

大阪市立大学 正員 〇堀川都志雄

大阪市立大学 正員 園田恵一郎

大阪市立大学 学生員 白鳥 良一

1. はしがき 近年、土木構造物の大型化に伴って、構造設計問題の中に3次元弾性解析に関連するものが多くなってきた。しかしながら、有限要素法でこの種の解析を行うには大型電子計算機を必要とし、経済的な面で誰れにでも容易に利用出来るものではない。一方、マイコンやパソコン等の小型計算機の普及は目覚ましいものがあり、構造設計の分野での利用も高まりつつあるように思われる。本研究の目的は、解法を工夫することによって小型計算機でもある種の3次元弾性解析が可能であることを示すことにある。提案する解法は古典的な級数解法と骨組解析で良く知られている伝達マトリックス法(還元法)を結合したもので、積層板や多層地盤の3次元解析に適している。周知のように、伝達マトリックス法の特徴は記憶容量の小さい計算機の利用が可能であることであるが、その反面演算中の桁落ちによる誤差の累積が起り、特に格向マトリックスの中に指数関数や双曲線を含む場合はこの誤差が顕著になると言われている^{1),2)}。このような欠陥を除去するために従来から種々の工夫がなされているが、それでも伝達マトリックス法の計算では倍精度演算を用いるのが常識になっているようである。したがって、現在のマイコンやパソコン等の小型計算機では単精度演算が主流になっているので、従来の伝達マトリックス法をいきなり導入することは困難であるように思われる。

本研究では、3次元弾性解に含まれる双曲線関数の処理に工夫をこらした上に、単精度演算でも上述の桁落ちによる誤差の累積が起らないような計算法(これを「はさみ込み法」と名付ける³⁾)を開発し、非常に多くの層を持つ問題に対しても伝達マトリックス法がうまく適用できることを示したものである。

2. 厚板理論 3次元弾性論における Galerkin vector $\mathbf{W}$, Boussinesq's function $\mathcal{Q}$ および変位ベクトル $\mathbf{U}$ は、

$$\Delta \Delta \mathbf{W} = -\mathbf{B}/(1-\nu) \quad , \quad \Delta \mathcal{Q} = 0 \quad (1)$$

$$2\mu \mathbf{U} = 2(1-\nu) \Delta \mathbf{W} - \text{grad div } \mathbf{W} + 2 \text{rot } \mathcal{Q} \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{B} = (X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k})$: 物体力ベクトル、 ν : ポアソン比、 μ : ラムの定数、 $\mathbf{W} = W_x\hat{i} + W_y\hat{j} + W_z\hat{k}$, $\mathcal{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$, grad, div および rot: ベクトル演算子、 $\hat{i}, \hat{j}$ および $\hat{k}$: 単位ベクトル、 $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ 。全周単純支持された板に式(1)を適用すると、関数 W_x および Q_x は次のようになる。(図-1)

$$W_x = \sum_m \sum_n \left[C_1 \text{sh} \alpha_m z + C_2 \text{ch} \alpha_m z + C_3 \beta_n \text{sh} \beta_n z + C_4 \beta_n \text{ch} \beta_n z \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad , \quad Q_x = \sum_m \sum_n \left[C_5 \text{sh} \alpha_m z + C_6 \text{ch} \alpha_m z \right] \cos \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (3)$$

ここで、 $\alpha_m = m\pi/a$, $\beta_n = n\pi/b$, a および b は x および y 方向のスパン、 $C_1 \sim C_6$ は板の上下面の境界条件より決定される未定定数である。なお、座標系は板の中央面に $x-y$ 平面を、それと垂直下向きに z 軸をとる。

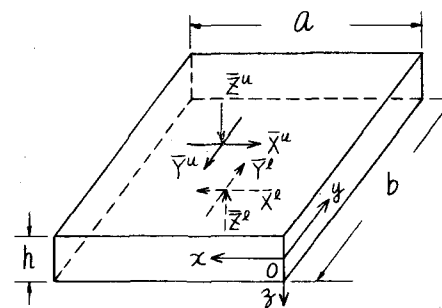


図-1

。板の上下面で応力が規定された場合

例えば、上下面での変位 W は次のように得られる。

$$W^u = \sum_m \sum_n \left[X^u g_{31} + Y^u g_{32} + Z^u g_{33} + X^u g_{34} + Y^u g_{35} + Z^u g_{36} + g_{37} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad , \quad W^l = \sum_m \sum_n \left[X^l g_{61} + Y^l g_{62} + Z^l g_{63} + X^l g_{64} + Y^l g_{65} + Z^l g_{66} + g_{67} \right] \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (4)$$

ここで、 $X^u, Y^u, \dots, Z^l$ は $X^u, Y^u, \dots, Z^l$ の $7/12$ 係数であり、上添字 u, l は板の上面および下面を示す。

g_{37}, g_{67} は物体力 X, Y, Z による影響項である。

他の変位 U^u, U^l, V^u, V^l も同様にして得られる。

・板の上下面で変位が規定された場合 例えば、 $0_2^u, 0_3^z$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} 0_2^u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ U^u h_{31} + V^u h_{32} + W^u h_{33} + U^z h_{34} + V^z h_{35} + W^z h_{36} + h_{37} \right\} \sin \alpha m x \sin \beta n y, \\ 0_3^z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ U^u h_{61} + V^u h_{62} + W^u h_{63} + U^z h_{64} + V^z h_{65} + W^z h_{66} + h_{67} \right\} \sin \alpha m x \sin \beta n y \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $U^u, V^u, \dots, V^z, W^z$ は変位 $u^u, v^u, \dots, v^z, w^z$ のフーリエ係数を示す。

同様にして、板の上下面における応力 $\tau_{xz}^u, \tau_{xz}^z, \tau_{yz}^u$ および τ_{yz}^z も容易に求められる。

3. 多層板問題への応用

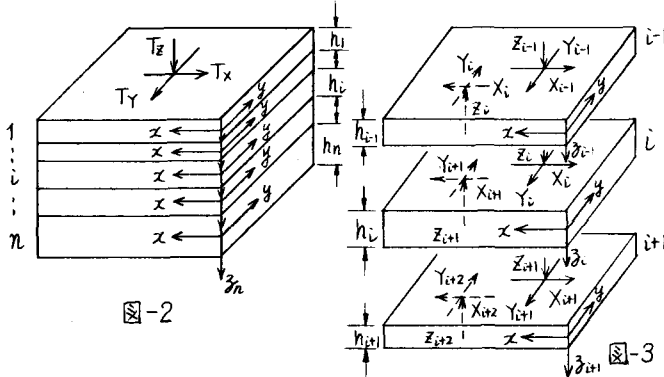


図-2

図-2 に示される積層板の任意の層 i をはさむ層を取り出して考える(図-3)。

式(4)を i 層に適用し、調和解析を考慮すると、上下面での変位と応力のフーリエ係数は、以下のように関連づけられる。

$$\begin{Bmatrix} U^u \\ U^z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X^u \\ X^z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} K_{13} \\ K_{23} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで、 $U^u = \{U^u, V^u, W^u\}^T$, $X^u = \{X^u, Y^u, Z^u\}^T$, $[K_{13}, K_{23}]^T$ は物体力による影響項である。

式(6)と i 層および $(i-1)$ 層の変位の連続条件式より、層間に作用する伝達力 X_{i-1} , X_i および X_{i+1} に関する新化式が得られる。これらの式を図-2 の n 層からなる積層板に適用すると、伝達力を未知量とする多元連立 1 次方程式が得られる。

4. 「はさみ込み法」の誘導 式(6)の誘導と同様にすれば、式(5)からも次のような式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} X^u \\ X^z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^u \\ U^z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} L_{13} \\ L_{23} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式(6)および(7)より、以下のような式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} U \\ X \end{Bmatrix}_u &= \begin{bmatrix} -L_{21}^{-1} L_{22} & L_{21}^{-1} \\ K_{21}^{-1} & -K_{21}^{-1} K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \end{Bmatrix}_z - \begin{Bmatrix} L_{21}^{-1} L_{23} \\ K_{21}^{-1} K_{23} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} U \\ X \end{Bmatrix}_z &= \begin{bmatrix} -L_{12}^{-1} L_{11} & L_{12}^{-1} \\ K_{12}^{-1} & -K_{12}^{-1} K_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \end{Bmatrix}_u - \begin{Bmatrix} L_{12}^{-1} L_{13} \\ K_{12}^{-1} K_{13} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

以上の 2 式を単純化すれば、次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_u = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_z \quad (8)$$

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_z = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ X \\ 1 \end{Bmatrix}_u \quad (9)$$

式(8)と(9)によれば、相反作用の定理によりそれぞれの影響係数は、逆関係であることは当然である。

式(8)および(9)より、接合面での状態ベクトルを Y_i とすると、

$$Y_i = F_i \cdot Y_{i+1} \quad (10) \quad Y_{i+1} = G_i \cdot Y_i \quad (11)$$

ここで、 $Y_i = \{U, X, 1\}_i^T = \{U, V, W, X, Y, Z, 1\}_i^T$, F_i, G_i は格向マトリックスであり、 $F_i = (G_i)^{-1}$ である。

式(10), (11)を図-4 を参照して、 n 層からなる積層板に適用すると、 i 番目の接合面での状態ベクトル Y_i は、次のように示される。

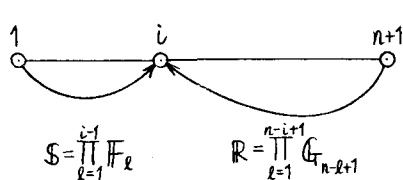


図-4. 「はさみ込み法」の模式図

ここで、 $U_i = \{U, V, W\}_i^T$, $X_i = \{X, Y, Z\}_i^T$, a_1, a_2, b_1 および b_2 は物体力による影響項である。

・積層板の上下面の外荷重が既知の場合： 式(12), (13)より状態ベクトル Y_i は、次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} X_1 - \delta_2 \\ X_{n+1} - \beta_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

・多層地盤の上面に外荷重が作用し、底面で変位が規定される場合： 式(14)と同様にすれば、

$$\begin{Bmatrix} U \\ X \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} X_1 - \delta_2 \\ U_{n+1} - \beta_1 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

フーリエ級数の各項 (m, n) ごとに積層板の接合面での変位および伝達力が容易に得られる。次に、他の応力例えば水平面内の応力については、あらかじめ伝達力との関係式を求めておけば、同様に得られる。以上より、各層の変位および応力をそれぞれ (m, n) について総和すればよいことになる。

5 数値計算例 a 積層板問題

20層からなる積層板の上面に等分布荷重 q あるいは鉛直方向の物体力(密度を γ とする)が作用している場合の2つのケースについて、板の中央点($x/a = y/b = 0.5$)における結果をそれぞれ表-1 および2に示す。なお、フーリエ級数の項数は上面荷重 q の展開が十分収束する値までとした。

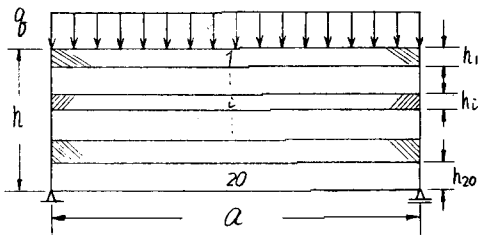


図-5 全周単純支持された積層板

板の諸元は、次の通りである。

$$\begin{aligned} b/a &= 1.0, \quad h/a = 0.2, \\ h_i/h_o &= E_i/E_o = \nu_i/\nu_o = 1.0 \quad (i=1, 6), \\ h_o/a &= 1/100, \quad E_o = 1.0, \quad \nu_o = 0.3, \\ \mu_o &= E_o/2(1+\nu_o), \quad \bar{z} = \gamma h \end{aligned}$$

表-1, 2の方法の内容を次に示す。

方法1 --- 従来の還元法で式(10)のみを用い、内点の状態ベクトル Y_i は Y_{n+1} (板の下面)より順次求められる。

方法2 --- 方法1と同様であるが式(11)のみを用いる。内点 Y_i は、上面の Y_1 より順次決定される。

方法3 --- 「はさみ込み法」による式(14)を用いる。

方法4 --- 還元法を用いず、式(6)と変位の連続式を同時に解く方法。

従来の還元法を2つに分けたのは、外荷重(この場合は上面荷重 q である)が内点の状態ベクトルにどのような影響を及ぼすかを調べるためである。

項目 格点	$W2\mu_o/\gamma a$			σ_x/γ			σ_z/γ		
	1	2	3,4	1	2	3,4	1	2	3,4
1	6.598	6.703	6.417	-7.572	-7.587	-7.497	-1.043	-1.043	-1.043
6	6.560	6.643	6.535	-3.642	-3.660	-3.661	-0.845	-0.831	-0.846
11	6.518	6.640	6.557	-0.044	-6.690	-0.075	-0.499	8.738	-0.500
16	6.417	74.88	6.489	3.512	-4.2×10^3	3.511	-0.156	6.7×10^3	-0.156
21	6.250	5.3×10^4	6.325	7.269	-3.1×10^6	7.313	0.0	5.3×10^6	0.0

表-1
等分布荷重による変位・応力の比較

項目 格点	$W2\mu_o/\gamma a$		σ_x/γ		σ_z/γ	
	1	3,4	1	3,4	1	3,4
1	2.1×10^3	6.495	1.2×10^5	-7.315	-2.0×10^5	0.0
6	9.255	6.655	1.6×10^2	-3.549	-2.6×10^2	-0.094
11	6.705	6.705	0.253	0.0	-0.352	0.0
16	6.690	6.655	3.544	3.549	0.093	0.094
21	6.560	6.495	7.345	7.315	0.0	0.0

表-2 自重による変位・応力の比較

表-1より、方法2のような外荷重の作用位置 (Y_1) から順次求められる内点の状態ベクトル Y_i は、 $i=1$ から離れるに従って誤差が次第に増大していることが判る。

主な内点での状態ベクトルの値を表-3に示す。

表-3 各方法における状態ベクトルの比較 ($m=n=1$)

項目 格点	U=V			W			X=Y			Z		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	1.759	1.761	1.739	6.910	6.935	6.684	0.0	0.0	0.0	-1.621	-1.621	-1.621
2	1.547	1.548	1.534	6.910	6.935	6.716	0.380	0.381	0.377	-1.609	-1.609	1.609
4	1.150	1.150	1.147	6.898	6.921	6.765	1.006	1.007	0.999	-1.520	-1.520	1.521
6	0.782	0.781	0.785	6.873	6.892	6.795	1.403	1.464	1.457	-1.363	-1.363	1.365
8	0.435	0.434	0.442	6.839	6.853	6.809	1.761	1.761	1.757	-1.159	-1.159	1.161
10	0.102	0.101	0.110	6.799	6.808	6.808	1.905	1.905	1.904	-0.927	-0.927	-0.930
12	-0.224	-0.225	-0.218	6.754	6.758	6.794	1.900	1.900	1.903	-0.687	-0.686	-0.689
14	-0.552	-0.552	-0.548	6.705	6.703	6.764	1.747	1.747	1.752	-0.456	-0.456	-0.458
16	-0.888	-0.888	-0.888	6.649	6.643	6.721	1.445	1.444	1.451	-0.254	-0.254	-0.255
18	-1.240	-1.239	-1.244	6.584	6.574	6.661	0.989	0.988	0.994	-0.099	-0.099	-0.100
20	-1.615	-1.614	-1.624	6.505	6.493	6.583	0.372	0.371	0.374	-0.012	-0.012	-0.012
21	-1.814	-1.812	-1.825	6.459	6.447	6.536	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

b) 多層地盤問題 均質地盤を10層よりなる層構造としてあて取扱い、地盤上面に部分荷重(荷重幅は x , y 方向とも層厚の1/2とする)が作用し、かつ地盤底面ですべての変位が固定されているとする。

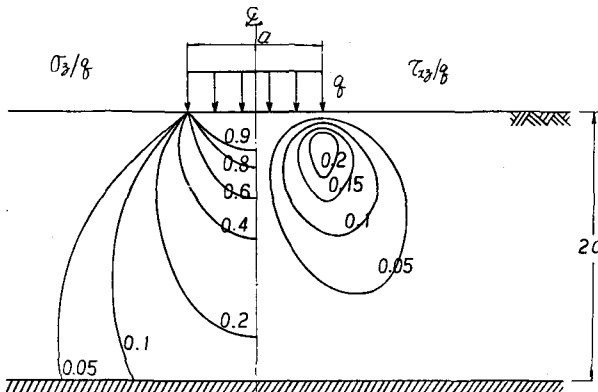


図-6 応力 σ_x および τ_{xz} の等高線図 ($\nu=0.3$)

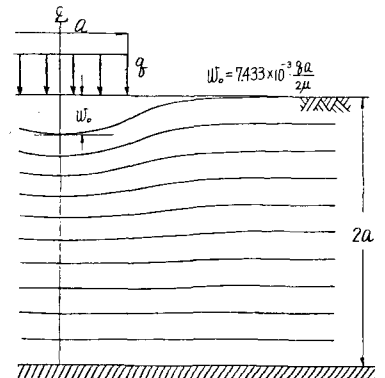


図-7 変位 w の状態図 ($\nu=0.3$)

6. あとがき 「はさみ込み法」は、十分良い精度であることを示している。「はさみ込み法」の欠点としては、層数が多くなれば行列演算の回数が相当多くなり計算時間が増大することであるが、還元法を用いない場合との計算時間を比較したところ、約10層位で後者の方が計算時間を要していることが判った。また、層厚が薄い場合には、層厚の肉数である g_{ij} および h_{ij} ($i=1,6, j=1,7$) に対して漸近展開を行うことにより精度を向上させることができる。さらに、2.で述べた Galerkin vector および Boussinesq's function を直交異方弾性体の変位関数に置きかえれば、水平および鉛直面内でそれぞれの弾性定数が異なる値を有する様な層を含む多層問題も容易に解析出来ることになる。本方法は、小型計算機でも3次元問題に利用できることを示しており、活用すれば十分設計に役立つものといえよう。

- 1) 中井博, 山口寿男: 伝達マトリクス法による曲げねじりを受ける薄肉直線桁橋の解析と断面力変形量に関する研究, 土木学会論文報告集, 第233号, 1975年1月。
- 2) 中村秀彦: 数値誤差の改善を考慮した伝達マトリクス法の提案, 土木学会論文報告集, 第289号, 1979年9月。
- 3) 山口他: 多層桁橋架橋に対する伝達マトリクス-級数解法について, 関西支部講演会, 昭和55年。
- 4) K. SONODA and T. HORIKAWA: Displacement functions for an orthotropic elastic body and their applications to thick plate problems. Theoretical and Applied Mechanics, Vol.29, 1981.