非線形代数方程式の簡易数値解法

福井工大 正員 ○和田久範
武生工高 正員 滝沢信之
科学技術高校 多門喜伊知
京大数理研 三井斌友

1、はじめに

単独非線形方程式の実根を求める方法は、十分に研究されているとはいえ、なお基本的な多くの問題が残されている。その解法を大別すると、初期値より出発して高い精度で根に収束させる方法と、初期値なしに、すべての根を低い精度で求める方法にわけられるが、単独で万能であるといわれるものはなく、幾つかの方法を組合わせたプログラムにしたものが多用される現状にある。さてここに提案するものは三角関数の週期性および、展開式の収束性を利用して根を求める特殊な方法で、方程式の解法としては全く別の側面より見た試みである。それも単なる試案にすぎないが、以上の意味において、他の解法の補助的手段として用いられることを期待してここに提案する。

2、数値計算の考え方と方法

この解法の考え方は高次方程式の実根を、それより低い方程式の反復計算によって求めようとする試みである。

実係数方程式 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$

において、xを三角関数におき換えて$f(x)$を変換する。その1つは $x=r\sin\theta$ とする方法であり、その2は $x=r\cos\theta$ とする方法で r を固定し、θを助変数として考える。

(1) $x=r\sin\theta$ とする場合

$$f(\theta)=a_0r^n\sin^n\theta+a_1r^{n-1}\sin^{n-1}\theta+\cdots\cdots+a_{n-1}r\sin\theta+a_n=0$$

$f(\theta)$において $\sin\theta$ のべきをフーリエ展開を用いて次のように変換する。

n; 偶数 $F(\theta)=A_0\cos n\theta+A_1\sin(n-1)\theta+\cdots\cdots+A_{n-2}\cos 2\theta+A_{n-1}\sin\theta+A_n=0$

n; 奇数 $F(\theta)=A_0\sin n\theta+A_1\cos(n-1)\theta+\cdots\cdots+A_{n-2}\cos 2\theta+A_{n-1}\sin\theta+A_n=0$

上式の係数 $A_0, A_1, A_2\cdots\cdots A_n$ は参考資料(1)によって容易に求められる。次に三角関数はテーラ展開して必要な項数を計算に用いる。

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\cdots(-1)^{n-1}\frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos\theta=1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^5}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\cdots(-1)^n\frac{\theta^{2n}}{(2n)!}$$

以上によって$F(\theta)$の計算は係数$A_0, A_1, A_2\cdots\cdots A_n$に展開式を乗ずればよいことになる。又$F(\theta)$は$r$実数の任意半径について常に$|\theta|<\infty$で収束する。但し、$|\theta|$が大きいと収束は遅くかつ精度が低下するので$|r|$を大きくすることにより$|\theta|$を小さく押える方がよいので、いま$|n\theta|\leqq\frac{\pi}{2}$に制限する場合を考えてみる。

さて代数学の知識を借りれば、実根の存在する区間の上限と下限を知ることは容易である。その絶対値の大きい方を$|x_1|$とすれば$|r\sin\theta|\geqq x_1$ $|n\theta|=\frac{\pi}{2}$とおいて$|r|\geqq\dfrac{|x_1|}{\sin\frac{\pi}{2n}}$を得る。

この条件をみたすことができれば収束の精度は非常によい。しかし、$|r|$を大きくすれば各係数の桁数が増大し、有効桁数の不足を生ずることになるのでこの制限が無理になるであろう。特に次数nの大きい方程式では困難である。この場合$|n\theta|>\frac{\pi}{2}$を含めた一般角の計算法が必要になるが、その方法は三角関数には週期性があるのですべての角を$\frac{\pi}{2}$より小さい角に修正して計算に用いるのである。

次に具体的に計算法を述べる。（ここではnの偶数の場合について説明し、奇数の場合を省略する）

$$F(\theta)=A_0\cos n\theta+A_1\sin(n-1)\theta+\cdots\cdots A_{n-2}\cos 2\theta+A_{n-1}\sin\theta+A_n=0$$

$F(\theta)$ の各項は次のようになる。

$A_0\cos n\theta = A_0\left\{1-\frac{(n\theta)^2}{2}+\frac{(n\theta)^4}{24}-\frac{(n\theta)^6}{720}\cdots\cdots\right\}$

$A_1\sin(n-1)\theta = A_1\left\{(n-1)\theta-\frac{\{(n-1)\theta\}^3}{6}+\frac{\{(n-1)\theta\}^5}{120}-\frac{\{(n-1)\theta\}^7}{5040}\cdots\right\}$

$\vdots$

$A_{n-2}\cos 2\theta = A_{n-2}\left\{1-\frac{(2\theta)^2}{2}+\frac{(2\theta)^4}{24}-\frac{(2\theta)^6}{720}\cdots\cdots\right\}$

$A_{n-1}\sin\theta = A_{n-1}\left\{\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}-\frac{\theta^7}{5040}\cdots\cdots\right\}$

$A_n = A_n$　　以上をまとめると

第1項 $A_0 + A_1(n-1)\theta + \cdots\cdots + A_{n-2} + A_{n-1}\theta + A_n$

第2項 $A_0\frac{(n\theta)^2}{2}+A_1\frac{\{(n-1)\theta\}^3}{6}+\cdots\cdots+A_{n-2}\frac{(2\theta)^2}{2}+A_{n-1}\frac{\theta^3}{6}$

第3項 $A_0\frac{(n\theta)^4}{24}+A_1\frac{\{(n-1)\theta\}^5}{120}+\cdots\cdots+A_{n-2}\frac{(2\theta)^4}{24}+A_{n-1}\frac{\theta^5}{120}$

第4項 $A_0\frac{(n\theta)^6}{720}+A_1\frac{\{(n-1)\theta\}^7}{5040}+\cdots\cdots+A_{n-2}\frac{(2\theta)^6}{720}+A_{n-1}\frac{\theta^7}{5040}$

$\vdots$

次に $r>|x_1|$, $F(\theta)=0$ とおいて計算を開始する

(i) 出発値θ_0の計算

第1項を0とおくと $\theta_0=\frac{-\{A_0+A_2+A_4+\cdots\cdots+A_n\}}{A_1(n-1)+A_3(n-3)+\cdots\cdots+A_{n-1}}$　ここに $A_0+A_2+A_4+\cdots\cdots+A_n\equiv a_n$

$A_1(n-1)+A_3(n-3)+\cdots\cdots+A_{n-1}\equiv r a_{n-1}$　$\therefore\ \theta_0=\frac{-a_n}{r a_{n-1}}$

(ii) 第2回以降のθの計算

第2項以下の式にθ_0を代入してその値を計算し δ_0, δ', δ''……等とすれば次の式により補正される。

$\theta_1=\frac{-\{a_n-\delta_0+\delta_0'-\delta_0''+\cdots\cdots\}}{r a_{n-1}}$　一般には $\theta_i=\frac{-\{a_n-\delta_{i-1}+\delta'_{i-1}-\delta''_{i-1}+\cdots\cdots\}}{r a_{n-1}}$ で示される。

又この計算による収束は遅いので次の方法で加速することもできる。

$\theta_0=\frac{-a_n}{r a_{n-1}}$　$D=-\delta+\delta'-\delta''+\cdots\cdots$ とおくと

$\theta_i=\frac{-\{a_n+D_{i-1}\}}{r a_{n-1}}$

$$\begin{cases}\delta=\frac{\theta^2}{2}\{A_0n^2+A_2(n-2)^2+A_4(n-4)^2+\cdots\}+\frac{\theta^3}{6}\{A_1(n-1)^3+A_3(n-3)^3+\cdots\}\\ \delta'=\frac{\theta^4}{24}\{A_0n^4+A_2(n-2)^4+A_4(n-4)^4+\cdots\}+\frac{\theta^5}{120}\{A_1(n-1)^5+A_3(n-3)^5+\cdots\}\\ \delta''=\frac{\theta^6}{720}\{A_0n^6+A_2(n-2)^6+A_4(n-4)^6+\cdots\}+\frac{\theta^7}{5040}\{A_1(n-1)^7+A_3(n-3)^7+\cdots\}\end{cases}$$

収束率 $\nu=\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{\theta_{i-1}}$　(一般角では $\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\sin\theta_{i-1}}$)

$\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$ とおいて次の式で加速する。kは加速係数で収束率に応じて変化させる方がよい。

$\theta_i'=\theta_i+k\,\Delta\theta_i$　加速後の収束率 $\nu'=\frac{\theta_i'-\theta_{i-1}'}{\theta_{i-1}'}$　(一般角では $\frac{\sin\theta_i'-\sin\theta_{i-1}'}{\sin\theta_{i-1}'}$)

(iii) 収束の判定

以上の計算を反復すれば逐次収束するので、その判定値としてεをとれば $\left|\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{\theta_{i-1}}\right|<\varepsilon$ (一般角では $\frac{\sin\theta_i-\sin\theta_{i-1}}{\sin\theta_{i-1}}<\varepsilon$) になるときこの計算は終る。そのとき $x=r\sin\theta_i$ が根である。この方法ではrは正根に対して+、負根に対して−、とするが、共に絶対値の最小の根に収束する。

例 (1) $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-5x+2=0$ の実根を求める(根 1, 2)

$x=r\sin\theta$ として $F(\theta)=A_0\cos4\theta+A_1\sin3\theta+A_2\cos2\theta+A_3\sin\theta+A_4=0$

$A_0=\frac{r^4a_0}{8}=1250$　但し $r=10$　　$\cos4\theta=1-\frac{(4\theta)^2}{2}+\frac{(4\theta)^4}{24}-\frac{(4\theta)^6}{720}\cdots$

$A_1=-\frac{r^3a_1}{4}=1000$　　$\sin3\theta=3\theta-\frac{(3\theta)^3}{6}+\frac{(3\theta)^5}{120}-\frac{(3\theta)^7}{5040}\cdots$

$A_2=-\left\{\frac{4r^4a_0}{8}+\frac{r^2a_2}{2}\right\}=-5300$　　$\cos2\theta=1-\frac{(2\theta)^2}{2}+\frac{(2\theta)^4}{24}-\frac{(2\theta)^6}{720}\cdots$

$A_3=\frac{3r^3a_1}{4}+ra_3=-3050$　　$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}-\frac{\theta^7}{5040}\cdots$

$A_4=\frac{3r^4a_0}{8}+\frac{r^2a_2}{2}+a_4=4052$

$\theta_0=\frac{-a_4}{ra_3}=\frac{2}{50}$　　$\delta'=(4.57286\theta)^5+(9.94962\theta)^4$

$\theta_i=\frac{2-\delta+\delta'-\delta''}{50}$　　$\delta''=(4.33539\theta)^6+(2.38061\theta)^7$

$\delta=(15.862979\theta)^3-(24.49489742\theta)^2$　計算結果表(a)

第2の根を求めるため組立除法をした次の式を解く

$f(x)=x^3-3x^2+3x-2=0$

$F(\theta)=A_0\sin3\theta+A_1\cos2\theta+A_2\sin\theta+A_3=0$

$A_0=-\frac{r^3a_0}{4}=-250$　但し $r=10$

$A_1=-\frac{r^2a_1}{2}=150$　　$\sin3\theta=3\theta-\frac{(3\theta)^3}{6}+\frac{(3\theta)^5}{120}$

$A_2=\frac{3r^3a_0}{4}+ra_2=780$　　$\cos2\theta=1-\frac{(2\theta)^2}{2}+\frac{(2\theta)^4}{24}$

$A_3=-\frac{ra_1}{2}+a_3=-152$　　$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}$

$\theta_0=\frac{2}{30}$　漸化式 $\theta_i=\frac{2+\delta_{i-1}-\delta'_{i-1}}{30}$　$\delta=300\theta^2-995\theta^3$, $\delta'=100\theta^4-500\theta^5$　計算結果表(b)

表(a)

	(ν)	(θ_{i-1})	(θ_i)	(δ)	(δ')	(δ'')
1	0.518659	0.040000	0.060424	-0.784533	0.025293	0.000027
2	0.233322	0.060424	0.074547	-1.310330	0.172338	0.000325
3	0.128848	0.074547	0.084092	-1.630730	0.307260	0.001145
4	0.074235	0.084092	0.090335	-1.869220	0.498467	0.002361
5	0.043774	0.090335	0.094289	-1.953719	0.664624	0.003630
6	0.025235	0.094289	0.096725	-1.968160	0.789489	0.004695
7	0.015143	0.096725	0.098190	-2.001250	0.874727	0.005472
8	0.008725	0.098190	0.099063	-2.005350	0.929219	0.005989
9	0.005025	0.099063	0.099551	-2.007570	0.962469	0.006312
10	0.002731	0.099551	0.099833	-2.008100	0.982061	0.006505
11	0.001563	0.099833	0.099989	-2.008090	0.993286	0.006616
12	0.000853	0.099989	0.100075	-2.008330	0.999665	0.006679
13	0.000454	0.100075	0.100120	-2.008350	1.003000	0.006713
14	0.000226	0.100120	0.100144	-2.008360	1.004830	0.006732
15	0.000119	0.100144	0.100156	-2.008360	1.005730	0.006741
16	0.000059	0.100156	0.100161	-2.008360	1.006260	0.006745
17	0.000027	0.100161	0.100164	-2.008360	1.006500	0.006748
18	0.000011	0.100164	0.100165	-2.008360	1.006610	0.006749
19	0.000004	0.100165	0.100166	-2.008360	1.006660	0.006750
20	0.000001	0.100166	0.100166	-2.008360	1.006630	0.006750
21	0.000000	0.100166	0.100166	-2.008360	1.006680	0.006750

NEC PC-8001

```
190 LPRINT CHR$(157)
195 LPRINT DATE$
200 TIME$="00:00:00"
210 T0=.04:DD=0:TT=0
220 I=0
230 T=T0:K=0
240 GOSUB 430
250 T3=TH*15.863
260 T5=TH*4.57286
270 T7=TH*2.38061
280 I=I+1
290 T=T0:K=1
300 GOSUB 430
310 T2=TH*24.4949
320 T4=TH*9.94962
330 T6=TH*4.33539
340 D1=T3*T3*T3-T2*T2
350 D2=T5*T5*T5*T5*T5+T4*T4*T4*T4
360 D3=T6*T6*T6*T6*T6*T6+T7*T7*T7*T7*T7*
T7*T7
370 D0=-D1+D2-D3
380 DT=D0-DD
381 T1=(2+DD+1.4*DT)/50
383 TT=(T1-T0)/T0
400 LPRINT USING "###  ##.######   ##.##
####   ##.######   ##.######   ##.######
   ##.######";I;TT;T0;T1;D1;D2;D3
410 T0=T1:DD=D0
420 IF ABS(TT)>1E-07 THEN 230 ELSE T$=TI
ME$:LPRINT T$:STOP
430 IF K=0 THEN 440 ELSE 490
440 P=INT(T/6.28319)
450 TA=T-P*6.28319
460 IF TA>3.14159 THEN IF TA>3.14159*3/2
 THEN TH=SGN(T)*(-(3.14159*2-TA)) ELSE T
H=SGN(T)*(-(TA-3.14159))
470 IF TA<=3.14159 THEN IF TA>3.1159/2TH
EN TH=SGN(T)*(3.14159-TA) ELSE TH=SGN(T)
*TA
480 RETURN
490 P=INT(T/6.28319)
500 TA=T-P*6.28319
510 IF TA>3.14159 THEN IF TA>3.14159*3/2
 THEN TH=SGN(T)*(3.14159*2-TA) ELSE TH=S
GN(T)*(-(TA-3.14159))
520 IF TA<=3.14159 THEN IF TA>3.14159/2
THEN TH=SGN(T)*(-(3.14159 -TA)) ELSE TH=
SGN(T)*TA
530 RETURN
```

表(b)

	(ν)	(θ_{i-1})	(θ_i)	(δ)	(δ')
1	0.51860E+00	0.66667E-01	0.10124E+00	0.10385E+01	0.13169E-02
2	0.32925E+00	0.10124E+00	0.13457E+00	0.20424E+01	0.51875E-02
3	0.23782E+00	0.13457E+00	0.16658E+00	0.30061E+01	0.10729E-01
4	0.14310E+00	0.16658E+00	0.19042E+00	0.37253E+01	0.12867E-01
5	0.50605E-01	0.19042E+00	0.20005E+00	0.40078E+01	0.63002E-02
6	0.64196E-02	0.20005E+00	0.20134E+00	0.40400E+01	-0.41157E-04
7	0.21493E-03	0.20134E+00	0.20138E+00	0.40403E+01	-0.10974E-02
8	0.44397E-05	0.20138E+00	0.20138E+00	0.40403E+01	-0.11339E-02

$x_1=10\sin0.100166$
$=0.99999$

$x_2=10\sin0.20138$
$=2.00022$

例 (2) $f(x)=x^8-36x^7+546x^6-4356x^5+22449x^4-67284x^3+118124x^2-109584x+40320=0$

の実根のうち 0〜10 までの区間にあるものを $x=r\sin\theta$ および $x=r\cos\theta$ と置いて根を求める。

$x=r\sin\theta$ とする場合 $F(\theta)=A_0\cos 8\theta+A_1\sin 7\theta$

$+A_2\cos 6\theta+A_3\sin 5\theta+A_4\cos 4\theta+A_5\sin 3\theta+A_6\cos 2\theta$

$+A_7\sin\theta+A_8=0$ $r=10$ とする

$A_0=\dfrac{r^8a_0}{128}=0.078125\times10^7$

$A_1=-\dfrac{r^7a_1}{64}=0.5625\times10^7$

$A_2=-\left\{\dfrac{8r^8a_0}{128}+\dfrac{r^6a_2}{32}\right\}=-2.33125\times10^7$

$A_3=\left\{\dfrac{7r^7a_1}{64}+\dfrac{r^5a_3}{16}\right\}=-6.7725\times10^7$

$A_4=\left\{\dfrac{28r^8a_0}{128}+\dfrac{6r^6a_2}{32}+\dfrac{r^4a_4}{8}\right\}=15.231125\times10^7$

$A_5=-\left\{\dfrac{21r^7a_1}{64}+\dfrac{5r^5a_3}{16}+\dfrac{r^3a_5}{4}\right\}=27.6696\times10^7$

$A_6=-\left\{\dfrac{56r^8a_0}{128}+\dfrac{15r^6a_2}{32}+\dfrac{4r^4a_4}{8}+\dfrac{r^2a_6}{2}\right\}=-41.78387\times10^7$

$A_7=\left\{\dfrac{35r^7a_1}{64}+\dfrac{10r^5a_3}{16}+\dfrac{3r^3a_5}{4}+ra_7\right\}=-53.193384\times10^7$

$A_8=\left\{\dfrac{35r^8a_0}{128}+\dfrac{10r^6a_2}{32}+\dfrac{3r^4a_4}{8}+\dfrac{r^2a_6}{2}+a_8\right\}=28.809902\times10^7$

$\cos 8\theta=1-\dfrac{(8\theta)^2}{2}+\dfrac{(8\theta)^4}{24}-\dfrac{(8\theta)^6}{720}$

$\sin 7\theta=7\theta-\dfrac{(7\theta)^3}{6}+\dfrac{(7\theta)^5}{120}-\dfrac{(7\theta)^7}{5040}$

$\cos 6\theta=1-\dfrac{(6\theta)^2}{2}+\dfrac{(6\theta)^4}{24}-\dfrac{(6\theta)^6}{720}$

$\sin 5\theta=5\theta-\dfrac{(5\theta)^3}{6}+\dfrac{(5\theta)^5}{120}-\dfrac{(5\theta)^7}{5040}$

$\cos 4\theta=1-\dfrac{(4\theta)^2}{2}+\dfrac{(4\theta)^4}{24}-\dfrac{(4\theta)^6}{720}$

$\sin 3\theta=3\theta-\dfrac{(3\theta)^3}{6}+\dfrac{(3\theta)^5}{120}-\dfrac{(3\theta)^7}{5040}$

$\cos 2\theta=1-\dfrac{(2\theta)^2}{2}+\dfrac{(2\theta)^4}{24}-\dfrac{(2\theta)^6}{720}$

$\sin\theta=\theta-\dfrac{(3\theta)^3}{6}+\dfrac{(3\theta)^5}{120}-\dfrac{(3\theta)^7}{5040}$

$\theta_0=\dfrac{40320}{1095840}=0.0368$

漸化式 $\theta_i=\dfrac{40320-\delta_{i-1}+\delta'_{i-1}-\delta''_{i-1}}{1095840}$ $\Delta\theta_i=\theta_i-\theta_{i-1}$

$\theta'_i=\theta_i+k\Delta\theta_i$

$\delta=(406.36001\theta)^3-(3436.917223\theta)^2$

$\delta'=(121.86472\theta)^4-(53.04483\theta)^5$

$\delta''=-(27.108603\theta)^6-(10.098622\theta)^7$

計算結果は右表のとおり $x_1=r\sin\theta=10\sin 0.100225$
$=1.00057$

$x=r\cos\theta$ とする場合 $F(\theta)=A_0\cos 8\theta+A_1\cos 7\theta$

$+A_2\cos 6\theta+A_3\cos 5\theta+A_4\cos 4\theta+A_5\cos 3\theta+A_6\cos 2\theta$

$+A_7\cos\theta+A_8=0$ $r_0=10$ とする

$A_0=0.078125\times10^7$ $P(\theta_0)=2.8964568\theta^6-1.300164\theta^4$

$A_1=-0.5625\times10^7$ $+0.331848\theta^2-0.036258=0$

$A_2=2.33125\times10^7$ $\theta=0.4379662$ $r_1=r_0\cos\theta=9.05616$

$A_3=-6.7725\times10^7$ $P(\theta_1)=6.5312925\theta^6-2.433100\theta^4$

$A_4=15.231125\times10^7$ $+0.431270\theta^2-0.0403198=0$

$A_5=-27.6696\times10^7$ $\theta=0.4431271$, $r_2=r_1\cos\theta=8.13073$

$A_6=41.78387\times10^7$ $P(\theta_2)=1.1140159\theta^6-0.289767\theta^4$

$A_7=-53.193384\times10^7$ $+0.0035578\theta^2-0.0007521=0$

$A_8=28.809902\times10^7$ $\theta=0.16978378$, $r_3=r_2\cos\theta=7.98353$

次に $r_3=8.0$ とおけば $\Sigma A=0$, $\theta=0$ 解 $x_1=r\cos\theta=8.0$

```
150 '***                              ***
160 '***         NEC PC-8001          ***
170 '***            WAD232            ***
180 '************************************
190 LPRINT CHR$(157)
195 LPRINT DATE$
200 TIME$="00:00:00"
210 DEFDBL T,D
220 T0=.0368#
230 I=0
240 T=T0:K=0
250 GOSUB 440
260 T3=TH*406.36001#
270 T5=TH*53.04483#
280 T7=TH*10.098622#
290 I=I+1
300 T=T0:K=1
310 GOSUB 440
320 T2=TH*3436.917223#
330 T4=TH*121.86472#
340 T6=TH*27.108603#
350 D1=T3*T3*T3-T2*T2
360 D2=-(T5*T5*T5*T5*T5)+T4*T4*T4*T4
370 D3=-(T6*T6*T6*T6*T6*T6)-T7*T7*T7*T7T
7*T7*T7
380 T1=(40320#-D1+D2-D3)/1095840#
390 TT=(SIN(T1)-SIN(T0))/SIN(T0)
391 T9=T1+SGN(TT)*(T1-T0)*1.2
392 T=T9:GOSUB440:T9=TH
393 T8=(SIN(T9)-SIN(T0))/SIN(T0)
400 IF I=1 OR I-INT(I/10)*10=0 OR ABS(TT
)<=1E-05 THEN 410 ELSE PRINT I:GOTO 420
410 LPRINT USING "###  ## ######  # ####
##  #.######  # ######  #.###### #######
#.######";I;TT;T8;T0;T1;T9;D1
420 T0=T9
430 IF ABS(T8)>1E-05 THEN 240 ELSE T$=TI
ME$:LPRINT T$:LPRINT CHR$(158):STOP
440 P=INT(T/6.2831853#)
460 TA=T-P*6.2831853#
470 IF TA>3.14159265# THEN IF TA>3.14159
265#*3/2 THEN TH=-(3.14159265#*2-TA) ELS
E TH=-(TA-3.14159265#)
480 IF TA<=3.14159265# THEN IF TA>3.1415
9265#/2 THEN TH=3.14159265#-TA ELSE  TH=
TA
490 RETURN
```

(ν)	(θ_{i-1})	(θ_i)	(δ)	(δ')	(δ'')
0.322935	0.036800	0.049684	-12652.747802	376.142216	-4.988300
0.020630	0.078967	0.080596	-40617.425906	7296.673537	-96.409624
0.007025	0.089630	0.090259	-46572.904121	11394.475809	-206.306096
0.003342	0.094277	0.094592	-48782.752099	14295.666642	-279.407095
0.001949	0.096716	0.096891	-49792.525304	15743.762044	-325.608256
0.001043	0.098103	0.098205	-50329.932925	16612.360164	-354.721479
0.000623	0.098925	0.098986	-50637.072273	17143.036870	-372.929741
0.000380	0.099422	0.099461	-50818.100097	17470.950617	-384.351890
0.000234	0.099730	0.099753	-50927.436148	17674.715237	-391.521943
0.000145	0.099920	0.099935	-50994.476529	17802.022577	-396.025281
0.000091	0.100039	0.100048	-51035.970926	17881.735915	-398.854013
0.000057	0.100113	0.100119	-51061.804359	17931.700156	-400.630124
0.000036	0.100160	0.100163	-51077.948256	17963.002015	-401.750949
0.000022	0.100189	0.100191	-51088.059268	17982.709175	-402.453678
0.000014	0.100207	0.100208	-51094.401249	17995.170652	-402.895483
0.000009	0.100219	0.100219	-51098.382797	18002.953181	-403.173259
0.000006	0.100226	0.100226	-51100.903873	18007.945251	-403.347909
0.000003	0.100230	0.100231	-51102.455530	18010.928915	-403.457721
0.000002	0.100233	0.100233	-51103.443370	18012.954552	-403.526767
0.000001	0.100235	0.100235	-51104.064351	18014.079295	-403.570181

(2) $x=r\cos\theta$ とする場合

$f(\theta)=a_0r^n\cos^n\theta+a_1r^{n-1}\cos^{n-1}\theta+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{n-1}r\cos\theta+a_n=0$

$f(\theta)$ において $\cos\theta$ のべきをフーリエ展開を用いて次のように変換する。

$F(\theta)=A_0\cos n\theta+A_1\cos(n-1)\theta+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+A_{n-1}\cos\theta+A_n$

上式の係数 $A_0, A_1, A_2\cdots\cdots\cdots\cdots A_n$ は参考資料(1)により容易に求められる。

次に三角関数をテーラ展開して $F(\theta)$ を次のように項別にまとめる。

$A_0\cos n\theta=A_0\left\{1-\dfrac{(n\theta)^2}{2}+\dfrac{(n\theta)^4}{24}-\dfrac{(n\theta)^6}{720}\cdots\cdots\right\}$ $A_{n-1}\cos\theta=A_{n-1}\left\{1-\dfrac{\theta^2}{2}+\dfrac{\theta^4}{24}-\dfrac{\theta^6}{720}\cdots\cdots\right\}$

$A_1\cos(n-1)\theta=A_1\left\{1-\dfrac{\{(n-1)\theta\}^2}{2}+\dfrac{\{(n-1)\theta\}^4}{24}-\dfrac{\{(n-1)\theta\}^6}{720}\cdots\cdots\cdots\right\}$ $A_n=A_n$

以上により次の式を得る。(第4項までをとる場合)

$-\dfrac{1}{720}\left\{n^6A_0+(n-1)^6A_1+\cdots\cdots+A_{n-1}\right\}\theta^6+\dfrac{1}{24}\left\{n^4A_0+(n-1)^4A_1+\cdots\cdots+A_{n-1}\right\}\theta^4$

$-\dfrac{1}{2}\left\{n^2A_0+(n-1)^2A_1+\cdots\cdots+A_{n-1}\right\}\theta^2+\Sigma A=0$ 但し $\Sigma A=A_0+A_1+\cdots\cdots+A_n$

これを $P(\theta)=P_0\theta^6+P_1\theta^4+P_2\theta^2+P_3=0$ で表わす。

この式は θ^2 を未知数とする3次方程式であるからカルダノの公式を用いて θ^2 を求めることができる。そこで θ が実数ならば $x=r\cos\theta$、虚数ならば $x=r\cosh\theta$, 但しこれが近似解となるためには展開式の収束が十分でなければならない。若し収束していなければ、この解を出発値として逐次 r と θ を補正し、$P(\theta)=0$ を反復して解く必要がある。先ず出発値 r_0 は正根に対しては $+$、負根に対しては $-$ とし根の絶対値より大にとる場合は次のようになる。

(注) $x=r\sin\theta$ とおく場合は1に収束する
$x=r\cos\theta$ とおく場合は8に収束する
ほかに 2, 3, 4, 5, 6, 7 の根があるが
組立除法をした方程式から得られる

(i) 出発値 θ_0 の計算

$r=r_0$ とする方程式 $P(\theta_0)=0$ を解いて θ_0 を求める。

(ii) 才2回以降の θ の計算

$r_1=r_0\cos\theta_0$（又は $r_0\cosh\theta_0$）とする方程式 $P(\theta_1)=0$ を解いて θ_1 を求める。

一般に $r_i=r_{i-1}\cos\theta_{i-1}$（又は $r_{i-1}\cosh\theta_{i-1}$）とする方程式 $P(\theta_i)=0$ を解いて θ_i を求める。

(iii) 収束の判定

θ_i が 0 に収束すると正解になるので、その誤差の判定値を ε とすれば、$|\theta_i|<\varepsilon$ が収束の条件になる。この計算で $|r|$ が根の絶対値より大きい側にあるときは $x=r_i\cos\theta_i$ となり、小さい側にあるときは $x=r_i\cosh\theta_i$ となる。若し $r_i=x$ となれば $\sum A=0$ すなわち $P_3=0$, $\theta=0$ である。

なお以上の説明では展開式を４項まで取ったが、必要に応じ６項又は６項以上の偶数個を取れば、実数の範囲内で計算が可能になる。

参考資料 1.

```
190 '
200 DIM A$(20,20),A(20,20)
202 FOR I=0 TO 20
204 FOR J=0 TO 20
206 A$(I,J)="  "
208 NEXT J:NEXT I
210 FOR J=0 TO 20
220 IF INT(J/2)-INT(INT(J/2)/2)*2=0 THEN A$(0,J)="+"   ELSE A$(0,J)="-"
240 NEXT J
250 FOR J=1 TO 20
260 IF J-INT(J/2)*2=0 THEN A$(0,J)=A$(0,J)+"COS(" ELSE A$(0,J)=A$(0,J)+"SIN("
280 NEXT J
290 FOR J=1 TO 20
300 IF J<=9 THEN A$(0,J)=A$(0,J)+CHR$(48+J):GOTO 330
310 C=INT(J/10):D=J-INT(J/10)*10:A$(0,J)=A$(0,J)+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)
330 NEXT J
340 I=0
350 FOR J=0 TO 20
355 IF J=0 THEN A$(I,J)="+1":GOTO 380
360 A$(I,J)=A$(I,J)+"*X)"
380 NEXT J
410 FOR J=0 TO 20
415 IF J=0 THEN A$(J,J)="+1":GOTO 450
430 C=INT(J/10):D=J-C*10
435 IF C=0 THEN C=-16
440 A$(J,J)="(R/2)^"+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)+"*2*1"
450 A(J,J)=1
460 NEXT J
1200 FOR K=2 TO 20 STEP 2
1210 FOR J=0 TO 20-K
1220 I=J+K
1290 C=INT(I/10):D=I-C*10
1295 IF C=0 THEN C=-16
1300 A$(I,J)="(R/2)^"+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)+"*2*"
1310 IF J=0 THEN A(I,J)=A(I-1,J+1) ELSE  IF J=1 THEN A(I,J)=A(I-1,J+1)+A(I-1,J-1
)*2 ELSE A(I,J)=A(I-1,J+1)+A(I-1,J-1)
1320 IF A(I,J)>=100000! THEN 1330 ELSE IF A(I,J)>=10000 THEN 1340 ELSE IF A(I,J)
>=1000 THEN 1350 ELSE IF A(I,J)>=100 THEN 1360 ELSE IF A(I,J)>=10 THEN 1370 ELSE
 1380
1330 C=INT(A(I,J)/100000!):D=INT((A(I,J)-C*100000!)/10000):E=INT((A(I,J)-C*10000
0!-D*10000)/1000):F=INT((A(I,J)-C*100000!-D*10000-E*1000)/100):G=INT((A(I,J)-C*1
00000!-D*10000-E*1000-F*100)/10):H=A(I,J)-C*100000!-D*10000-E*1000-F*100-G*10
1335 A$(I,J)=A$(I,J)+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)+CHR$(48+E)+CHR$(48+F)+CHR$(48+G)+CHR$
(48+H):GOTO 1400
1340 C=INT(A(I,J)/10000):D=INT((A(I,J)-C*10000)/1000):E=INT((A(I,J)-C*10000-D*10
00)/100):F=INT((A(I,J)-C*10000-D*1000-E*100)/10):G=A(I,J)-C*10000-D*1000-E*100-F
*10
1345 A$(I,J)=A$(I,J)+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)+CHR$(48+E)+CHR$(48+F)+CHR$(48+G):GOTO
 1400
1350 C=INT(A(I,J)/1000):D=INT((A(I,J)-C*1000)/100):E=INT((A(I,J)-C*1000-D*100)/1
0):F=A(I,J)-C*1000-D*100-E*10
1355 A$(I,J)=A$(I,J)+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)+CHR$(48+E)+CHR$(48+F):GOTO 1400
1360 C=INT(A(I,J)/100):D=INT((A(I,J)-C*100)/10):E=A(I,J)-C*100-D*10
1365 A$(I,J)=A$(I,J)+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)+CHR$(48+E):GOTO 1400
1370 C=INT(A(I,J)/10):D=A(I,J)-C*10

1375 A$(I,J)=A$(I,J)+CHR$(48+C)+CHR$(48+D):GOTO 1400
1380 A$(I,J)=A$(I,J)+CHR$(48+A(I,J))
1400 NEXT J
1420 NEXT K
1500 FOR J=0 TO 20
1510 FOR I=0 TO 20
1520 IF LEFT$(A$(I,J),2)="  " THEN PRINT
1540 NEXT I
1560 NEXT J
1565 DIM B$(130),W(20)
1567 L=1
1568 INPUT "N ｦ ﾆｭｳﾘｮｸｼﾃ ｸﾀﾞｻｲ";N
1569 IF N=0 THEN 1930 ELSE IF N=1 THEN 1568
1600  PRINT CHR$(12):TIME$="00:00:00"
1605 PRINT "N=";N: PRINT "N=";N
1610 FOR J=N TO 0 STEP -1
1620 K=0
1630 FOR I=N TO 0 STEP -1
1635 IF J>=1 AND I=0 THEN 1690
1640 IF LEFT$(A$(I,J),2)="  " THEN 1680
1650 C=INT(K/10):D=K-C*10:IF C=0 THEN C=-16
1660 B$(L)=LEFT$(A$(0,J),1)+A$(I,J)+"*A"+CHR$(48+C)+CHR$(48+D)+"*"+RIGHT$(A$(0,J
),LEN(A$(0,J))-1)
1670  PRINT B$(L): PRINT L:L=L+1
1680 K=K+1
1690 NEXT I
1700 NEXT J
1930  PRINT TIME$:BEEP
1940 INPUT "ｵﾜﾘ ｶ ﾂﾂﾞｹﾙ ｶ (E/C)";E$
1950 IF E$="e" THEN STOP ELSE 1567
2000 DATA 0,4,6,9,12,16,20,25,30,36,42,49,56,64,72,81,90,100,110,121
```

(1) $x=r\sin\theta$ とおく場合

n:偶数 $F(\theta)=A_0\cos n\theta+A_1\sin(n-1)\theta+\cdots\cdots+A_{n-2}\cos 2\theta+A_{n-1}\sin\theta+A_n$

n:奇数 $F(\theta)=A_0\sin n\theta+A_1\cos(n-1)\theta+\cdots\cdots+A_{n-2}\cos 2\theta+A_{n-1}\sin\theta+A_n$

(2) $x=r\cos\theta$ とおく場合

この表の sin をすべて cos に変え，かつ負の符号を正に変える

```
N= 2
-(R/2)^ 2*2*1*A 0*COS(2*X)
+(R/2)^ 1*2*1*A 1*SIN(1*X)
+(R/2)^ 2*2*1*A 0*1
++1*A 2*1

N= 3
-(R/2)^ 3*2*1*A 0*SIN(3*X)
-(R/2)^ 2*2*1*A 1*COS(2*X)
+(R/2)^ 3*2*3*A 0*SIN(1*X)
+(R/2)^ 1*2*1*A 2*SIN(1*X)
+(R/2)^ 2*2*1*A 1*1
++1*A 3*1

N= 4
+(R/2)^ 4*2*1*A 0*COS(4*X)
-(R/2)^ 3*2*1*A 1*SIN(3*X)
-(R/2)^ 4*2*4*A 0*COS(2*X)
-(R/2)^ 2*2*1*A 2*COS(2*X)
+(R/2)^ 3*2*3*A 1*SIN(1*X)
+(R/2)^ 1*2*1*A 3*SIN(1*X)
+(R/2)^ 4*2*3*A 0*1
+(R/2)^ 2*2*1*A 2*1
++1*A 4*1

N= 5
+(R/2)^ 5*2*1*A 0*SIN(5*X)
+(R/2)^ 4*2*1*A 1*COS(4*X)
-(R/2)^ 5*2*5*A 0*SIN(3*X)
-(R/2)^ 3*2*1*A 2*SIN(3*X)
-(R/2)^ 4*2*4*A 1*COS(2*X)
-(R/2)^ 2*2*1*A 3*COS(2*X)
+(R/2)^ 5*2*10*A 0*SIN(1*X)
+(R/2)^ 3*2*3*A 2*SIN(1*X)
+(R/2)^ 1*2*1*A 4*SIN(1*X)
+(R/2)^ 4*2*3*A 1*1
+(R/2)^ 2*2*1*A 3*1
++1*A 5*1

N= 6
-(R/2)^ 6*2*1*A 0*COS(6*X)
+(R/2)^ 5*2*1*A 1*SIN(5*X)
+(R/2)^ 6*2*6*A 0*COS(4*X)
+(R/2)^ 4*2*1*A 2*COS(4*X)
-(R/2)^ 5*2*5*A 1*SIN(3*X)
-(R/2)^ 3*2*1*A 3*SIN(3*X)
-(R/2)^ 6*2*15*A 0*COS(2*X)
-(R/2)^ 4*2*4*A 2*COS(2*X)
-(R/2)^ 2*2*1*A 4*COS(2*X)
+(R/2)^ 5*2*10*A 1*SIN(1*X)
+(R/2)^ 3*2*3*A 3*SIN(1*X)
+(R/2)^ 1*2*1*A 5*SIN(1*X)
+(R/2)^ 6*2*10*A 0*1
+(R/2)^ 4*2*3*A 2*1
+(R/2)^ 2*2*1*A 4*1
++1*A 6*1

N= 7
-(R/2)^ 7*2*1*A 0*SIN(7*X)
-(R/2)^ 6*2*1*A 1*COS(6*X)
+(R/2)^ 7*2*7*A 0*SIN(5*X)
+(R/2)^ 5*2*1*A 2*SIN(5*X)
+(R/2)^ 6*2*6*A 1*COS(4*X)
+(R/2)^ 4*2*1*A 3*COS(4*X)
-(R/2)^ 7*2*21*A 0*SIN(3*X)
-(R/2)^ 5*2*5*A 2*SIN(3*X)
-(R/2)^ 3*2*1*A 4*SIN(3*X)
-(R/2)^ 6*2*15*A 1*COS(2*X)
-(R/2)^ 4*2*4*A 3*COS(2*X)
-(R/2)^ 2*2*1*A 5*COS(2*X)
+(R/2)^ 7*2*35*A 0*SIN(1*X)
+(R/2)^ 5*2*10*A 2*SIN(1*X)
+(R/2)^ 3*2*3*A 4*SIN(1*X)
+(R/2)^ 1*2*1*A 6*SIN(1*X)
+(R/2)^ 6*2*10*A 1*1
+(R/2)^ 4*2*3*A 3*1
+(R/2)^ 2*2*1*A 5*1
++1*A 7*1

N= 8
+(R/2)^ 8*2*1*A 0*COS(8*X)
-(R/2)^ 7*2*1*A 1*SIN(7*X)
-(R/2)^ 8*2*8*A 0*COS(6*X)
-(R/2)^ 6*2*1*A 2*COS(6*X)
+(R/2)^ 7*2*7*A 1*SIN(5*X)
+(R/2)^ 5*2*1*A 3*SIN(5*X)
+(R/2)^ 8*2*28*A 0*COS(4*X)
+(R/2)^ 6*2*6*A 2*COS(4*X)
+(R/2)^ 4*2*1*A 4*COS(4*X)
-(R/2)^ 7*2*21*A 1*SIN(3*X)
-(R/2)^ 5*2*5*A 3*SIN(3*X)
-(R/2)^ 3*2*1*A 5*SIN(3*X)
-(R/2)^ 8*2*56*A 0*COS(2*X)
-(R/2)^ 6*2*15*A 2*COS(2*X)
-(R/2)^ 4*2*4*A 4*COS(2*X)
-(R/2)^ 2*2*1*A 6*COS(2*X)
+(R/2)^ 7*2*35*A 1*SIN(1*X)
+(R/2)^ 5*2*10*A 3*SIN(1*X)
+(R/2)^ 3*2*3*A 5*SIN(1*X)
+(R/2)^ 1*2*1*A 7*SIN(1*X)
+(R/2)^ 8*2*35*A 0*1
+(R/2)^ 6*2*10*A 2*1
+(R/2)^ 4*2*3*A 4*1
+(R/2)^ 2*2*1*A 6*1
++1*A 8*1
```

NEC PC-8001

3. おわりに

この解法では最初の準備にフーリエ展開などの手数を要するが、その手順はすべてプログラム化されているので方程式の係数を入れるだけで迅速に計算できる。三角関数は sin と cos について考えたが、これは収束性がよいからで、θ を小さく取れば、テーラ展開のままでも十分な精度が得られる。一般角として引き数を $\pi/2$ に押える場合については最良近似式を用いることもできるが、ここでは省略した。

ただこの解法で問題となるのは、才2の根又は重根を求めることが困難なことで、根の存在する全区間を走査するプログラムも作り得るが、根が広く散在する場合は組立除法を用いるのがよい。結局この解法は絶対値最大の根と、最小の根を求めることを目的とするとき有効であり、その意味では他の解法の補助として利用されることを期待したい。

参考文献〔山内二郎、森口繁一、一松信著　電子計算機のための数値計算Ⅲ、才3章〕