

直線はり要素を用いた薄肉空間曲線ばりの近似解析とその妥当性

早稲田大学理工学部 正会員 ○依田 照彦
早稲田大学理工学部 正会員 平嶋 政治
三菱重工業株式会社 正会員 布山 裕久

1. はじめに

一般に、電算機を利用して構造解析を行う場合、

- (1)どのようにモデル化をするか
- (2)どのような計算手法を用いるか
- (3)得られた数値解は、どの程度信頼できるか

という点に注意を払わなければならない

従来より、らせんばりや円弧ばりの近似解析は、これらの構造物を直線ばりの集合に置き換え、モデル化し、立体骨組構造解析の汎用プログラムを用いて行われてきた。しかしながら、その得られた近似解が信頼できるかどうかについては、いまだに吟味されないままである。

近似解の信頼性を確かめる方法としては、

- [1] 厳密解と比較する
- [2] 実験値と比較する
- [3] 他の近似解と比較する
- [4] 近似解の収束を調べる

方法が考えられる。

本報告では、直線はり要素を用いた折れ線近似解析の妥当性を、厳密解と近似解との比較（[1]に相当）により検証し、さらに、折れ線近似モデルの解が折れ線要素の数を増加させたときに厳密解に収束するかどうかを調べる（[4]に相当）により近似解の信頼性を検討した。付言すれば、前者は、直接的な誤差の評価という意味で有用であり、後者は、立体骨組構造解析の誘生する誤差（丸め誤差と離散化誤差）のうち、離散化誤差に注目して近似解の信頼性を評価した点に意義があると思われる。

2. 空間曲線ばりの折れ線近似解析

図1に示したようならせんの方程式は

$$x_1 = R \cos t, \quad (1.a)$$

$$x_2 = R \sin t, \quad (1.b)$$

$$x_3 = Rt \tan \phi \quad (1.c)$$

と表わされる。¹⁾ここに、Rは円柱の半径、 ϕ はピッチ

角、 τ はPQ'が x_3 軸の正の向きとなす角である。

そこで、曲線PQをらせんばりの骨組線と見做し、PQ曲線を折れ線で近似することを考える。

今、折れ線を構成し

こいる直線はり要素の要素座標系 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$

を図2のようにとれば、

要素座標系における変位 $\bar{u}^i$ と全体座標系における変位 u^i は次式で関係づけられる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^2 \\ \bar{u}^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

ここに、 $(\bar{})$ は要素座標系での値を示し、変換マトリックスの要素は

$$\lambda_1 = \frac{x_{1j} - x_{1i}}{\bar{l}}, \quad \mu_1 = \frac{x_{2j} - x_{2i}}{\bar{l}}, \quad \nu_1 = \frac{x_{3j} - x_{3i}}{\bar{l}}, \quad (3.a-c)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\mu_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, \quad \mu_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, \quad \nu_2 = 0, \quad (3.d-f)$$

$$\lambda_3 = \frac{-\nu_1 \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, \quad \mu_3 = \frac{-\mu_1 \nu_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}}, \quad \nu_3 = \sqrt{\lambda_1^2 + \mu_1^2}, \quad (3.g-i)$$

とかける。²⁾ただし、

$$\bar{l} = \sqrt{(x_{1j} - x_{1i})^2 + (x_{2j} - x_{2i})^2 + (x_{3j} - x_{3i})^2} \quad (4)$$

である。

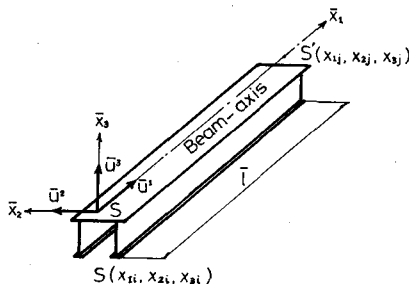


図2 直線はり要素

図2に示したような軸対称断面直線ばりの要素剛性マトリックス $\bar{K}$ は、薄肉直線ばりのつり合い式³⁾

$$E\bar{A}\bar{u}'' - E\bar{J}_3\bar{u}''' = 0, \quad (5.a)$$

$$E\bar{J}_{22}\bar{u}'''' = 0, \quad (5.b)$$

$$E\bar{J}_{33}\bar{u}'''' - E\bar{J}_3\bar{u}''' = 0, \quad (5.c)$$

$$E\bar{J}_{\omega\omega}\bar{\varphi}'''' - G\bar{J}_T\bar{\varphi}'' = 0, \quad (5.d)$$

を用いて、通常の方法により求めることかできる²⁾。

ここに、 $E\bar{A}$ ：軸剛性、 $\bar{J}_3$ ： $\bar{x}$ 軸回りの断面1次モーメント、 $E\bar{J}_{22}$ 、 $E\bar{J}_{33}$ ：曲げ剛性、 $E\bar{J}_{\omega\omega}$ ：曲げねじり剛性、 $G\bar{J}_T$ ：ねじり剛性であり、 $(\bar{x})$ は直線ばり要素の軸方向座標 $\bar{x}_1$ に関する微分を表す。

隣接要素に対して、節点力および節点変位の連続性を考慮し、全体座標系への座標変換を行う。このとき、全体座標系での節点力と節点変位に対する剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} F_{i-1} \\ F_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{i-1} \\ U_i \end{Bmatrix} \quad (6)$$

とかける。ここに、 F_i 、 U_i はそれぞれ

$$F_i = \{N_i, Q_{2i}, Q_{3i}, T_i, M_{2i}, M_{3i}, M_{\omega i}\}^T \quad (7.a)$$

$$U_i = \{u_i^1, u_i^2, u_i^3, \varphi_i, \theta_i^2, \theta_i^3, \varphi_i\}^T \quad (7.b)$$

であり、 K は座標変換マトリックス T を用いて、

$$\begin{bmatrix} .K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^T & 0 \\ 0 & T^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \quad (8)$$

と表わせる。ここに、 T は、薄肉断面部材であることを考慮すれば、

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & & & & \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & & 0 & & \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & & & 0 & \\ & & & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 & \\ & & & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 & \\ & & & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 & \\ 0 & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

とかける。

個々の要素剛性マトリックスを重ね合わせて、全体剛性マトリックスを作成する際、直線ばり要素の $\bar{x}$ 軸を常に x_1x_2 平面に平行になるように、座標変換を施した。その結果、近似的にではあるが、部材軸のねじり率が折れ線近似モデルに導入できた。

得られた全体剛性マトリックスを用いて、全体座標系における節点変位と節点力を求め、厳密解との比較を考え、それらをらせんばりの基準座標系(曲線座標系)での節点変位と節点力に変換した。

3. 折れ線近似のらせんばりの支配方程式への収束

本節では、離散化誤差との兼ね合いにおいて、折れ線近似による解析の信頼性を、折れ線近似モデルによる直接剛性方程式の薄肉らせんばりの支配方程式への収束により検討する。その概要は以下のようである。

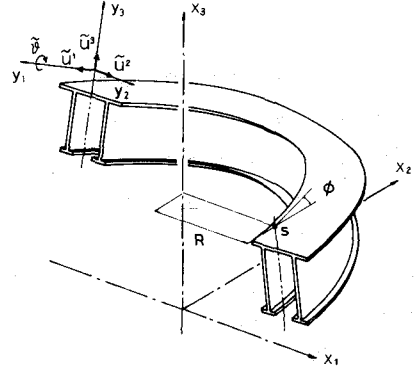


図3 薄肉らせんばりの全体図および座標系

薄肉らせんばりの基準座標系 (θ^1, y_2, y_3) に、折れ線近似モデルの節点力および節点変位を適合させるため、らせん部材軸方向の基準座標系 (θ^1, y_2, y_3) への座標変換を考える。基準座標系での節点力および節点変位に対する剛性方程式は、外力の作用していない節点を部材軸方向座標 θ^1 の原点にとれば、式(6)より、

$$\begin{Bmatrix} \tilde{F}(0) \\ \tilde{F}(\bar{l}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}(0) \\ \tilde{U}(\bar{l}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}(0) \\ \tilde{U}(\bar{l}) \end{Bmatrix} \quad (10)$$

とかける。ここに、 $\tilde{(\cdot)}$ は基準座標系での値を示し、 $\bar{l}$ は節点間の θ^1 軸に沿った部材長を示す。また、 $\tilde{F}$ 、 $\tilde{U}$ はそれぞれ、

$$\tilde{F} = \{ \tilde{N}, \tilde{Q}_2, \tilde{Q}_3, \tilde{T}, \tilde{M}_2, \tilde{M}_3, \tilde{M}_{\omega} \}^T, \quad (11.a)$$

$$\tilde{U} = \{ \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{\varphi}, -\tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3, \tilde{\varphi}_1 \}^T, \quad (11.b)$$

となる。ここに、 $(\cdot)_1$ は部材軸方向座標 θ^1 に関する微分を表す。また、 $\tilde{K}$ は、基準座標系へのすりつけを考慮し、座標変換マトリックス $\tilde{T}(\bar{l})$ を用いて、

$$\begin{bmatrix} \tilde{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{T}(\bar{l})^T & 0 \\ 0 & \tilde{T}(\bar{l})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{T}(\bar{l}) & 0 \\ 0 & \tilde{T}(\bar{l}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

と表わされる。⁴⁾さらに、式(12)中の座標変換マトリックス $\tilde{T}(\bar{l})$ は、全体座標系として基準座標系 (θ^1, y_2, y_3) をとり、要素座標系の $\bar{x}$ 軸とらせんばりの y_2 軸を一致させたとき、次のような形になる。

$$\tilde{\mathbf{T}}(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_3 & 0 & 0 \\ \tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\kappa}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\kappa}_2 & \tilde{\kappa}_1 & \tilde{\kappa}_3 \\ 0 & 0 & \tilde{\kappa}_3 & \tilde{\kappa}_3 & \tilde{\kappa}_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

したがって、原点を共有する隣接2要素より成る折れ線近似モデルの剛性方程式は、

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}(-\tilde{x}) \\ \tilde{\mathbf{F}}(0) \\ \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{x}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{11} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} & 0 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{K}}_{11} + \tilde{\mathbf{K}}_{22} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} \\ 0 & \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{K}}_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}(-\tilde{x}) \\ \tilde{\mathbf{U}}(0) \\ \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{x}) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

となる。原点に外力が作用していないことを考慮すれば、原点におけるフリ合い方程式は、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_{21} & \tilde{\mathbf{K}}_{11} + \tilde{\mathbf{K}}_{22} & \tilde{\mathbf{K}}_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}(-\tilde{x}) \\ \tilde{\mathbf{U}}(0) \\ \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{x}) \end{Bmatrix} \quad (15)$$

とかける。^{4), 5)}

そこで、原点に隣接する節点変位ベクトル $\tilde{\mathbf{U}}(\pm\tilde{x})$ 、要素剛性マトリックス $\tilde{\mathbf{K}}$ の要素、座標変換マトリックス $\tilde{\mathbf{T}}$ の要素をらせんばりの要素部材長 $\tilde{x}$ についてべき級数に展開し、式(15)に代入すると、 $\tilde{x}$ のべき乗の項に式が整理できる。極限として、分割要素数を無限大とすると、すなわち、 $\tilde{x}$ を無限小とすると、4個の独立したフリ合いの支配方程式が求まる。

以上のようにして得られた4個の支配方程式と薄肉らせんばりの支配方程式を比較すると、若干の差は認められるものの主要な項は一致しており、離散化誤差は小さいと判断できる。また、支配方程式の離散化誤差は $O(\tilde{x}^2)$ のオーダーであることも判明した。

4. 薄肉らせんばりの厳密解の誘導

離散化誤差が現実には小さいことを、厳密解との比較により確かめるため、厳密解の誘導を試みる。

薄肉らせんばりの変位成分表示のフリ合い式は、4元14階の連立定数係数微分方程式となる。⁶⁾ この微分方程式の解を求める際、一般には、代数方程式の根として特性根を求める方法が用いられているが、ここでは、特性根を固有値問題の固有値として求め、さらに、固有ベクトルを用いて、独立な変位成分の係数間の関係式を求める。⁷⁾

4元14階の微分方程式の余関数を

$$\tilde{\mathbf{U}}^2 = \tilde{\mathbf{A}} e^{\lambda \theta^1} \quad (16.a)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^3 = \tilde{\mathbf{B}} e^{\lambda \theta^1} \quad (16.b)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^4 = \tilde{\mathbf{C}} e^{\lambda \theta^1} \quad (16.c)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}^5 = \tilde{\mathbf{D}} e^{\lambda \theta^1} \quad (16.d)$$

とおけば、 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{C}}, \tilde{\mathbf{D}}$ に関する以下の4個の連立方程式が得られる。

$$p_1 \tilde{\mathbf{A}} + q_1 \tilde{\mathbf{B}} + r_1 \tilde{\mathbf{C}} + s_1 \tilde{\mathbf{D}} = 0; \quad (17.a)$$

$$p_2 \tilde{\mathbf{A}} + q_2 \tilde{\mathbf{B}} + r_2 \tilde{\mathbf{C}} + s_2 \tilde{\mathbf{D}} = 0; \quad (17.b)$$

$$p_3 \tilde{\mathbf{A}} + q_3 \tilde{\mathbf{B}} + r_3 \tilde{\mathbf{C}} + s_3 \tilde{\mathbf{D}} = 0; \quad (17.c)$$

$$p_4 \tilde{\mathbf{A}} + q_4 \tilde{\mathbf{B}} + r_4 \tilde{\mathbf{C}} + s_4 \tilde{\mathbf{D}} = 0; \quad (17.d)$$

ここに、係数 p_i, q_i, r_i, s_i ($i=1, \dots, 4$) は λ のべき乗を含む定数である。

一般に、 λ に関する代数方程式の根は、 $\tilde{\mathbf{A}} \sim \tilde{\mathbf{D}}$ が非自明解を持つ条件、すなわち、係数行列式が零になる条件より求めている。この手法を用いて、高次代数方程式を作成し、Newton-Raphson 法などの反復計算技法を利用して根を求める方法も考えられる。

ここでは、式(17)を固有値問題に変換して、代数方程式の根を求める。そのため、式(17)の係数に含まれる λ のべき乗の数に応じて、次式で定義される定数を導入する。

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{A}} \lambda, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{B}} \lambda, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{C}} \lambda, \quad (18.a-c)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{B}} \lambda, \quad \tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{F}} \lambda, \quad \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{F}} \lambda, \quad (18.d-f)$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \tilde{\mathbf{C}} \lambda, \quad (18.g)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{B}} \lambda, \quad \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{H}} \lambda, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \tilde{\mathbf{K}} \lambda. \quad (18.h-j)$$

式(18)の関係式を用いて、式(17)を書き直すと、次のような固有値方程式が得られる。

$$[\mathbf{A}]\{\tilde{\mathbf{X}}\} = \lambda\{\tilde{\mathbf{X}}\} \quad (19)$$

ここに、

$$\tilde{\mathbf{X}} = \{\tilde{\mathbf{A}}, \dots, \tilde{\mathbf{N}}\}^T \quad (20)$$

である。

したがって、特性根 λ は式(19)の固有値として求まり、独立な変位成分 $\tilde{\mathbf{U}}^1, \tilde{\mathbf{U}}^2, \tilde{\mathbf{U}}^3, \tilde{\mathbf{U}}^4$ の係数間の関係式は固有ベクトルを用いて求めることができる。⁷⁾ その結果、与えられた境界条件を満たす変位が厳密解として求まる。

5. 厳密解と近似解の比較

得られた厳密解を基礎に、図3に示したような軸対称薄肉T型断面を有する、部材長 $l=31.90\text{ m}$ 、平面曲線半径 $R=20\text{ m}$ 、ピッチ角 $\phi=6^\circ$ の両端固定らせんばり

を使用して、数値計算を行った。ここにT型断面の諸寸法としては、図4に示した値を用い、材料定数をヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ (206 GPa)、ポアソン比 $\nu = 0.30$ とした。

数値計算の結果、ここで用いた薄肉せんばりの断面定数は直線部材の値とほぼ一致すること、および、両端固定ばりの場合には10要素折れ線近似モデルで十分な近似解が得られることが分った。

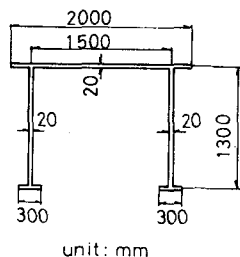


図4 T型断面の寸法

さらに、折れ線近似モデルの近似解と、薄肉せんばりの厳密解を、両端固定ばりの中央点のせん断中心Sに鉛直荷重1t(9.8 kN)を載荷させた場合について、比較した。その結果である変位 $\bar{u}_1^s$, $\bar{u}_2^s$, $\bar{u}_3^s$ のグラフを図5～7に示した。なお、図中の曲線は厳密解を、プロットは10要素折れ線近似モデルの近似解を表わしている。図から分るように、厳密解と近似解との間には良い一致が見られ、3節で述べた支配方程式の差異は、数値的に無視しうることが確かめられた。

6. あとがき

本報告では、立体骨組構造解析の手法を利用して薄肉空間曲線ばりを解析することの妥当性を、厳密解との比較および近似解の厳密解への収束状況を調べることにより検討した。

薄肉空間曲線ばりに対する折れ線近似解析の信頼性が確認された以上、固有値解析を利用して厳密解を求めるよりも、折れ線近似モデルを作り、それに立体骨組構造解析の手法を適用し、近似解を求める方が、電算機利用の立場からはすぐれていると思われる。その理由としては、折れ線近似モデルの採用により、

- i) 間違いがな
- ii) 理解し易い
- iii) 変更・修正ができる
- iv) 演算時間が短い

などの特長を持つ品質の良い立体骨組構造解析の汎用プログラムが使用でき、構造解析全体として、労力・時間・費用の無駄を省くことができると考えられる。

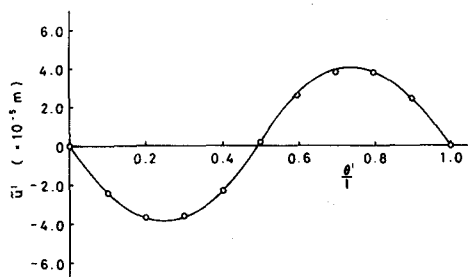


図5 集中荷重による y_1 方向変位 $\bar{u}_1^s$

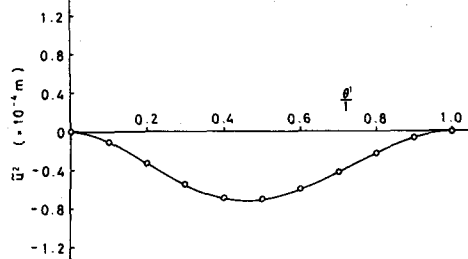


図6 集中荷重による y_2 方向変位 $\bar{u}_2^s$

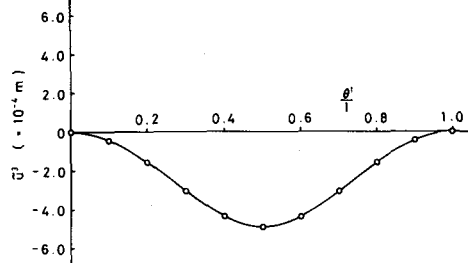


図7 集中荷重による y_3 方向変位 $\bar{u}_3^s$

なお、数値計算の実行に際しては、東京大学大型計算機センターのM-200Mを使用し、固有値問題の解と数値計算制プログラムライブラリーMSL IIのうち γ DEFIMを用いて求めた。

おわりに、有益な助言を頂いた東京電機大学助手井浦雅司博士に、謝意を表します。

参考文献

- 1) 安達忠次：微分幾何学概説，培風館，1976。
- 2) Weaver, W: 構造物解析のプログラム，共立出版，1976。
- 3) Vlasov, V.Z.: 薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967。
- 4) 上野・鈴木・西野：第26回構造工学シンポジウム講演論文集，1982。
- 5) 山本・山田：マトリックス構造解析の誤差論，培風館，1972。
- 6) 平嶋・恵谷：土木学会論文報告集，No. 281，1979.1。
- 7) 井浦雅司：日本建築学会大会学術講演梗概集，1981.9。