

一次元空間曲線部材の非線形数値計算に関する一考察

日本鉄道建設公団
早稲田大学理工学部 正員
早稲田大学理工学部 正員

○小島 宗隆
平嶋 政治
依田 照彦

1. まえがき

近年、立地条件の制約から、土木構造物に初期曲率と初期接率を有する部材、いわゆる空間曲線部材が多く使われるようになってきた。材料・施工技術などの進歩に伴い、空間曲線部材の使用は今後増加すると思われる。しかしながら、空間曲線部材の力学的挙動に関する理論解析および数値解析は少なく、任意の初期曲率と初期接率を有する一次元空間曲線部材の非線形解析はほとんど見られないのが現状である¹⁾

本報告では、一次元空間曲線部材の非線形問題を Hellinger-Reissner の変分原理に基づく混合形有限要素法を用いて定式化し、Newton-Raphson 法を用いて非線形連立方程式の解を求めた。その際、電算機で利用した計算手法に若干の工夫をこらしたので、その点について報告する。具体的に述べれば、混合形有限要素の要素内近似関数として一次関数(直線近似)を用い、エネルギーに関する汎関数を未知量(節点変位と節点力)のべき級数表示の多項式で表示し、多項式の各項の定数係数を、線形解を得るとき必要となる二次項の係数については二次元配列を利用し、さらに非線形解を得るとき必要となる三次項の係数については三次元配列を利用して電算機に記憶させ、配列の引数を有効に利用することにより変分演算を機械的に行い、Newton-Raphson法における偏微分計算も同様の考え方で計算機に行わせ、べき級数表示の特徴を生かした計算方法を試みた。この手法によれば、汎関数が定義されており、要素内近似関数がべき級数で表現されておりさえすれば、三次以上の高次の非線形問題の解析も可能となり、電算機の容量を節約でき、計算時間を短縮することができる。

2. 定式化

Hellinger-Reissner の汎関数 Π_R は

$$\Pi_R = \iiint_V \{ \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - B(\sigma_{ij}) - P_i U^i \} dV - \iint_{S_0} \bar{P}_i U^i dS - \iint_{S_u} \bar{T}_i (U^i - \bar{U}^i) dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

(i=1,2,3)

と表わされる²⁾。一次元問題であることを考慮し、コンプライメンタリーエネルギー関数 $B(\sigma_{ij})$ を応カテンソル σ_{ij} を用いて

$$B(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2E} (\sigma_{11})^2 + \frac{1}{2G} (\sigma_{12})^2 \quad (E: \text{ヤング率}, G: \text{せん断弾性係数}) \quad \dots\dots\dots (2)$$

と表わし、任意点の変位 U^i を局所直交座標系 (y_1, y_2, y_3) と部材軸に関する変位成分 (v^1, v^2, v^3) と回転角 ϑ を用い、

$$U^1 = v^1 - y_2 (v^2_{,1} + \vartheta v^3_{,1}) - y_3 (v^2_{,1} - \vartheta v^3_{,1}) - \omega (y_1 - \frac{1}{2} x_1 [(v^2_{,1})^2 + (v^3_{,1})^2] + x_2 v^2_{,1} + x_3 v^3_{,1}), \dots\dots\dots (3a)$$

$$U^2 = v^2 - y_2 \frac{\vartheta^2}{2} - y_3 \vartheta, \dots\dots\dots (3b)$$

$$U^3 = v^3 + y_2 \vartheta - y_3 \frac{\vartheta^2}{2}, \dots\dots\dots (3c)$$

(ω: ねり関数, x₁: 初期接率, x₂, x₃: 初期曲率)

とおき、任意点のひずみテンソル ϵ_{ij} を v^1, v^2, v^3, ϑ で表わす。さらに、物体力として P_i を与え、境界条件として S_0 上で表面力 \bar{P}_i を、 S_u 上で規定された変位 \bar{U}^i と与えれば、Lagrange の乗数 T_i を含む Hellinger-Reissner の汎関数 Π_R は、応カテンソル σ_{ij} の積分値である断面力 $(N, M_2, M_3, H\omega, Z, M_p, T)$ 、部材軸に関する変位成分 $(v^1, v^2, v^3, \vartheta)$ 、および外力 $(物体力 P_i と表面力 \bar{P}_i の積分値) で表わすことができる。詳細は文$

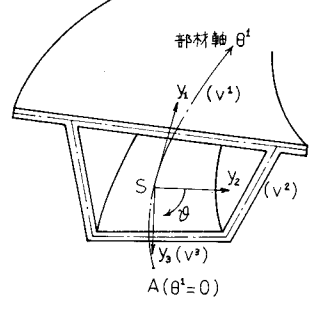


図-1 空間曲線部材

献1)を参照してほしい。

今、要素内の変位成分と断面力と節点変位・節点力を未知量として一次関数でそれぞれ

$$v^i(s) = (v_R^i - v_L^i)s + v_L^i; \quad (i=1, 2, 3), \quad \dots\dots\dots(4.a,b,c)$$

$$\vartheta(s) = (v_R - v_L)s + v_L, \quad \dots\dots\dots(4.d)$$

$$N(s) = (N_R - N_L)s + N_L, \quad M_2(s) = (M_{2R} - M_{2L})s + M_{2L}, \quad \dots\dots(4.e,f)$$

$$M_3(s) = (M_{3R} - M_{3L})s + M_{3L}, \quad H_w(s) = (H_{wR} - H_{wL})s + H_{wL}, \quad \dots\dots(4.g,h)$$

$$Z(s) = (Z_R - Z_L)s + Z_L, \quad M_p(s) = (M_{pR} - M_{pL})s + M_{pL}, \quad \dots\dots(4.i,j)$$

$$T(s) = (T_R - T_L)s + T_L, \quad (0 \leq s \leq 1) \quad \dots\dots\dots(4.k)$$

と表示し、節点外力を与えれば、汎関数 Π_R は節点変位と節点力を未知量とするべき級数表示の多項式で表わされる。ただし、本報告では、未知量に関する四次以上の項は無視し、最低次の非線形問題に限定している。

汎関数 Π_R の停留条件より、節点変位と節点力を未知量とする非線形連立方程式が求まるわけであるが、ここでは、直接汎関数 Π_R の多項式を用い、陽な形で要素マトリックスを作ることなく、非線形連立方程式の $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i=1, 2, \dots, n$) の値を n 個求めた。すなわち、まず汎関数の未知量に関する二次項の係数を二次元配列で記憶させ、次に未知量に関する三次項の係数を三次元配列で記憶させ、外力項を除く f_i の値を二次元配列と三次元配列を利用して順に求めた。この操作の中には汎関数の変分演算が必然的に含まれることになる。図-3 に $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の値を一次元配列 F に読み込むプログラムを示した。

さらに、非線形連立方程式を解く手法としては、Newton-Raphson法が一般的であり、本報告においてもNewton-Raphson法を用いたが、非線形連立方程式を作成する際に利用した配列の引数とそのまま使用して、 $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の線形項と非線形項の偏微分計算を順次機械的に行った点に特徴がある。偏微分 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, n$) の値を二次元配列 DFA に読み込むプログラムは図-4 に示してある。

非線形解は、 DFA と F による n 元連立方程式に Gauss の消去法を用いて増分量 Δx_i を求め、収束するまで反復計算を繰返すことにより求まる。

以上が数値計算までの概要であるが、参考のため、非線形数値計算全体の流し図を図-2 に、Newton-Raphson法による数値計算の流し図を図-5 に、それぞれ示した。

3. 数値計算例

数値計算は、図-6 に示すような矩形断面 ($b=2\text{cm}$, $t=0.3\text{cm}$) を持つ部材について行い、部材形状としては、直線部材、平面円弧部材、与えられせん部材を取り上げ、部材軸線長 $l=100\text{cm}$ 、ヤング率 $E=2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ は一定とした。

i) 直線部材の場合

境界条件にかかわらず、部材を4要素に分割すれば、線形解は厳密解と

MAIN PROGRAM

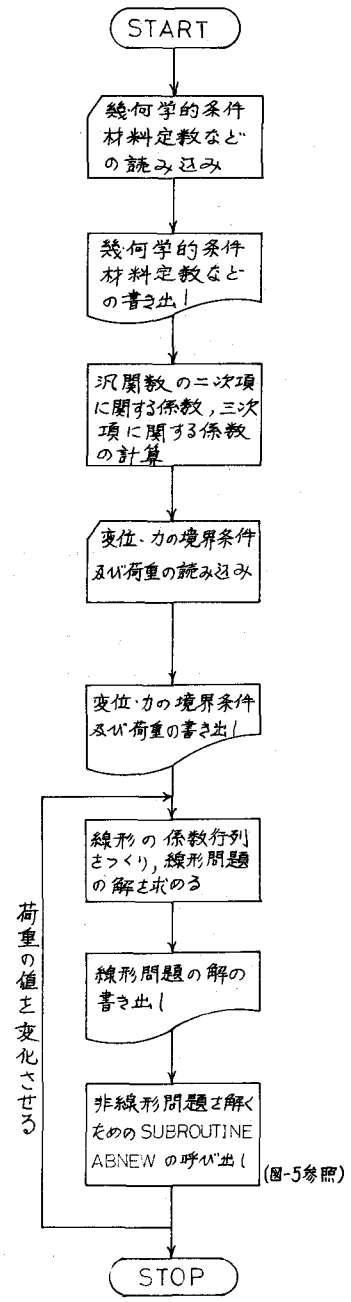


図-2 プログラム全体の流し図

```

DO 50 I=1,N,N
50 F(I)=S0
DO 500 M=1,N
DO 500 I=1,18
II=I-11+11*M
DO 500 J=I,22
JJ=J-11+11*M
F(II)=F(II)+A(J,I)*XX(JJ)
500 F(JJ)=F(JJ)+A(J,I)*XX(II)
DO 610 M=1,N
DO 610 I=1,14
IF(I-7)580,580,590
580 II=I-11+11*M
GO TO 585
590 II=I-7+11*M
585 CONTINUE
DO 610 J=1,8
IF(J-4)700,700,710
700 JJ=J-4+11*M
GO TO 705
710 JJ=J+3+11*M
705 CONTINUE
DO 610 K=J,8
IF(K-4)720,720,730
720 KK=K-4+11*M
GO TO 725
730 KK=K+3+11*M
725 CONTINUE
F(II)=F(II)+B(I,J,K)*XX(JJ)*XX(KK)
F(JJ)=F(JJ)+B(I,J,K)*XX(II)*XX(KK)
610 F(KK)=F(KK)+B(I,J,K)*XX(II)*XX(JJ)

```

図-3 $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ の値を一次元配列 F に読み込むプログラム

```

DO 80 J=1,N,N
DO 80 I=1,N,N
80 DFA(I,J)=S0
DO 551 M=1,N
DO 551 I=1,18
II=I-11+11*M
DO 551 J=I,22
JJ=J-11+11*M
DFA(II,JJ)=DFA(II,JJ)+A(J,I)
551 DFA(JJ,II)=DFA(JJ,II)+A(J,I)
DO 670 M=1,N
DO 670 I=1,14
IF(I-7)780,780,790
780 II=I-11+11*M
GO TO 785
790 II=I-7+11*M
785 CONTINUE
DO 670 J=1,8
IF(J-4)800,800,810
800 JJ=J-4+11*M
GO TO 805
810 JJ=J+3+11*M
805 CONTINUE
DO 670 K=J,8
IF(K-4)820,820,830
820 KK=K-4+11*M
GO TO 825
830 KK=K+3+11*M
825 CONTINUE
DFA(II,JJ)=DFA(II,JJ)+B(I,J,K)*XX(KK)
DFA(II,KK)=DFA(II,KK)+B(I,J,K)*XX(JJ)
DFA(JJ,II)=DFA(JJ,II)+B(I,J,K)*XX(KK)
DFA(JJ,KK)=DFA(JJ,KK)+B(I,J,K)*XX(II)
DFA(KK,II)=DFA(KK,II)+B(I,J,K)*XX(JJ)
670 DFA(KK,JJ)=DFA(KK,JJ)+B(I,J,K)*XX(II)

```

図-4 偏微分 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ の値を二次元配列 DFA に読み込むプログラム

SUBROUTINE ABNEW

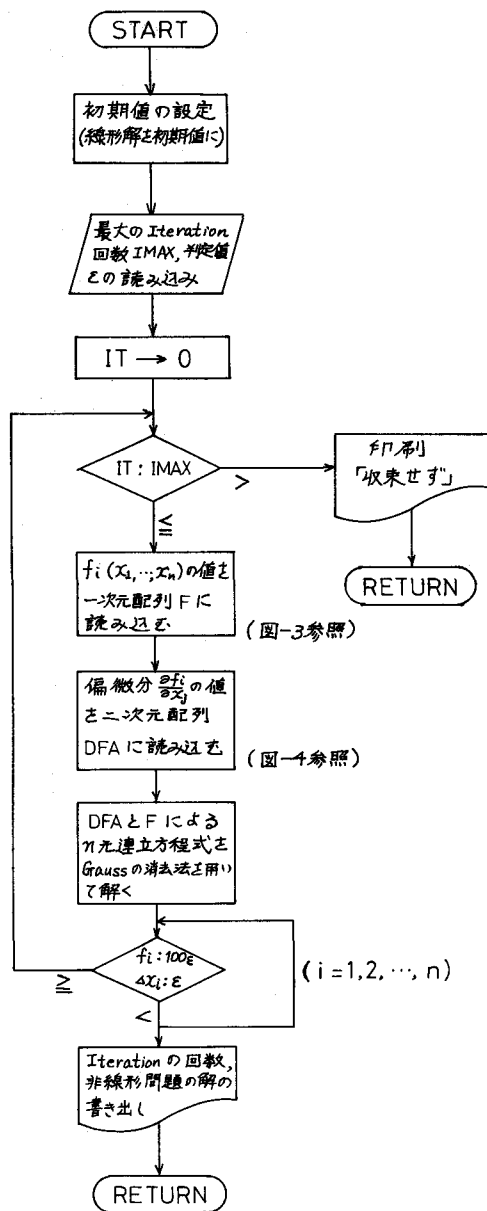


図-5 Newton-Raphson 法の流氷図

有効数字3桁まで一致しており、4要素分割で十分と考え、非線形数値計算と実施した。その結果、線形解を初期値とした場合、非線形解を得るまでの反復計算回数は2~4回であった。非線形挙動の様子を横倒れ座屈問題との関連において図示したものが、図-7である。図-7から分かるように、自由端に一定の面外荷重 $P_3 (=0.1 \text{ kg})$ を作用させ、面内荷重 P_2 を増加させたとときの面外変位 v^3 と回転角 β は、 P_2 が横倒れ座屈荷重に近づくに従い、急激に大きくなる。

ii) 平面円弧部材 (曲率半径 $r_0 = 100 \text{ cm}$, 開角 $\alpha = 1 \text{ rad.}$) の場合
 4要素の分割では断面力に若干の誤差が見られるので、6分割で計算を行った。収束状況は直線部材の場合と同様であった。計算例として、 y 方向に等分布荷重 q を受ける両端固定円弧部材を取り上げ、換座屈現象と関連させるべく、面外荷重 P_2 と中央に載荷し、 $q r_0 / P_3 = 240$ (一定) として、非線形挙動を調べた。(図-8)

iii) S せん部材 (初期曲率 $K_0 = 0.01 \text{ cm}^{-1}$, 初期撓率 $K_1 = 0.001 \text{ cm}^{-1}$) の場合

線形解の妥当性は、R. H. Shell に関する実験結果と数値計算結果と比較することにより確かめた。6要素分割で非線形挙動を調べた結果、図-9に示したように、自由端に面内荷重 P_2 を作用させた場合、面外変位 v^3 と回転角 β に顕著な非線形性が観察された。

全体を通じて、ここで示した数値計算法は、要素分割数も少なく済み、Newton-Raphson法による反復計算の回数も少ない。その上、三次以上の高次項を無視した最低次の非線形解析でも座屈荷重付近までの非線形計算が可能であることが分る。なお、数値計算は東京大学大型計算機センターの HITAC 8800/8700 を利用して行った。

4. あとがき

本報告では、一次元空間曲線部材の非線形数値解析において、エネルギー原理に基づく混合形有限要素法を用いた点と要素近似関数にべき級関数(一次関数)を用いた点に着目し、電算機の配列の引数を有効に利用することにより最低次の非線形方程式と比較的小さな容量で短時間で解く手法を示したが、さらに高次の非線形方程式も同様の手法で解くことかできると考えられる。

参考文献

- 1) 平嶋・井浦・依田: 土木学会論文報告集, No. 292, 1979年12月。
- 2) Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 1975.
- 3) Timoshenko, S.: Theory of Elastic Stability, 1936.
- 4) 土生・平嶋・井浦: 第7回関東支部年次研究発表会, 1980年1月16日。

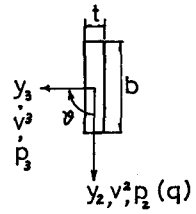


図-6 部材の横断面

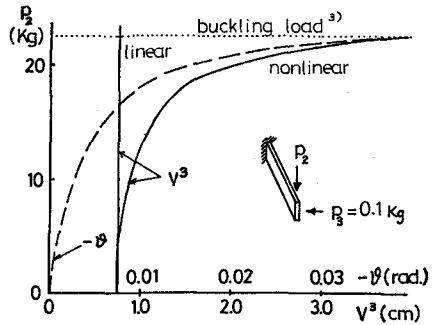


図-7 直線部材の非線形計算(4要素)

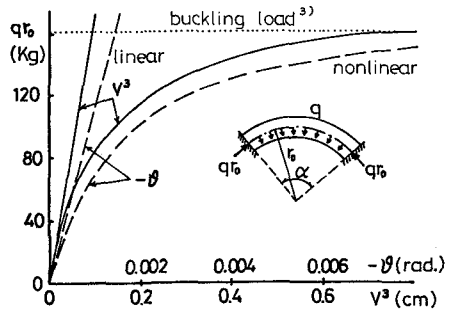


図-8 平面円弧部材の非線形計算(6要素)

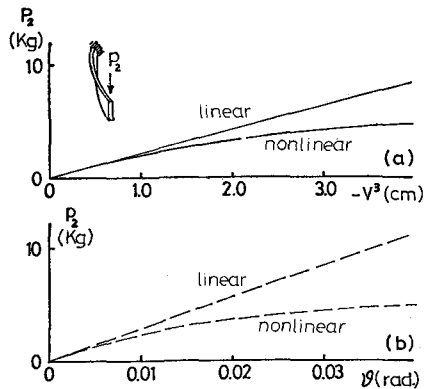


図-9 Sせん部材の非線形計算(6要素)