

1 はじめに

浸透流解析は、従来種々の手法により研究・開発されてきた。その手法は、たとえば解析的方法・有限要素法・差分法等がある。後者2つは領域法とよばれる数値計算法であるが、最近では境界要素法のような境界法も注目されつつある。

本報告は、上記手法のうち特に境界法に着目し、その適用性について検討したものである。境界法の例としては、境界要素法および代用電荷法をとりあげる。代用電荷法は、グリーン関数の重畳法を用いる方法であり、従来電気工学分野において研究されてきた。

筆者らの主眼のひとつは、この代用電荷法の浸透流解析への適用性を調べることにある。そのために従来ポテンシャル境界のみを扱ってきた代用電荷法を流束境界をも考慮する混合問題として扱えるように拡張した。

2 基礎式

定常二次元浸透流問題の支配方程式は、次式で表わされる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

ここで、 ϕ ；ポテンシャル、 ∇^2 ；ラプラシアン

境界条件は次のとおりである。

$$\begin{aligned} \phi &= \bar{\phi} \quad ; \quad \text{ON } \Gamma_1 \\ q &= \bar{q} \quad ; \quad \text{ON } \Gamma_2 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $q = \partial \phi / \partial n$ 、 n は境界 Γ 上の外向き法線方向である。また、上付きバーは規定された量を表わすものとする。

3 境界法の概要

3.1 境界要素法

境界要素法については、既往の研究および成果が種々発表^{1)~3)}されているので、ここでは簡単に述べる。

式(1)をグリーンの公式を用いて、境界上の未知量

だけを含む積分方程式に変換し、境界条件(2)のもとで解くのが直接法と呼ばれる境界要素法の基本である。

ϕ と ϕ^* を境界までも含めた全領域 $\Omega + \Gamma$ において2階導関数まで連続な関数としたとき、グリーンの公式はつぎのように表わされる。

$$\int_{\Omega} (\phi \nabla^2 \phi^* - \phi^* \nabla^2 \phi) d\Omega = \int_{\Gamma} (\phi q^* - \phi^* q) d\Gamma \quad (3)$$

ただし、 $q^* = \partial \phi^* / \partial n$ である。ここで、式(3)の左辺は領域全体にわたる面積分を、右辺は境界面についての線積分を表わす。

次に、領域 Ω を占めるものと同じ性質を有する無限媒体を考え、その中の1点Pに単位集中負荷が作用する場合を考える。そのとき、別の点Qでのポテンシャル $\phi^*(P, Q)$ は次式を満足する。

$$\nabla^2 \phi^*(P, Q) + \delta(P, Q) = 0 \quad (4)$$

ここに、 $\delta(P, Q)$ はディラックのデルタ関数である。式(4)を満足する $\phi^*(P, Q)$ はラプラスの方程式に対する基本解と呼ばれ次のように定義される。

$$\phi^*(P, Q) = \phi^*(r) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r} \right) \quad (5)$$

ただし、 r は点Pと点Qの距離である。

この基本解を式(3)のグリーンの公式に代入して積分方程式を得ることができる。さらに、得られた方程式を境界上の積分方程式に変換して、境界要素法の出発式が得られる。あとはこの積分方程式を離散化して、境界要素法の解が得られる。

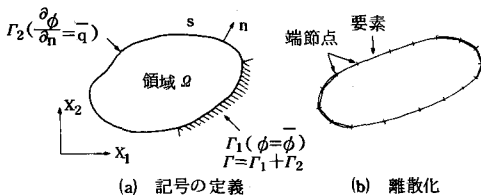


図. 1 境界要素法

3.2 代用電荷法

代用電荷法は、1969年 H. Steinbigler⁴⁾が高

電圧装置の電界計算に用いたのが最初で、70年代に入って日本と西ドイツで主として応用に関した論文⁵⁾が発表されてきた。この手法は、これまで主にポテンシャルの境界条件だけを扱う問題（ディリクレ問題）を対象としてきた。しかし、浸透流問題を対象とする場合は流束境界を取り扱わねばならないので、混合問題として支配方程式を解く必要がある。以下、混合問題に代用電荷法を応用する方法について概述する。

図. 2に示すように、領域外の適当な位置に代用電荷（単位集中負荷）を配置する。それぞれの代用電荷に対する電位関数（ポテンシャル関数）の重ね合わせとして一般解 $\phi(x, y)$ を表わすのが、本手法の基本的な考え方である。 $\phi(x, y)$ は次式で表わされる。

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n Q_i \cdot G(x, y; x_i, y_i) \quad (6)$$

ここで、 Q_i は重みあるいは電荷量といわれる未定係数である。 $G(x, y; x_i, y_i)$ は点 (x_i, y_i) にある単位電荷による点 (x, y) の電位関数（すなわちグリーン関数）であり、次式で与えられる。

$$G(x, y; x_i, y_i) = \frac{1}{\pi} \ln \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (7)$$

境界 Γ 上に電荷数に等しい数の点（拘束点という）を選んで、その点で境界条件を満足させるようにすると次式で示されるような連立一次方程式を得る。

$$\phi(x_i, y_i) = \sum Q_j \cdot G(x_j, y_j; x_i, y_i) = \bar{\phi}(\Gamma_j) \quad (8)$$

; ON Γ_1

$$\frac{\partial \phi(x_i, y_i)}{\partial n} = \sum Q_j \frac{\partial G(x_j, y_j; x_i, y_i)}{\partial n} = \bar{q}(\Gamma_j) \quad (9)$$

; ON Γ_2

ここで、 (x_j, y_j) は拘束点の座標で、 Γ_j は拘束点を示す。また、 (x_i, y_i) と (x_j, y_j) は異なった点とする。未知数 Q に関する連立一次方程式、(8)および(9)を解けば Q を決定することができ、 Q を式(6)に代入すると一般解 $\phi(x, y)$ が得られる。

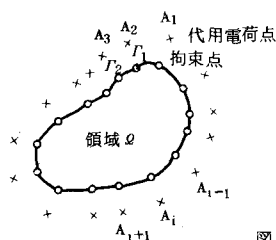


図. 2 代用電荷法

4. 解析例

4.1 矩形領域

境界要素法および代用電荷法の計算精度を検討するために、図. 3に示すような矩形領域のポテンシャル問題を考える。境界条件は、i) $x=0$ で $\phi=(P_1)=50$, ii) $x=L=60$ で $\phi=(P_2)=50$, iii) $y=0$ で $q=0$, iv) $y=H=20$ で $\phi=100-0.5x$ である。本解析例では、i) 解析解、ii) 境界要素法および iii) 代用電荷法について検討した。

解析解は、変数分離法により容易に求まり、次式で表わされる。

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 \quad (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4P_1(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cdot \sinh \frac{(2n+1)\pi(L-x)}{2H} \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2H} \right) / \sinh \frac{(2n+1)\pi(L-x)}{2H} \\ \phi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4P_2(-1)^n}{(2n+1)\pi} \cdot \sinh \frac{(2n+1)\pi x}{2H} \cdot \cos \frac{(2n+1)\pi y}{2H} \right. \\ &\quad \left. / \sinh \frac{(2n+1)\pi L}{2H} \right) \\ \phi_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2P_1 - 2P_2(-1)^n}{n\pi} \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot \cosh \frac{n\pi y}{L} \right. \\ &\quad \left. / \cosh \frac{n\pi H}{L} \right) \end{aligned}$$

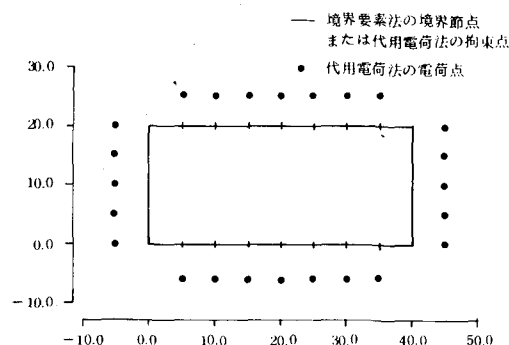


図. 3 モデル化

要素分割を細かくするほど、または拘束点の数を増やすほど計算精度が良くなるのは当然であるが、今回の解析では図. 3に示すようなモデル化により計算を行なった。図. 4の計算結果からわかるように、3者の手法による差異はほとんど見られない。したがって、図. 3のようなモデル化においては、境界要素法および代用電荷法の解の精度は十分に信頼しうると考えられる。

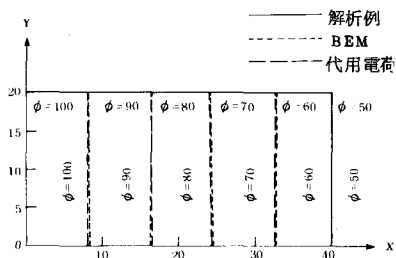


図. 4 解析例 1

一般に、数値計算の解の精度は要素分割等のモデル化に左右され、解の精度を正確に評価することは難しい。しかし、代用電荷法では以下のようにして解の精度を評価することができる。

すなわち、真の解を $\phi(x, y)$ 、代用電荷法による解を $\phi(x, y)$ とし、誤差を $e(x, y)$ とすると

$$e(x, y) = \phi(x, y) - \phi(x, y) \quad (11)$$

となり、次式を満足する。

$$\nabla^2 e = 0 \quad ; \quad \text{in } \Omega \quad (12)$$

$$e_r = \phi_r - \phi_r \quad ; \quad \text{ON } \Gamma \quad (13)$$

つまり、誤差 e もラプラスの式を支配方程式とするポテンシャル問題に帰着される。したがって、境界上の誤差のみにより領域内の誤差分布を知ることができる。図. 5 に前記解析例 1 の誤差分布の計算結果を示す。

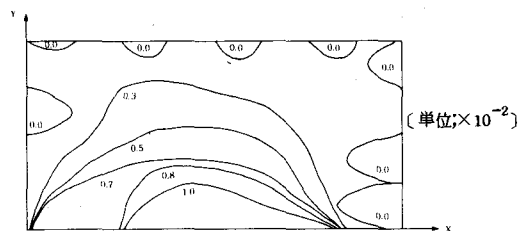


図. 5 代用電荷法の誤差分布

4.2 自由水面を有する矩形領域

浸透流問題の特徴は、自由水面を有する境界が存在することである。図. 6 に自由水面を持つ場合の解析例を示す。自由水面形は、あらかじめ求めておいたものを仮定水面形として与えた。境界条件は、i) $x=0$ で $\phi=30$, ii) $x=100$ で $\phi=y$, iii) $y=0$ で $q=0$, iv) 自由水面上で $\phi=y$ である。

図. 6 には、i) 境界要素法、ii) 代用電荷法および iii) 有限要素法の結果が示してある。同図からわかる

ように、代用電荷法の結果は他の 2 つの手法に比べると右端近傍において差異があるが、性状的には同様の計算結果が得られている。この差異の原因としては、i) 領域右端で性状が急変すること、ii) 電荷点の配置の妥当性などが考えられるが、これらは今後の研究課題である。

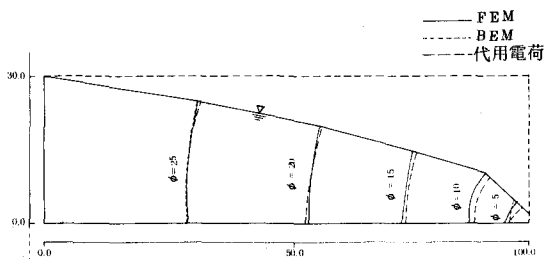


図. 6 解析例 2

4.3 ダム堤体内浸透流問題

最後に、ダム堤体を模した領域形状における浸透流問題を取り扱うことにする。

図. 7 に示すような領域形状を考え、自由水面形はあらかじめ仮定しておくことにする。境界条件は上流側、下流側ともに静水圧として堤体下部は不透水とする。また、自由水面上では $\phi=y$ とする。

図. 7 には、解析例 2 と同様に、i) 境界要素法、ii) 代用電荷法および iii) 有限要素法の計算結果が示してある。

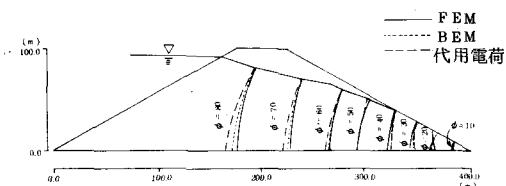


図. 7 解析例 3

5. データ量および計算時間

有限要素法などの領域法は、入力データとして領域内部の情報が必要であり領域内部も未知数として解かねばならない。一方、境界法は境界上の情報のみが必要であり解くべき未知数も境界上に限定される。したがって、境界法は領域法に比べてデータ量が少なく、かつ計算速度が速くなる。表. 1 に各解析

例のデータ量および計算時間（CPUタイム）を示す。ここで、境界要素法と代用電荷法の結果は、内点のデータ量と計算時間も入っている。この表では有限要素法が境界要素法および代用電荷法に比べてかなり有利な結果となっている。しかし、データ量はプログラムの入力形式に依存するものであるから直接比較・評価することはできない。また、計算時間についても計算精度とモデル化（要素分割数等）との相関関係によって評価すべきものであり、計算速度そのものだけで議論することはできない。表1は単に参考として示すものとする。

表1: データ量および計算時間

	解 析 例 1		解 析 例 2		解 析 例 3			
	BEM	代用電荷	FEM	BEM	代用電荷	FEM	BEM	代用電荷
要素数	28	*1 28	40	54	*1 72	72	47	*1 45
節点数	28	*2 26	55	54	*2 72	90	47	*2 45
内点数	21	21	-	76	76	-	49	49
データの量 (カード数)	28	30	59	99	179	76	82	114
計算時間 (秒)	3.0	3.7	1.0	15.6	17.2	1.6	10.3	11.8

*1 電荷点数を表わす。
*2 拘束点数を表わす。

6. 境界法の特徴

境界法は、有限要素法のような領域法と種々の点で異なる。以下に境界法の主な特長を述べる。

- i)未知数が境界上だけに存在するので領域法に比べその数が少ない。
- ii)未知数が少ないので計算時間が短い。
- iii)境界条件の変化を容易に反映できる。

次に、境界要素と代用電荷法の差異について述べる。

- i)境界要素法では、境界上および境界近傍においては計算点をもうけて解を得難い。一方、代用電荷法はなんら支障なく領域すべてにおいて解を得ることができる。
- ii)代用電荷法は、誤差評価を容易に行なうことができる。

7. おわりに

以上、境界法、特に境界要素法と代用電荷法についてその浸透流解析への適用性について検討した。境界要素法については、近年、注目を集めてきてその適用性についても検討されつつあるが、代用電荷法については、まだ検討の余地が残されている。

しかし、代用電荷法には種々の利点がある。これを有効に活用することにより、新しい数値計算手法としての発展が期待できる。

8. 謝 辞

本報告は、当所の服部正博士により紹介された境界要素法の検討からスタートしたものである。種々のヒントを東京電力・宮田美幸氏より与えられたことと、有益な助言を鹿児島大学・村島定行教授より頂いたことについて、併せて謝意を表わしたい。

参考文献

(1) C.A.Brebbia; The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press, London, (1978); 邦訳 神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭 (共訳); 境界要素法入門, 培風館 (1980)

(2) C.A.Brebbia and S.Wallken; Boundary Element Techniques in Engineering, Newness-Butternouth, London (1980); 邦訳 神谷紀生, 田中正隆, 田中喜久昭 (共訳); 境界要素法の基礎と応用, 培風館 (1981)

(3) 鷺津久一郎 (監修) 田中正隆, 田中喜久昭; 境界要素法-基礎と応用, 丸善株式会社 (1982)

(4) H. Steinbigler; Aufgabsfeldstärken and Aurnützungsfaktoren rotations-symmetrischer Elektrodenanordnungen, Dissertation T.H.München (1969)

(5) たとえば村島定行, 久原秀夫; リーマン面上のグリーン関数を利用した代用電荷法, 昭和54年度情報処理学会第20回全国大会