによる結果のみを示して考察することにする。式(2)の係数の次数である $M(j)$ および $L(j)$ は若干の数値計算による検討の結果ここでは、 $M(j)=2$ 、 $L(j)=1$ とし時刻 j に独立で一定とした。すなわち以下に示す結果は (2,1) 次のARMAモデルを用いたものである。なお、約3.2秒間を区間定常と考え、この区間を0.4秒間隔で移動させて計算を行っている。さて、原波形に式(2)のARMAモデルをあてはめて推定した係数をもとにして作成したシミュレーション波形を図-1(b)に示す。図-1(a)および(b)の加速度波形を比較すれば、もとの地震波の非定常特性をよくとらえた波形がシミュレートされていることがわかる。さて、式(8)で与えられる非定常相互スペクトル $S_{pg}(\omega, j)$ の絶対値 $|S_{pg}(\omega, j)|$ ($p=g$ の場合を非定常スペクトル、 $p \neq g$ のときを相互スペクトルと以後呼ぶことにする)、位相角 $\theta_{pg}(\omega, j)$ および式(9)で与えられるコヒーレンス $\gamma_{pg}(\omega, j)$ の一部を図-2~5の(a)にそれぞれ示す。図-2~3(a)はスペクトルの最大値で正規化した値を、図-4は2 π を、また図-5は1.0をそれぞれ10等分し大きい方より9, 8, ..., 2, 1, 0として表わしたものである。なお図中の $\omega_s(t)$ は各時間におけるスペクトルの重心位置を、 $\omega_s(t)$ は $\omega_s(t)$ に関するスペクトルの回転二次半径でありばらつき具合を表わす。また、 $\alpha_0(t)$ はスペクトルの形状関数であり、 P_x は全パワーの $1/2$ を表わしている。さて、図-2~5の(a)は原波形のスペクトル等を表わすが、これらの特性と図は省略したがシミュレーション波形のそれとは非常に良い類似性を示している。このことと上記両波形の類似性より、多次元非定常ARMAモデルの同定が精度よく行われていることがわかる。同一の原波形のスペクトルを周波数領域での解析法⁽⁴⁾を用いて解析した結果を図-2~5の(b)に示す。これらの結果は文献(4)の図を転載させて頂いた。非定常スペクトル、相互スペクトルともに18秒以降の $\omega_s(t)$ および $\omega_s(t)$ を除いて大体よく似た傾向を示しているといえよう。しかしながら、コヒーレンスには両者に大きな

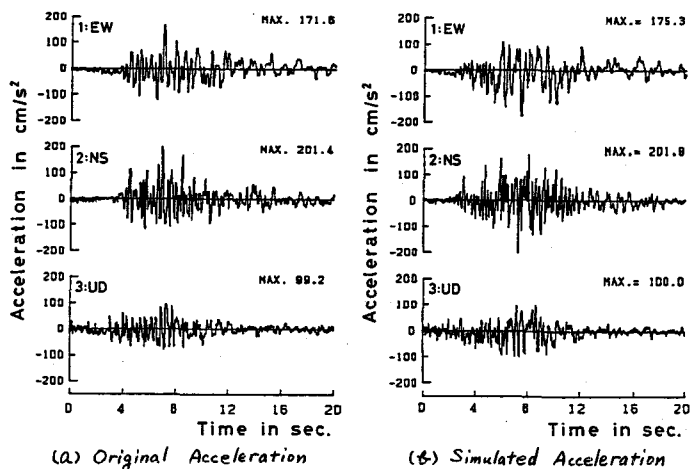


図-1 Millikan Library での記録波形 (a) とその ARMA モデルによるシミュレーション波形 (b)

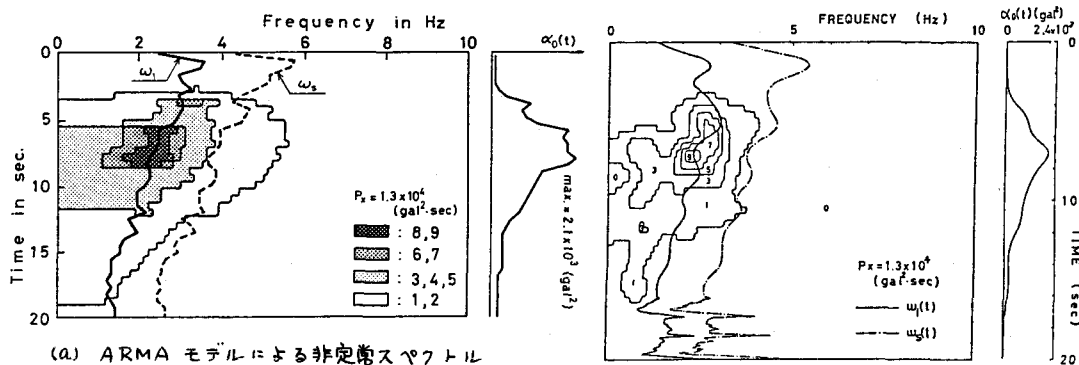
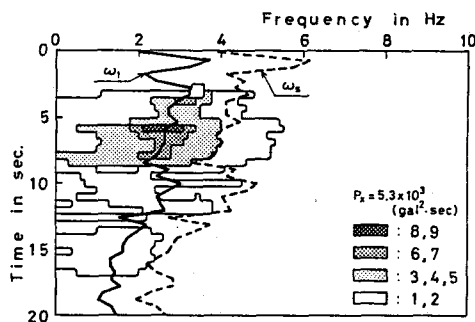


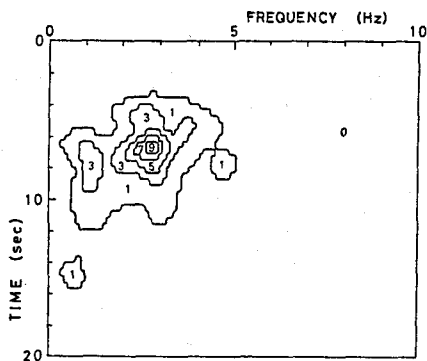
図-2 Millikan Library での加速度記録の非定常スペクトル, $|S_{ii}(\omega, j)|$

な差がある。ARMAモデルで求めたコヒーレンスは周波数領域によるものに比べて形も単純であり、地震動の波形特性の把握には利用し易いものと思われる。

＜参考文献＞ 1) Gersch, Taoka and Liu, J. of EM div., ASCE, EM5, 1976.10, pp. 883~899
 2) Hoshiya and Chiba, Proc. of JSCE, No. 296, 1980.4, pp. 121~130 3) 千葉, 土木学会論文報告集, 1993.10 登載予定 4) 屋谷, 磯山, 土木学会論文報告集, 第265号, 1978.3, pp. 81~91

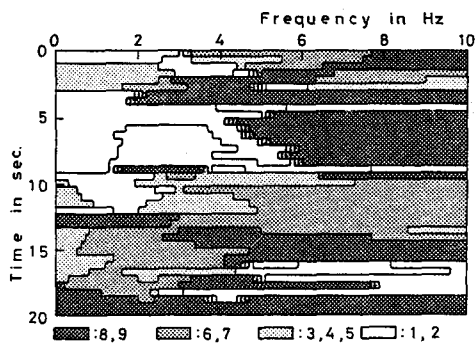


(a) ARMAモデルによる相互スペクトル

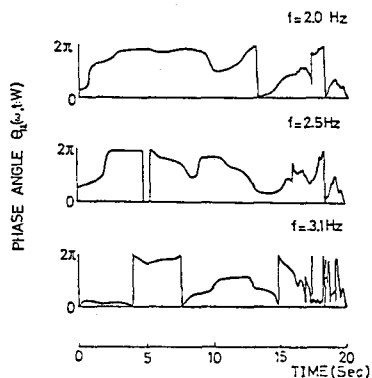


(b) 周波数領域解析による相互スペクトル

図-3 Millikan Libraryでの加速度記録の相互スペクトル, $|S_{12}(\omega, j)|$

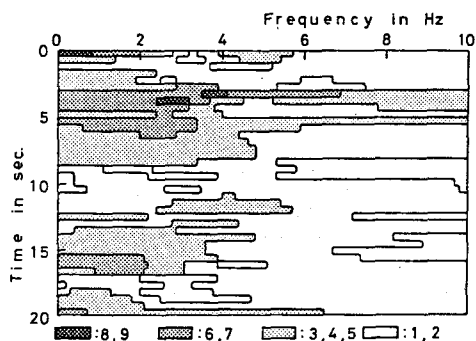


(a) ARMAモデルによる位相角

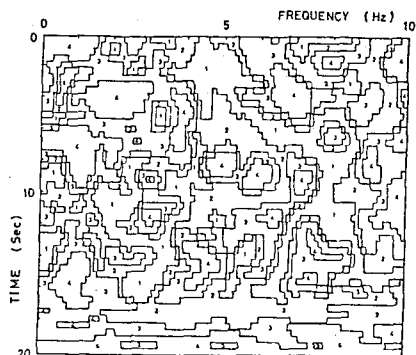


(b) 周波数領域解析による位相角

図-4 Millikan Libraryでの加速度記録の位相角, $\theta_{12}(\omega, j)$



(a) ARMAモデルによるコヒーレンス



(b) 周波数領域解析によるコヒーレンス

図-5 Millikan Libraryでの加速度記録のコヒーレンス, $\gamma_{12}(\omega, j)$