非線型連立方程式におけるニュートン法拡張の試み

福井工大　正員 ○和　田　久　範
共栄コンピューターサイエンス　和　田　敏　洋

1. はじめに

最近の数値計算では複雑な非線型の問題が多く取扱われているが、その解析については必らずしも容易でない面が残されているように思う。しかし、その中で非線型連立方程式の解に帰着されるものについては、多変数のニュートン法などを用いることにより一応解決される。

さてニュートン法は有力な方法ではあるが、周知のように第1近似値を求めることが難解であるため、利用する上で非常に不便である。この点については大域的収束性を持つ平野法など、いろいろ工夫された手法もあるがより一層単純化して利用し易いものにする必要があるように思う。

この為筆者は初期値の取り方を拡張し、任意の初期値（出発値）より出発する計算法を考えたのであるが、この方法を用いれば、単独方程式より連立方程式まで、一貫した手法により、実根および複素根を求めることができるので、ここにその一つの試案を提出する。

2. 単独方程式の実根

先ず単独方程式におけるニュートン法では $f(x)=0$ が解の近傍で微分可能ならば、適当な初期値より出発すれば、次式により更によい近似値が得られる。 $x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ 　ただし $f'(x)\neq 0$ 　この計算の反復による収束は速い。しかしここに提案する方法は適当な初期値が判明しない場合である。この場合任意の初期値（出発値）より、段階的にニュートン法を適用した近似解列を作ることにより、最終段階で正しい解に漸近させる方法が考えられる。これを具体的にいえば、任意の初期値（出発値）x_0 を与えると一般には $f(x_0)\neq 0$、ここで残差を r とし $f(x_0)=r$ とおく。次に $r\to 0$ に導くために中間に方程式を導入する。いま簡単のために r を等分割した値 Δr を定めると $N=\frac{r}{\Delta r}$ の中間方程式を解くことになる。この方程式の根は相互に接近しているので、順次にニュートン法で解く場合、1つ前の方程式の根をその次の方程式の初期値とすることができる。従ってその解列の最終のものが $f(x)=0$ の近似解になる。

プログラムは次の手順により構成する。$f(x)=0$ 　初期値（出発値）$=x_0$ 　$f(x_0)=r$ 　漸近の刻み Δr、回数 $N=\frac{r}{\Delta r}$ 　ベクトル列 $\{R_k\}$ $(k=1,2,\cdots\cdots N)$ において $R_1=r+\Delta r$, $R_N=0$, $R_k=(N-k)\Delta r$ とする。次に中間の方程式 $f_k(x)=f(x)-R_k$ をつくり、これをニュートン法で解く。その解列を $\{x_k\}$ とすれば、N 回目が $f(x)=0$ の近似解になる。

以上は常数項による漸近法であるが、係数の変化による漸近法も考えられる。次の例(1)では、この2つの方法による解を載せたので参照されたい。

例(1) $2x^7-7x^6+10x^5-4x^4+9x^3-30x^2+34x-24=0$ 　（実根は $x=1.5$ のみ）

〔常数項を変化させる方法〕

$x_0=5$ 　$f(1)=-10$ 　$r=-10$ 　$N=5$ とする解は(a)　左の数字は漸近回数である。

〔x の係数を変化させる方法〕

$x_0=2$ 　$f(2)=60$ 　$r=60=mx_0$ $(m=30)$

例(1)のプログラム

```
10 X#=5#
20 F#=2#*X#^7#-7#*X#^6#+10#*X#^5#-4#*X#^
4#+9#*X#^3#-30#*X#^2#+34#*X#-24#
30 PRINT "f=";F#
40 R#=F#
50 INPUT"ゼンキン カイスウ";N
60 DR#=(-R#)/N
70 LL=1
80 FOR K=1 TO N
90 R#=R#+DR#
100 L=0
110 L=L+1:PRINT L:IF L>20 THEN 170
120 RF#=2#*X#^7#-7#*X#^6#+10#*X#^5#-4#*X
#^4#+9#*X#^3#-30#*X#^2#+34#*X#-24#-R#
130 DF#=14#*X#^6#-42#*X#^5#+50#*X#^4#-16
#*X#^3#+27#*X#^2#-60#*X#+34#
140 X#=X#-RF#/DF#
150 PRINT L;"     ";X#;"                    "
160 IF ABS (RF#/DF#)/X#>1E-07 THEN 110 E
LSE IF ABS (RF#)>1E-05 THEN 110 ELSE 170
170 LPRINT LL;"     ";X#;"                  "
180 LL=LL+1
190 NEXT K
```

（解）倍精度の計算結果は右表のとおり。

(a)

1	4.857190616552783
2	4.679455957213278
3	4.440592624345093
4	4.061599182616043
5	1.500000000700635

(b)

2	1.981014656267099
4	2
6	1.981014736492295
8	1.9610291425889
10	1.939928170390725
12	1.917578547005615
14	1.893817983587693
16	1.868455877613912
18	1.841257906243789
20	1.811937149467556
22	1.780137229271621
24	1.745409189224623
26	1.70717565573963
28	1.66468769439786
30	1.616955073789462
32	1.56265221536209
34	1.499997766593732

$f(x_0)=mx_0$ を $f(x_0)=0$ に $N=15$ で漸近させる解は (b) 左の数字は x の係数の変化を表わす。

3。連立方程式の実根

連立方程式の場合にも前節と同様にニュートン法を拡張することができる。

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots\cdots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1,x_2\ \cdots\cdots x_n) \end{pmatrix}=0$$

において連続2回微分可能とし、

$$J=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

とする。

1変数における場合の導関数 $f'(x)$ に代り，ヤコビ行列Jを用いると $\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_i-J^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ 但し $J^{-1}\neq 0$ により更によい近似値が得られる。しかし、多変数の場合には、才1近似値を求めることが極めて困難であるため、この計算の反復によって解を得ることはほとんど不可能である。ここに提案する方法は、任意の初期値（出発値）より順次解に漸近させるように中間に方程式を導入し、その近似解列によって最終的に原式の解に到達させるもので、その考え方は前節の単独方程式の場合と同様であるから省略する。ただ連立方程式では漸近回数が多くなると全体の計算量は膨大なものになる。従って初期値（出発値）を任意に取るとしても限界がある。又刻み巾についても理論的には小さい方がよいが、実際にはそれができない。計算途中でヤコビ行列が非正則に近い状態になることも考えられ、その場合は誤差の介入によってオーバフローし計算ができなくなる。これは1元連立方程式の解法に関する問題になるが、枢軸に選ぶべき要素が桁落ちにより、すべての絶対値が小さくなった時などに生ずる現象である。このようにニュートン法では、ヤコビ行列を連続して解く中で問題は生ずるが、この方面の専門的研究が進んでいるので、十分解決されるものと考えている。

次の例 (2) ではプログラムを載せたが、この問題では逆行列によらないで、補正量を直接掃き出し法で求めた。その手順は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3)&=0 \\ f_2(x_1,x_2,x_3)&=0 \\ f_3(x_1,x_2,x_3)&=0 \end{aligned}\right\}$$

において $\mathbf{f}=0$ が連続2回微分可能であり、かつヤコビ行列が正則であれば i 回目の

計算は

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(i)}{\partial x_1(i)} & \frac{\partial f_1(i)}{\partial x_2(i)} & \frac{\partial f_1(i)}{\partial x_3(i)} \\ \frac{\partial f_2(i)}{\partial x_1(i)} & \frac{\partial f_2(i)}{\partial x_2(i)} & \frac{\partial f_2(i)}{\partial x_3(i)} \\ \frac{\partial f_3(i)}{\partial x_1(i)} & \frac{\partial f_3(i)}{\partial x_2(i)} & \frac{\partial f_3(i)}{\partial x_3(i)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_1(i) \\ \Delta x_2(i) \\ \Delta x_3(i) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -f_1(i) \\ -f_2(i) \\ -f_3(i) \end{pmatrix}$$

これを掃出し法により補正量 $\Delta x_1(i)$，$\Delta x_2(i)$、$\Delta x_3(i)$ を求めると、才 $i+1$ 回目の値は

$$x_1(i+1)=x_1(i)+\Delta x_1(i)$$

$$x_2(i+1)=x_2(i)+\Delta x_2(i)$$

例(2)のプログラム

```
20 DIM X(10,10)
30 X1=10:X2=10:X3=10
40 F1=X1*X1*X1-X1-21.6*X1*X2+2.1*X1*X3*X
3-11.7*X2*X2*X3-450.1
50 F2=X2*X2*X2+5.3*X2+13.1*X1*X2-1.3*X1*
X3+2.4*X3-596.4
60 F3=X3*X3-2.1*X3-21.6*X1*X1*X1-5.3*X1-
1.8*X1*X2+160.1
70 PRINT"f=";F1;"g=";F2;"h=";F3:PRINT
80 X1=10:X2=10:X3=10
90 INPUT "ｾﾞﾝｷﾝ ｶｲｽｳ ";N
100 D1=-F1/N:R1=F1
110 D2=-F2/N:R2=F2
120 D3=-F3/N:R3=F3
130 LL=1
140 FOR R1=R1+D1 TO 0 STEP D1
150 FOR R2=R2+D2 TO 0 STEP D2
160 FOR R3=R3+D3 TO 0 STEP D3
170 FOR L=1 TO 20
180 F(1)=X1*X1*X1-X1-21.6*X1*X2+2.1*X1*X
3*X3-11.7*X2*X2*X3-450.1-R1
190 F(2)=X2*X2*X2+5.3*X2+13.1*X1*X2-1.3*
X1*X3+2.4*X3-596.4-R2
200 F(3)=X3*X3-2.1*X3-21.6*X1*X1*X1-5.3*
X1-1.8*X1*X2+160.1-R3
210 X(1,1)=3*X1*X1-1-21.6*X2+2.1*X3*X3
220 X(1,2)=-2.16*X1-23.4*X2*X3
230 X(1,3)=4.2*X1*X3-11.7*X2*X2
240 X(2,1)=13.1*X2-1.3*X3
250 X(2,2)=3*X2*X2+5.3+13.1*X1
260 X(2,3)=-1.3*X1+2.4
270 X(3,1)=-64.8*X1*X1-5.3-1.8*X2
280 X(3,2)=-1.8*X1
290 X(3,3)=2*X3-2.1
300 X(1,4)=-F(1)
310 X(2,4)=-F(2)
320 X(3,4)=-F(3)
330 FOR I=1 TO 3
340 XX=X(I,I)
350 FOR J=1 TO 4
360 X(I,J)=X(I,J)/XX
370 NEXT J
380 FOR J=1 TO 3
390 IF I=J THEN 440
400 YY=X(J,I)
410 FOR K=1 TO 4
420 X(J,K)=X(J,K)-X(I,K)*YY
430 NEXT K
440 NEXT J
450 NEXT I
460 X1=X1+X(1,4)
470 X2=X2+X(2,4)
480 X3=X3+X(3,4)
490 PRINT"d1=";X(1,4);"d2=";X(2,4);"d3="
;X(3,4)
500 IFABS((X(1,4))/X1)>1E-04 THEN 510 EL
SE IFABS((X(2,4))/X2)>1E-04 THEN 510 ELS
E IFABS((X(3,4))/X3)>1E-04 THEN 510 ELSE
520
510 NEXT L
520 F(1)=X1*X1*X1-X1-21.6*X1*X2+2.1*X1*X
3*X3-11.7*X2*X2*X3-450.1-R1
530 F(2)=X2*X2*X2+5.3*X2+13.1*X1*X2-1.3*
X1*X3+2.4*X3-596.4-R2
540 F(3)=X3*X3-2.1*X3-21.6*X1*X1*X1-5.3*
X1-1.8*X1*X2+160.1-R3
550 LPRINT LL;"  ";"x1=";X1;"x2=";X2;"x3
="X3
560 LPRINT "f1=";F(1);"f2=";F(2);"f3=";F
(3)
570 LL=LL+1
580 NEXT R1,R2,R3
```

$x_{3(i+1)} = x_{3(i)} + \Delta x_{3(i)}$ となるので、この計算を反復すれば解に収束する。

例(2)
$$f_1 \equiv x_1^3 - x_1 - 21.6x_1x_2 + 2.1x_1x_3^2 - 11.7x_1^2x_3 - 450.1 = 0$$
$$f_2 \equiv x_2^3 + 5.3x_2 + 13.1x_1x_2 - 1.3x_1x_3 + 2.4x_3 - 596.4 = 0$$
$$f_3 \equiv x_3^2 - 2.1x_3 - 21.6x_1^3 - 5.3x_1 - 1.8x_1x_2 + 160.1 = 0$$

例(3)
$$f_1 \equiv x_1^{10} - 1.2x_2^9 + 1.4x_3^8 - 1.6x_4^7 + 1.8x_5^6 - 2x_6^5 + 2.2x_7^4 - 2.4x_8^3 - 2.8 = 0$$
$$f_2 \equiv x_2^9 - 2x_3^8 + 2.2x_4^7 - 2.4x_5^6 + 2.6x_6^5 - 2.8x_7^4 + 3x_8^3 - 3.2x_1^2 + 9 = 0$$
$$f_3 \equiv x_3^8 - 1.1x_4^7 + 3x_5^6 - 3.2x_6^5 + 3.4x_7^4 - 3.6x_8^3 + 3.8x_1^2 - 4x_2 - 5.7 = 0$$
$$f_4 \equiv x_4^7 - 1.3x_5^6 + 2.1x_6^5 - 4x_7^4 + 4.2x_8^3 - 4.4x_1^2 + 4.6x_2 - 4.8x_3^8 + 28 = 0$$
$$f_5 \equiv x_5^6 - 1.5x_6^5 + 2.3x_7^4 - 3.1x_8^3 + 5x_1^2 - 5.2x_2 + 5.4x_3^8 - 5.6x_4^7 - 27 = 0$$
$$f_6 \equiv x_6^5 - 1.7x_7^4 + 2.5x_8^3 - 3.3x_1^2 + 4.1x_2 - 6x_3^8 + 6.2x_4^7 - 6.4x_5^6 + 30 = 0$$
$$f_7 \equiv x_7^4 - 1.9x_8^3 + 2.7x_1^2 - 3.5x_2 + 4.3x_3^8 - 5.1x_4^7 + 7x_5^6 - 7.2x_6^5 + 2 = 0$$
$$f_8 \equiv x_8^3 - 2.1x_1^2 + 2.9x_2 - 3.7x_3^8 + 4.5x_4^7 - 5.3x_5^6 + 6.1x_6^5 - 8x_7^4 + 18 = 0$$

4. 複素根の計算

複素根を求めるには、$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と極形式で表わし、ドモアブルの定理を用いて実数部と虚数部にわければ、r と θ を未知数とする連立方程式となるので、これを前節の方法で解く。この場合、単独方程式では最初に求めた根で組立除法を行えば、順次他の根も求め得るが連立方程式ではそれができないので、初期値（出発値）を変えて試算すればよいと思う。ただ、その方程式に実根がある場合は、$\theta = 0$ となり、実根が求まることがある。$\theta = 0$ より脱出しない場合は、例(4) に示したように $g(r,\theta)$ を用いないで、$g(r,\theta)/r\sin\theta$ を用いるとよい結果になる。又共役根を求めるには、$\theta + \pi$ を初期値として試算すれば計算は速い。

例(4) $Z^6 - 2Z^5 + 2Z^4 + Z^3 + 6Z^2 - 6Z + 8 = 0$

$$(Z^2 - 3Z + 4)(Z^2 + 2Z + 2)(Z^2 - Z + 1) = 0$$

$Z = r(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ とおいて次の2式をつくる。

［実数部］ $f(r,\theta) = r^6\cos 6\theta - 2r^5\cos 5\theta + 2r^4\cos 4\theta + r^3\cos 3\theta + 6r^2\cos 2\theta - 6r\cos\theta + 8 = 0$

［虚数部］ $g(r,\theta) = r^6\sin 6\theta - 2r^5\sin 5\theta + 2r^4\sin 4\theta + r^3\sin 3\theta + 6r^2\sin 2\theta - 6r\sin\theta = 0$ ------(a)

又は $g(r,\theta)/r\sin\theta$ を用いる。----(b)

例(2)の計算結果 初期値 $x_1 = x_2 = x_3 = 10$

```
 1    x1= 9.2844 x2= 9.36221 x3= 8.69015
f1= 0 f2=-1.2207E-04 f3= 0
 2    x1= 8.43755 x2= 8.66131 x3= 7.03164

f1=-4.88281E-04 f2= 2.44141E-04 f3= 9.76
563E-04
 3    x1= 7.37579 x2= 7.89082 x3= 4.86003

f1= 0 f2= 0 f3= 0
 4    x1= 5.87165 x2= 7.08709 x3= 1.9363
f1= 0 f2=-1.2207E-04 f3= 4.88281E-04
 5    x1= 1.82113 x2= 7.27122 x3=-1.17466

f1=-3.05176E-05 f2= 0 f3= 0
```

例(3)の計算結果 初期値 $(x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 1)$

```
カイスウ 1
x1=  1.05006 x2=   .991583 x3=  1.00103 x
4=  1.00619 x5=  1.00396 x6=  1.00173 x7
=
 .995025 x8=  1.03699
g1=  2.14577E-06 g2= -1.43051E-06 g3=  9
.53674E-07 G4=  0 G5=  0 G6=  0 G7=  0 G
8=
-9.53674E-07
カイスウ 2
x1=  1.0456 x2=  1.08732 x3=  1.07979 x4
=   .961052 x5=   .967863 x6=  1.10533 x7=

 1.0987 x8=   .830346
g1=  0 g2= -3.33786E-06 g3=  3.33786E-06
 G4= -1.90735E-06 G5= -1.90735E-06 G6=
 3.8147E-06 G7= -2.98023E-06 G8= -6.6757
2E-06
カイスウ 3
x1=  1.02254 x2=  1.13596 x3=  1.13154 x
4=   .900908 x5=   .923872 x6=  1.18058 x7
=
 1.17657 x8=   .386153
g1= -2.5034E-06 g2=  2.86102E-06 g3= -1.
43051E-06 G4=  3.8147E-06 G5=
-4.76837E-06 G6=  6.67572E-06 G7= -1.025
2E-05 G8=  2.38419E-06
カイスウ 4
x1=  1.01339 x2=  1.17056 x3=  1.17063 x
4=   .799427 x5=   .865608 x6=  1.24046 x7
=
 1.24142 x8= -.769758
g1=  3.05991E-06 g2= -7.51019E-06 g3=  8
.58307E-06 G4=  4.29153E-06 G5=
-1.28203E-05 G6=  1.57356E-05 G7= -1.311
3E-06 G8= -1.43051E-05
カイスウ 5
x1=  .983642 x2=  1.19803 x3=  1.20223 x
4= -.68839 x5=   .774456 x6=  1.29853 x7=

 1.29749 x8= -.994588
g1= -5.126E-06 g2= -2.38419E-07 g3=  4.7
6837E-06 G4= -1.90735E-05 G5=
 1.81198E-05 G6= -2.28882E-05 G7=  1.716
41E-05 G8= -2.0504E-05
```

例(4)のプログラム 初期値 R=0.5 T=0.5

```
10 R=.5:T=.5
20 F1=R^6*COS(6*T)-2*R^5*COS(5*T)+2*R^4*
COS(4*T)+R^3*COS(3*T)+6*R^2*COS(2*T)-6*R
*COS(T)+8
30 G1=R^6*SIN(6*T)-2*R^5*SIN(5*T)+2*R^4*
SIN(4*T)+R^3*SIN(3*T)+6*R^2*SIN(2*T)-6*R
*SIN(T)
40 PRINT"f(r,t)=";F1;"g(r,t)=";G1:PRINT"
"
50 INPUT"セツンキン カイスウ ";N
60 D1=-F1/N:R1=F1
70 D2=-G1/N:R2=G1
80 FOR LL=1TO N
90 R1=R1+D1
100 R2=R2+D2
110 FOR L=1TO20
120 F(1)=R^6*COS(6*T)-2*R^5*COS(5*T)+2*R
^4*COS(4*T)+R^3*COS(3*T)+6*R^2*COS(2*T)-
6*R*COS(T)+8-R1
130 G(1)=R^6*SIN(6*T)-2*R^5*SIN(5*T)+2*R
^4*SIN(4*T)+R^3*SIN(3*T)+6*R^2*SIN(2*T)-
6*R*SIN(T)-R2
140 A1=6*R^5*COS(6*T)-10*R^4*COS(5*T)+8*
R^3*COS(4*T)+3*R^2*COS(3*T)+12*R*COS(2*T
)-6*COS(T)
150 A2=-6*R^6*SIN(6*T)+10*R^5*SIN(5*T)-8
*R^4*SIN(4*T)-3*R^3*SIN(3*T)-12*R^2*SIN(
2*T)+6*R*SIN(T)
160 B1=6*R*5*SIN(6*T)-10*R^4*SIN(5*T)+8*
R^3*SIN(4*T)+3*R^2*SIN(3*T)+12*R*SIN(2*T
)-6*SIN(T)
170 B2=6*R^6*COS(6*T)-10*R^5*COS(5*T)+8*
R^4*COS(4*T)+3*R^3*COS(3*T)+12*R^2*COS(2
*T)-6*R*COS(T)
180 C0=A1*B2-B1*A2
190 C1=F(1)*B2-A2*G(1)
200 C2=A1*G(1)-F(1)*B1
210 R=R-C1/C0
220 T=T-C2/C0
230 PRINT L; "r=";R;"t=";T
240 IF ABS(C1/C0)>1E-04 THEN 250 ELSE IF
 ABS(C2/C0)>1E-04 THEN 250 ELSE 260
250 NEXTL
260 F(1)=R^6*COS(6*T)-2*R^5*COS(5*T)+2*R
^4*COS(4*T)+R^3*COS(3*T)+6*R^2*COS(2*T)-
6*R*COS(T)+8-R1
270 G(1)=R^6*SIN(6*T)-2*R^5*SIN(5*T)+2*R
^4*SIN(4*T)+R^3*SIN(3*T)+6*R^2*SIN(2*T)-
6*R*SIN(T)-R2
280 LPRINT LL; "r=";R;"t=";T
290 LPRINT"f=";F(1);"g=";G(1)
300 NEXT LL
```

(a)式の計算

```
 1 r=-.578294 t= 4.03639
f= .135451 g=-.682999
 2 r= 3.54943 t=-2.60902
f=-3104.82 g= 712.65
 3 r= 1.38705 t=-2.33304
f=-2.86102E-06 g= 3.81039E-04
 4 r= 1.40055 t=-2.34533
f=-5.84126E-06 g= 2.29858E-04
 5 r= 1.41421 t=-2.3562
f= 8.34465E-06 g= 1.06811E-04
```

(解) $Z = 1.41421(\cos(-2.3562) + i\sin(-2.3562))$

例(5)　$\begin{cases} Z_1^3 + Z_1^3 Z_2^3 - Z_2^3 - 1 = 0 \\ Z_1^3 Z_2 + Z_1 + Z_1 Z_2^3 - Z_2 = 0 \end{cases}$

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$　$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ とおいて、次の4つの方程式から $r_1, \theta_1, r_2, \theta_2$ を求める。

$$f_1 \equiv r_1^3\cos 3\theta_1 + r_1^3 r_2^3\cos(3\theta_1 + 3\theta_2) - r_2^3\cos 3\theta_2 - 1 = 0$$

$$g_1 \equiv r_1^3\sin 3\theta_1 + r_1^3 r_2^3\sin(3\theta_1 + 3\theta_2) - r_2^3\sin 3\theta_2 = 0$$

$$f_2 \equiv r_1^3 r_2\cos(3\theta_1 + \theta_2) + r_1\cos\theta_1 + r_1 r_2^3\cos(\theta_1 + 3\theta_2) - r_2\cos\theta_2 = 0$$

$$g_2 \equiv r_1^3 r_2\sin(3\theta_1 + \theta_2) + r_1\sin\theta_1 + r_1 r_2^3\sin(\theta_1 + 3\theta_2) - r_2\sin\theta_2 = 0$$

5. おわりに

この提案の目的は大域的収束性をもつニュートン法にあるが、この方面の研究は最近非常に進んでいるので、筆者の考えた初期値を拡張する方法は必らずしも新しい手法と言えないかも知れない。また、この提案の完成には、まだ解決しなければならない問題が残されているので、更に研究を要すると思う。その(1)は本文で指摘したように、初期値が解より遠く離れた場合に漸近回数が大となり、多大の計算時間を要することである。(2)はこの方法で解を得たとしても、3元以上の連立方程式では、組立除法のような減次の方法ができないため、その根以外の根を得ることが困難なことである。(3)は計算の途中でヤコビ行列が非正則に近い状態になる場合に決定的対策がないことである。このうち(2)については或る区間内の根を全部求めることは困難ではあるが、例5のように初期値(出発値)をいろいろ変えて試算する方法がよいと思う。その場合使用する電算機は、経費面で言えば方程式が小規模(例題の程度)のものであれば、マイコンを数台同時に使用して能率よく処理することも考えられる。(3)については非正則に近い状態になる前の段階に戻り、刻み巾を変えて反復計算する方法、または例(1)に述べたように係数の変化による漸近法を用いることなどにより部分的に解決する方法も考えられるが、よりよい方法はなお今後の課題として残される。

本提案は単独方程式から連立方程式まで、同じ手法を用いることを特色とするが、単独方程式については、ニュートン法のみで、ほとんどの問題は解けるのでこれは適しない。この方法を多変数の連立方程式の解法に利用されることを期待するものである。

〔参考文献〕

数理科学、8、1981「ニュートン法の新しい登場」 サイエンス社

例(4)の(b)式の計算　初期値 $r=0.5$ $t=0.5$

```
r= .5 t= .5
f(R,T)= 0 G(R,T)= 0
r= .582618 t= .691782
f(R,T)=-4.76837E-07 G(R,T)= 8.49366E-07
r= .654049 t= .795199
f(R,T)= 0 G(R,T)=-1.16229E-06
r= .717485 t= .86307
f(R,T)=-4.76837E-07 G(R,T)=-1.2666E-06
r= .774771 t= .912212
f(R,T)= 4.76837E-07 G(R,T)= 5.36442E-07
r= .82709 t= .950108
f(R,T)= 9.53674E-07 G(R,T)=-4.84288E-08
r= .875255 t= .980678
f(R,T)=-1.43051E-06 G(R,T)= 3.20375E-07
r= .91385 t= 1.00619
f(R,T)=-9.53674E-07 G(R,T)= 2.12155E-06
r= .961318 t= 1.02806
f(R,T)=-4.17233E-07 G(R,T)= 2.01538E-06
r= 1 t= 1.0472
f(R,T)=-1.3113E-06 G(R,T)=-9.51812E-07
```

(解) $Z = \cos(1.0472) + i\sin(1.0472)$
共役根は初期値を変えることにより求められる

例(5)の計算結果　初期値 $\begin{pmatrix} r_1 = r_2 = 2 \\ t_1 = t_2 = 1 \end{pmatrix}$

```
カイスウ 1
r1= 1.77915 r2= 2.11738 t1= 1.09385 t
2= .92558
f1= 6.86646E-05 g1= -3.24249E-05 f2= -1
.90735E-05 g2= -9.53674E-06
カイスウ 2
r1= 1.73159 r2= 2.08498 t1= 1.18469 t
2= .857496
f1= 3.05176E-05 g1= 9.53674E-06 f2= -3
.8147E-06 g2= -9.53674E-06
カイスウ 3
r1= 1.69348 r2= 2.03802 t1= 1.25378 t
2= .807196
f1= 3.8147E-06 g1= -1.04904E-05 f2= -2.
86102E-06 g2= 0
カイスウ 4
r1= 1.65523 r2= 1.98212 t1= 1.31596 t
2= .763345
f1= -3.8[illegible]
0735E-06 g2= 0
カイスウ 5
r1= 1.61429 r2= 1.9161 t1= 1.37639 t2
= .722404
f1= 0 g1= -4.76837E-06 f2= -2.86102E-06
 g2= 0
カイスウ 6
r1= 1.56854 r2= 1.83654 t1= 1.4[illegible] X
2= .682606
f1= -1.33514E-05 g1= 2.14577E-05 f2= 9
.53674E-07 g2= 2.86102E-06
カイスウ 7
r1= 1.515 r2= 1.73672 t1= 1.50571 t2=
 .642952
f1= -5.72205E-06 g1= 5.72205E-06 f2= 3
.33786E-06 g2= 1.43051E-06
カイスウ 8
r1= 1.44779 r2= 1.60202 t1= 1.58411 t
2= .603653
f1= -1.90735E-06 g1= -1.19209E-06 f2= 2
.86102E-06 g2= -1.43051E-06
カイスウ 9
r1= 1.35008 r2= 1.39015 t1= 1.68853 t
2= .573807
f1= -1.43051E-06 g1= -4.76837E-07 f2= 1
.19209E-06 g2= 1.19209E-06
カイスウ 10
r1= 1.00031 r2= .999762 t1= 2.09394 t
2= 1.0467
f1= 0 g1= -4.88944E-09 f2= -1.78814E-07
 g2= -1.19209E-07
```

(解) $Z_1 = 1.00031\{\cos(2.09394) + i\sin(2.09394)\}$

$Z_2 = 0.999762\{\cos(1.0467) + i\sin(1.0467)\}$

この他の根も初期値を変えることにより求められる