大規模な非線形構造解析のための高速度数値計算技術について

センチュリリサーチセンタ　○田辺誠
〃　武田洋
動力炉・核燃料開発事業団　岩田耕司

1. はじめに

有限要素法による非線形構造解析では，何らかの形の反復計算が必要になり，したがって線形構造解析に比し，その反復数に比例した多大な計算コストがかかる。そこで，実用的規模の非線形問題を経済的に解く計算技術の開発は重要な課題となっている。ここでは，増分定式化[1]（incremental formulation）による有限要素非線形解析の求解手順（過程），およびその数値計算法に着目し，計算の経済性の観点からいくつかの提案を行なう。まず，求解手順では，繰り返し計算に適合した，コンパクトな求解手順を提案する。次に，構造物の非線形性が，領域の局所に限定されるか，あるいはしだいに拡がる，弾塑性問題などのいわゆる「局所非線形問題」に対して，経済的な解析が期待できる，サブストラクチャリングの手法を用いた局所非線形解法について述べる。また，非線形構造解析の問題は，ほとんどの場合，最終的には連立一次方程式を解く問題に帰結される。したがって，大規模な非線形問題では，大規模でスパースな連立一次方程式を効率良く解くことが重要になる。そこで，この種の連立一次方程式を高速度に解く手法を紹介する。また，最後の数値計算例では，実際のプログラムを用いた数値実験により，これらの手法の有効性を確認することにする。

2. コンパクトな有限要素求解手順

有限要素法による構造解析の求解手順では，1)要素剛性方程式の作成，2)全体剛性方程式の作成，3)変位制約条件式（constraint equation）を含む一般的な変位境界条件の導入，3)連立一次方程式の求解，の４つの手順が基本的であるが，これを大規模な非線形問題に適用する場合には，効率のうえで以下の配慮が重要である。第一に，より少ない手順にまとめることにより，反復計算の経済性を高めること，第二に，一般的な変位境界条件を大規模なマトリックスに直接課す場合，かなりの計算時間（CPタイムおよびI/Oタイム）を要するので，全体剛性マトリックスに対する演算をなるべく避けることである。そこで大規模な非線形問題では，1)変位境界条件を要素剛性方程式に課し，境界条件入りの要素剛性方程式を作成する，2)要素剛性方程式を組み立てながら連立一次方程式を解く，の２つの手順からなるコンパクトな求解過程を推奨する。

いま，最終的に解くべき方程式を以下のように表わすことにする。

$$K\mathbf{u} = P \tag{1}$$

$$\mathbf{u} = A\mathbf{u}_I + b \tag{2}$$

ただし，Kは全体剛性マトリックス，$\mathbf{u}$，Pはそれぞれ変位増分ベクトル，荷重増分ベクトル，また，$\mathbf{u}_I$は独立な変位増分ベクトルである。式(2)は，変位に関する線形制約条件式（linear constraint equation）を表わしており，式(2)のもとで式(1)を解くことになる。式(2)を式(1)に代入し

$$\tilde{K}\mathbf{u}_I = \tilde{P} \tag{3}$$

ただし

$$\tilde{K} = A^TKA \ , \quad \tilde{P} = A^TP - A^TKb \tag{4}$$

ここで，K^eを要素剛性マトリックスとすると，$K = \sum_e K^e$から，境界条件入りの全体剛性マトリックス$\tilde{K}$は，次のように書ける。

$$\widetilde{K} = \sum_e A^T K^e A = \sum_e \widetilde{K}^e \qquad ただし \qquad \widetilde{K}^e = A^T K^e A \tag{5}$$

ここで，$\widetilde{K}^e$，$\widetilde{P}^e$ はそれぞれ境界条件入りの要素剛性マトリックス，荷重増分ベクトルを表わし，式(5)は変位境界条件の導入を要素単位に行なうことを意味している。この方法は，以下の利点をもっている。

1) 一要素の要素剛性マトリックスは，ほとんどの場合，高速度メモリに入る規模であるので，一般的な変位境界条件の導入を効率良く行なうことができる。

2) 全体剛性方程式を作成する必要がないので，その作成のための計算コストおよび外部記憶スペースの節約が可能になる。

3) 手順の数が少ないので，反復計算（増分数に対応した）に対し効率が良い。

3．局所非線形解法

いま，求解領域を D とし，それを M 個の部分領域 $D_1, D_2, \cdots, D_M$ に分割する。

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_M \tag{6}$$

部分領域 D_i に含まれる節点を，部分領域内部の節点 J_i と，部分領域境界上の節点 J_i^B（他の部分領域と共有する節点）に分け，前者の節点の変位ベクトルを U_i，後者の節点のそれを U_i^B とする。境界上の節点 J_i^B をすべての部分領域にわたって集めたものを J^B，またその変位ベクトルを U_B とする。全節点の集合を J，全節点の変位ベクトルを U とすれば

$$J = J_1 \cup J_2 \cup \cdots \cup J_M \cup J^B \tag{7}$$

ただし $$J_i \cap J_j = \phi, \quad J_i \cap J_B = \phi \quad (i \neq j)$$
（ϕ は空集合）

また，$$\mathrm{U} = \llcorner U_1, U_2, \cdots U_M, U_B \lrcorner \tag{8}$$

ここで，解くべき方程式をあらためて次のように書くことにする。

$$K\,\mathrm{U} = P \tag{9}$$

ただし，K は（正値対称な）全体剛性マトリックス，U，P は，それぞれ変位増分ベクトル，荷重増分ベクトルである。一方，K は，下部三角マトリックス L，上部三角マトリックス U の積に一意に分解できる。

$$K = L\,U \tag{10}$$

式(7)（(8)で与えられる分割）に対応して，式(9)をサブマトリックス表示すると

$$\begin{aligned} K_{11} u_1 &+ K_{1B} u_B = P_1 \\ &\vdots \\ K_{ii} u_i &+ K_{iB} u_B = P_i \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^{M} K_{iB}^T u_i &+ K_{BB} u_B = P_B \end{aligned} \tag{11}$$

ここで，K_{ii}，P_i は，それぞれ部分領域 D_i の内部節点 J_i に関係した剛性マトリックスおよび荷重増分ベクトルである。式(11)において，u_i を消去し，次式を得る。

$$\widetilde{K}_{BB}\, u_B = \widetilde{P}_B \tag{12}$$

ただし

$$\widetilde{K}_{BB} = K_{BB} - \widetilde{K}_i, \qquad \widetilde{P}_B = P_B - \widetilde{P}_i$$

$$\widetilde{K}_i = K_{iB}^T K_{ii}^{-1} K_{iB}, \qquad \widetilde{P}_i = K_{iB}^T K_{ii}^{-1} P_i$$

また，$\widetilde{K}_i$，$\widetilde{P}_i$は，部分領域D_iの剛性方程式の，境界節点に関係する剛性方程式への寄与分で，それぞれ，ハイパエレメント剛性マトリックス，ハイパエレメント荷重ベクトルとよばれる。

ここで，部分領域D_iに関係した剛性マトリックスK_{ii}，K_{iB}が，荷重増分の過程で不変であれば（D_iは線形）K_{ii}，K_{iB}に対応するUのサブマトリックスU_{ii}，U_{iB}も不変である。したがって線形な部分領域では，要素剛性マトリックスの作成，組立，分解を省略することが可能である。局所非線形解法の概念は，剛性マトリックスの変化した部分領域（非線形な部分領域）に限定して，要素剛性マトリックスの作成，変位境界条件の導入，組立，分解を行なうもので，非線形性が領域の局所に限定されるか，しだいに進展するクラック問題等に特に有効である。また式(12)で与えられるハイパエレメント剛性マトリックスは，その部分領域の剛性マトリックスを分解するときの副産物として容易に得られるので，本解法は，局所的な非線形性を考慮しない従来のものに比して付加的な計算を必要としない。したがって，一般的な非線形問題（例えば，熱弾塑性問題）に適用しても，演算数は理論的には従来のものを上まわることはない。言いかえると，部分領域に分割して解くことは，部分領域分割に対応した一つの未知数消去順序を与えており，その未知数順序で連立一次方程式を解くことになっている。

4．大規模な連立一次方程式の高速度解法

大規模な非線形問題では，大規模でスパースな連立一次方程式を高速度に解くことが重要であることはすでに述べた。大規模な連立一次方程式では，高速度メモリ（high-speed memory）の容量制限から，剛性マトリックスを分割して解くことが必要になり，高速度メモリと外部記憶装置の間のデータ伝送のための計算コストであるI/Oコストが多大にかかる。しかも，大規模な問題では，このI/Oコストが連立一次方程式を解くための演算に要する計算コストであるCPコストに比べ支配的になる。そこで，大規模な問題に対しては

1）最大アクティブカラム数が，最小となる未知数消去順序を見つけること

2）マトリックスのスパース性を最大限に利用した，ウエイブフロント法，アクティブカラム法[2]などのスパースマトリックス解法を用いること

に加え，さらに

3）I/Oコストを最小とするための計算技術の開発

が重要である。1)，2)により，マトリックスのスパース性に正しい配慮を払った後では，連立一次方程式を解くための演算数は，一意に定まり，したがってCPコストは，ほぼ定まってしまう。大規模な問題では，I/Oコストが支配的であるので，経済的に解くためには3)が重要である。ここで，要素剛性マトリックスを組み立てながら解くフロント法において，I/Oコストを最小とするための手法について述べる。いま，与えられた高速度メモリの語数をWとし，それを枢軸行を格納する部分W_Aと，フロンタルマトリックスの一部を格納する部分W_Bに分けることにする。つまり

また，$\alpha = W/W_A$とすると，連立一次方程式を解くために必要なI/Oタイムの推定値T_eは次のように表わすことができる[3]。

$$T_e = C\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{(1-\alpha)\alpha}\right), \qquad C = \frac{k N n^2 (n-1)}{2W} \tag{13}$$

ここで，Nは連立一次方程式の元数，nは平均アクティブカラム数，kは，計算機依存のI/O性能係数で，例えば，CDC 6600では$k = 44.9^{*}$ μsec/1語である。ここで重要なことは，T_eをαの関数として表わせること，またT_eは$\alpha = \alpha_c \doteqdot 0.6$で最小値をとり，この$\alpha_c$は，$N$，$n$，$k$に依存しないことである。したがって，この$\alpha_c$による最適なメモリ配分を用いることにより，$T_e$を最小にすることが可能である。

＊実際には，計算環境によりバラツキがある。この値は，いくつかの数値実験の平均値。

5．数値計算例

図1は変位に関する線形な境界条件をもつ2次元問題で，境界条件の処理に要する計算時間について，従来の方法と本解法を比較したものである。ここで，プログラムAは商業用汎用プログラムで従来の求解手順を用いている。要素単位の処理を行なう本法では，境界条件式の数に依存しない一定の計算時間を示している。図2は，EPICC標準問題[(4)]の一つである2次元き裂問題である。塑性域（図3の暗色部）が，板を貫通するまで，弾塑性解析が行なわれた。図2(b)は要素分割を示しており，領域は，7つの部分領域に分割されている。表1は，局所的な非線形性を考慮しない従来の方法と，ここで示した局所非線形解法の計算時間の比較を与えているが，この例では40％ほどの計算時間の節約が達成された。図4は，式(13)で与えられるI/O推定時間と，実際のプログラムによる数値実験の結果を示している。ここで，Nは連立一次方程式元数，nは平均アクティブカラム数，Wは解くために使用されたメモリ数である。大規模な問題を解く状態を生成するために与えられたN，nに対し，Wをかなり小さくとっている。数値実験は，推定値に良く一致している。図5は，3次元問題の例で，ここで述べた方法と，ウエイブフロント法を用いているプログラムBとの比較を与えている。本法により，CPタイムの節約に加えて，かなりのI/Oタイムの節約が達成された。

6．結語

最近，非線形構造解析を経済的に行なう要求が高まっているが，ここでは，有限要素求解手順と数値計算法に焦点をあて，いくつかの手法を紹介した。また，これらの手法を用いた実際のプログラムを作成し，数値実験を行ない，従来のものと比較することにより，これらの手法が，計算コストの節約の上で有効なことを示した。なお，ここでの計算は，すべてCRCのCDC 6600によった。最後に，本題の研究にあたりお世話になりました東京大学山田嘉昭教授に，深く感謝いたします。

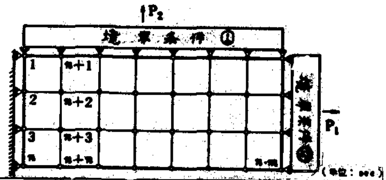
参考文献

1) 山田嘉昭，塑性・粘弾性，培風館，1972.

2) E.L.Wilson, H.H.Dovey, Solution or reduction of equilibrium equations for large complex structural systems, SAP conf., Tokyo, 1978.

3) M.Tanabe, H.Takeda, K.Iwata, Efficient solution procedure of simultaneous equations for large nonlinear finite element systems, SMiRT-5 conf., Berlin, 1979.

4) 非弾性構造解析法の実用化に関する研究(I)，日本機械学会，非弾性構造解析法実用化研究会，1977.



（単位：sec）

問題						プログラムA		本法	
ケース	n	m	節点数	自由度数	境界条件	CP	PP	CP	PP
1	19	51	969	1900	②	41.8	33.6	2.2	6.1
2	19	51	969	1650	①+②	63.0	33.0	2.3	6.1

図1　境界条件の処理に要する時間の比較

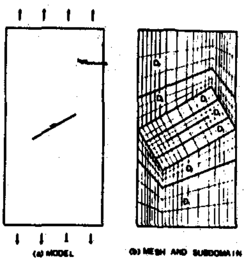


図2　2-D CRACK PROBLEM

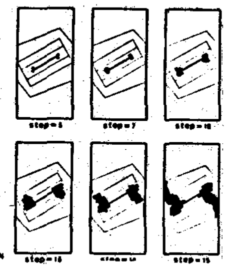


図3　DEVELOPMENT OF PLASTIC REGIONS

表1　SOLUTION TIME FOR THE CRACK PLOBLEM

	CONVENTIONAL METHOD(A)	PROPOSED METHOD(B)	B/A (%)
CP TIME(SEC)	191.25	112.56	58.9

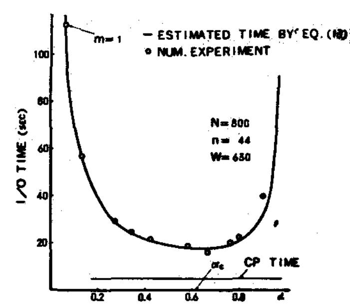
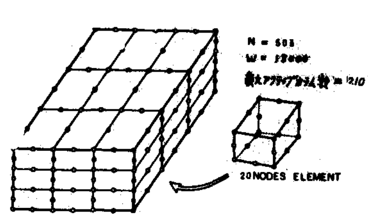


図4　I/O TIME VS. α



DECOMPOSITION TIME

CDC-6600 (SEC)

	CP TIME	I/O TIME
PROGRAM B	27.7	59.0
PROPOSED METHOD	20.0	21.5

図5　OUT-OF-CORE SOLUTION