

超小型電算機による構造解析プログラム

法政大学 正員 大地 幸三

1 まえがき

超小型電算機のハードウェアの進歩はめざましいものであり、十数年前には大型機の分類に入れられた程度のメモリーと計算速度を持つものが出現している。しかも、一年毎に新しい型式の発表があり、将来どのようになるかの予想も立てがたい状態である。しかし、この種のソフトウェアの開発は乙女の居場所と考えられているため、ほとんど手がつけられていない。著者等は、数年来、超小型電算機による構造解析や自動計算のプログラムとしてどのような手法が有効かという主題について検討を加えてきた。幸い、昨年度の科学技術研究費の補助を受けることができたので、早速プログラムを作成し、理論の検証を行ったのを発表する。使用した超小型電算機は64K Byteのメモリーの外に、320K Byteのフロッピーディスク2台を具えたものであり、使用した言語は高精度演算が可能な拡張型のBASICである。

変形法あるいは有限要素法で構造解析を行うためには、次のステップが重要である。

- (1) データの入力 (2) 要素の剛性行列作成 (3) 全体の剛性行列作成 (4) 変位処理
- (5) 全体の剛性行列の三角化 (6) 荷重データの入力 (7) 前進代入と後退代入 (8) 断面力の計算

また、自動設計では

- (9) 最適線の計算 (10) 最大最小断面力計算 (11) 変力の計算 (12) 応力の計算

の他に、入力データの省力化、出力の簡化等についての検討が必要である。これらの各項目の結論の生じたものについて報告する。

又、要素の剛性行列および全体の剛性行列作成

片端の条件（たとえばヒンジ端、剛性域その他）によつて、別々の剛性行列を用意すると、サブルーチンが多くなり、メモリーを圧迫する原因になる。したがって、出来るだけ片端範囲の広い剛性行列を用意する必要があるが、これについての結論は、本年度の土木学会年次学術講演会で報告済みなので省略する。全体の剛性行列も必要なものだけをメモリーに格納することにした。たとえば、

図1 (A) に示す剛性行列は、対角小行列と非対角小行列に分けて、図1 (C) のように格納し、同一行の小行列は対角小行列から初まりポイントで

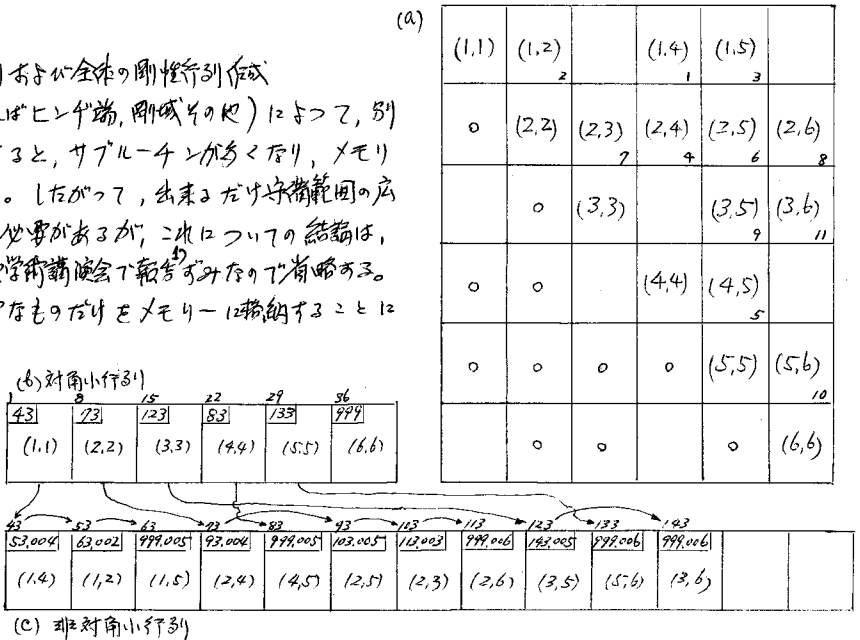


図1 全体剛性行列の格納法

- 1) 大地 "超小型電算機のための剛性行列作成" に対する提案 土木学会年次学術講演会予稿集 I-21 (79)
- 2) 大地・山本 "マトリックス法による構造計算の汎用プログラム" 同上 I-39 (72)

結合し、非対角小行列の列番号は、それがもつポインターの小数点以下3桁の数字で与えることにした。これによって必要最小限度の小行列だけメモリーに格納すればよいことになる。三角化の途中であらためて非電小行列が現れねばときは、その時点でメモリーに追加すればよい。

3. 支負処理と三角化

支負処理に対しては無限大のばねを積極的に取り入れることにした。とくにこのようにしなければならぬ理由はないが、反力の影響線計算に有理ではなかつた判断があつたからである。支負の支持方向が全体座標方向と異なるときも、局所座標方向の無限大ばねを全体座標方向に座標変換して、全体剛性行列に加ふることにした。この場合にありかたな荷重に対する処置については、昨年の土木学会年次学術講演会で報告済みである³⁾。

全体剛性行列の三角化にあつては、7000分節には有効なウエイブ・フロント法が採用されている。ただし要素単位での計算ではなく、全体剛性行列の格納方法と対応するように、三角化のルーチンも小行列単位で計算できるように改良したものを採用している。

4. 部材荷重の処理

剛性行列の元数を2倍にすると、連立一次方程式の計算所需時間は $2^3=8$ 倍、固有ベクトルの計算所需時間は $2^2=16$ 倍になるといわれている。超小型電算機では、メモリーの節約もさることながら、計算時間についても厳重にチェックが必要である。この理由からも構造物の節点数はできるだけ少くすべきであるが、このようにすると荷重は、節点にのみならず、部材に作用させるなければならなくなる。部材荷重は節点荷重に比べてその処理が格段に複雑であるが、計算所需時間を減らすためには、やむを得ない処置であると考えている。

有限要素法も含めて、変形法では、部材の中間に作用する荷重は、図2の(a)、(c)のように分解して計算している。すなわち、荷重を含む部材を両端固定ばりとし、固定端断面力を求め、この固定端断面力の符号を変えたものを節点に作用させる。全体剛性行列を節点行列として連立一次方程式を解いて得られる結果、すなわち節点変位は、図(c)に対するものであるが、これは図(a)の節点変位に等しい。しかし、部材中肉の変位および断面力は、図(c)の系に対するものに、図(b)の変位および断面力を加えるとい、図(a)の解にはならない。

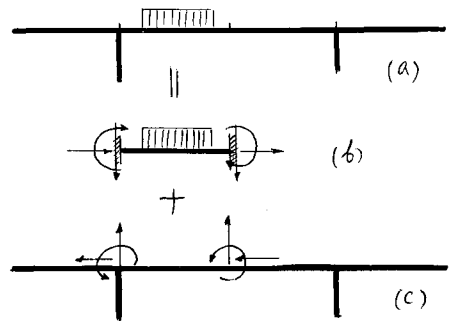


図2 部材荷重の分解

固定端断面力や部材中肉の変位および断面力を求める方法は色々考えられるが、レグレンジョン法の式を用いる方法が理解しやすいであらう。ただし、レグレンジョン法と変形法では、断面力の符号の定義が異なっているので注意が

ただし

$$\begin{aligned} U_0(x) &= \int_0^x \frac{x-z}{EI} p(z) dz & V_0(x) &= \int_0^x \frac{(x-z)^2}{6EI} p(z) dz \\ O_0(x) &= \int_0^x \frac{(x-z)^2}{2EI} p(z) dz & N_0(x) &= \int_0^x p(z) dz \\ S_0(x) &= \int_0^x p(z) dz & M_0(x) &= \int_0^x \frac{x-z}{EI} p(z) dz \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \theta \\ N \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{x}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & -\frac{x^3}{6EI} & -\frac{x^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{x^2}{2EI} & -\frac{x}{EI} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ V_a \\ \theta_a \\ -N_a \\ -S_a \\ M_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -U_0(x) \\ V_0(x) \\ O_0(x) \\ -N_0(x) \\ -S_0(x) \\ -M_0(x) \end{bmatrix} \quad \text{--- (1)}$$

3) 大地"拘束条件"の実用的処理 土木学会年次学術講演会 I-20 (78)

必要である。

たとえば、平面構造物に含みこめる部材の場合であれば、レザンション法の公式は式(1)のよう書きける。図(6)の両端固定ばりの場合は、 u_a, v_a, θ_a が 0 であるから、式(1)は式(2)のよう変形できるし、さらにこれを

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \theta \\ N \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI} & -\frac{1}{EI} \\ 0 & \frac{1}{EI} & -\frac{1}{EI} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{fa} \\ S_{fa} \\ M_{fa} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -u_b(x) \\ v_b(x) \\ \theta_b(x) \\ -N_b(x) \\ -S_b(x) \\ -M_b(x) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} N_{fa} \\ S_{fa} \\ M_{fa} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b(l) \\ v_b(l) \\ \theta_b(l) \end{bmatrix} \quad (3)$$

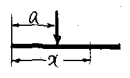
$$\begin{bmatrix} N_{fb} \\ S_{fb} \\ M_{fb} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_b(0) \\ v_b(0) \\ \theta_b(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_b(0) \\ S_b(0) \\ M_b(0) \end{bmatrix} \quad (4)$$

固定端断面力を求めると式(3)、(4)が得られる。また部材中肉に荷重がなから、両端の変位を u_a, v_a, θ_a とし、 u_b, v_b, θ_b は、式(1)は式(5)のよう変形される。(ただし式を簡便にするために $\eta = x/l$ とおいた)

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \theta \\ N \\ S \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\eta & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 \\ 0 & (1-3\eta^2+2\eta^3) & (\eta^2-2\eta^3) & 0 & (3\eta^2-2\eta^3) & (\eta^3-\eta^2) \\ 0 & -\frac{6}{l}(\eta-\eta^2) & (1-4\eta+3\eta^2) & 0 & \frac{6}{l}(\eta-\eta^2) & (2\eta-3\eta^2) \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI\eta^2/l^3 & -6EI\eta/l^2 & 0 & 12EI\eta^2/l^3 & -6EI\eta/l^2 \\ 0 & \frac{6EI}{l^2}(1-2\eta) & \frac{2EI}{l}(2-3\eta) & 0 & -\frac{6EI}{l^2}(1-2\eta) & \frac{2EI}{l}(1-3\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_a \\ u_b \\ v_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (5)$$

したがって、部材荷重が載荷された平面構造物では、i) 式(3)、(4)で求めた両端断面力の符号と変位に荷重も節点に載荷して、ii) 節点方程式を解き、iii) 得られた節点変位を用いて式(5)より部材中肉の変位および断面力を求め、iv) これを式(2)で計算された両端固定ばりの変位および断面力を加えて初めて解が得られる。この手順は、節点荷重に比べて格段に複雑であるが、メモリー、計算時間を節約する点には、この順序の計算の複雑さはやむを得ないと考えている。なお式(2)~(4)の計算には、 $u_b(x) \sim v_b(x)$ の必要であるが、これに含みこめる $\int_0^x (x-\xi)^n p(\xi) d\xi$ の値は、荷重の種類に応じて表1のようになる。

表1 $\int_0^x (x-\xi)^n p(\xi) d\xi$ の値

	$x \leq a$	$a < x \leq b$	$b < x$
	0	$(x-a)^n P$	$(x-a)^n P$
	0	$\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} p$	$\frac{(x-a)^{n+1} - (x-a-b)^{n+1}}{n+1} p$
	0	$\frac{(x-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} p$	$\left\{ \frac{(x-a)^{n+2} - (x-a-b)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} - \frac{(x-a-b)^{n+1}}{n+1} \right\} p$

5 影響線の計算

土木構造物の自動設計の場合には、必ずといってよいほど、断面力の影響線の計算が必要である。従来は、この計算にミューラー・ブレスラウの原理を用いるが、全体剛性行列の逆行列を計算する方法が用いられてきた。(1) 前者は構造物を改造しなければならぬので計算時間に難点があり、

後者は、剛性行列のスパースライズ法に依拠しているためメモリーに難点がある。私等の研究室では、数年前に、自己釣り合い状態にある特種な荷重を用いて、構造物を改造することなしに影響線を求める方法を考案し、土木学会の年次学術講演会に報告した。(2) 今回はこれを拡張し、着目点から部材の中肉にある場合の影響線を計算する方法を開発した。この方法によれば、自己釣り合い状態にある単点荷重を節点に作用させるときの大わみ曲線を求めるだけで影響線が得られる。ただし、着目点部材については図(2)と同じ主旨の左わみ曲線の改造が

4) 山下久保 "変形法プログラムのなかの" 影響線の求め方について" 土木学会年次学術講演会 I-26 (75)

必要である。

図3の(a), (b)に示す2組の荷重系の間で仮想仕事の原理を用いると

$$\begin{aligned}\bar{P}V &= \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx = \frac{l}{EI} \int_0^l \{M_a(1-\eta) - M_b\eta\} \{a(1-\eta) - b\eta\} d\eta \\ &= \frac{l}{6EI} \{M_a(2a-b) + M_b(2b-a)\} \quad \text{---(6)}\end{aligned}$$

図(b)の荷重は自己釣合の状態にあるので、上式右辺の積分は着目部材についてだけ実行すればよい。

式(6)の右辺が、図3(a)の着目点(x印)の曲げモーメント、 $M_3 = M_a(1-\frac{1}{3}) - M_b\frac{1}{3}$ 、になるためには

$$a = (4-\frac{1}{3})\frac{EI}{\lambda}, \quad b = (2-\frac{1}{3})\frac{EI}{\lambda}, \quad \frac{a+b}{\lambda} = (6-\frac{2}{3})\frac{EI}{\lambda^2} \quad \text{---(7)}$$

であればよいし、また、式(6)の右辺が着目点のせん断力 $(M_a + M_b)/\lambda$ になるためには

$$a = -\frac{6EI}{\lambda^2}, \quad b = -\frac{6EI}{\lambda^2}, \quad \frac{a+b}{\lambda} = -\frac{12EI}{\lambda^3} \quad \text{---(8)}$$

であればよい。すなわち、式(7), (8)を節点荷重として載荷したときの構造物のたわみ曲線が、それぞれ着目点の曲げモーメントおよびせん断力の影響線に一致する。軸力についても同様の議論ができ、図4の a' , b' とし、それとすれば、 $a' = -EA/\lambda$, $b' = EA/\lambda$ 、を用いられることと結論される。なお部材中甸のたわみ曲線は式(5)の2式で計算すればよい。

以上のようにして求めた影響線は、着目部材以外では正確なものであるが、着目部材の影響線は、この区間には単位荷重が載った場合と想定していいので、図2と同様の理由により、両端固定ばりの影響線(表2)を加えるなければならない。この表は、部材の両端に単位集中荷重が作用するときとして、式(3), (2)より着目点(3点)の断面力を計算すれば求められる。各々の影響線について、計算ははかばかであるが、まだ定めていないので、今回は省略する。

6. あとがき

以上の議論に示すように、超小型電算機のプログラムを作成して数値実験を行っている。解析用のプログラムは、OS, BASIC言語のアセンブラを含めても、350K Byteのフロッピーディスク1枚でまだかなりの余裕がある(現在は、振動解析のプログラムを含めて1枚のディスクを使用している)。次のディスクには、プロット分割をして計算を進める場合の計算途中のデータ、入力データおよび出力データ等の格納されている。どの程度の規模までの計算が出来るかについては、まだ十分な検証を行っていないが、コアメモリを使用した場合、4重折の格納で最大24節点の梁に解ける。プロット分割して次のディスクを使用すれば、これの十数倍は可能であろう。計算時間は、中型の電算機で1秒の計算が1分かるとみればまだ少ない。これも今後さらに、ハードウェアの改良によって数倍早く行う予定であるとのことである。

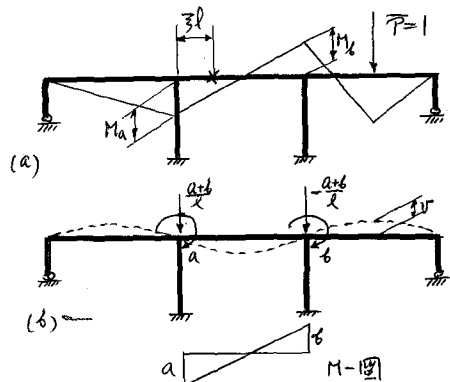


図3 曲げモーメントおよびせん断力の影響線を求める荷重

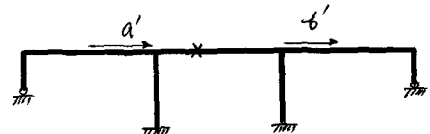


図4 軸力の影響線を求める荷重

表2 両端固定ばりの影響線

	軸力	せん断力	曲げモーメント
$\eta \leq \frac{1}{3}$	$-\eta$	$-\eta^2(3-2\eta)$	$l\eta^2(2-3\eta+2\eta^2)$
$\frac{1}{3} < \eta$	$1-\eta$	$(1-\eta)^2(1+2\eta)$	$l(1-\eta)^2(3-\eta+2\eta^2)$