

高次方程式の近似値解法

福井工業大学 正員 和田 久 範
 科学技術振興 宮内 治 彦
 三谷コンピュータシステム 和田 敏 洋

1. まえがき

前回の提案では土木工学における実務的な問題として高次代数方程式の実根について述べたが、今回はこれを一步進めて、力学の基本問題としての一元高次代数方程式の複素根、および多元連立方程式(非線形)の解法にまで拡大して考えてみたい。このうち前者については解析的な解法や収束の速い計算が示されているので、改めて取上げる必要はないように思われるが、ここに提案するものは若干趣旨を異にし、単純なる電算機利用の計算手法によって複素根の近似値を得るもので、収束は遅いが、いろいろの問題解決に活用できるように思うのである。その一つが次に述べる連立非線形方程式であるが、一応の成果が得られたのでここに提案したいと思う。

2. 一元高次代数方程式の複素根

実係数方程式 $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \dots\dots\dots (1)$

これを $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおいて、ド・モアブルの定理により展開し、実数部=0、虚数部=0と置くことにより次の式を得る。

$$a_0 r^n \cos n\theta + a_1 r^{n-1} \cos (n-1)\theta + \dots + a_{n-1} r \cos \theta + a_n = 0 \dots\dots (2)$$

$$a_0 r^n \sin n\theta + a_1 r^{n-1} \sin (n-1)\theta + \dots + a_{n-1} r \sin \theta = 0 \dots\dots\dots (3)$$

(2)式と(3)式を連立させて r と θ を求めれば $x = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ により根の近似値を得ることが出来る。

(1) 数値計算の考え方

$$f(r, \theta) = a_0 r^n \cos n\theta + a_1 r^{n-1} \cos (n-1)\theta + \dots + a_{n-1} r \cos \theta + a_n$$

$$g(r, \theta) = a_0 r^n \sin n\theta + a_1 r^{n-1} \sin (n-1)\theta + \dots + a_{n-1} r \sin \theta$$

において $f(r, \theta) = 0$ として θ を $-\pi \sim 0 \sim \pi$ の区間で $\Delta \theta$ 刻みで変化させると、 r はその変化に対応して変化する。その変化量 Δr は一元のニュートン法で求めることが出来る。さらにこの計算を継続することによって r と θ の値が連続的に得られるので、その組み合わせの中で $g(r, \theta) = 0$ を満足するものを発見することが根を求めることになる。次に $f(r, \theta) = 0$ の計算は $0 \sim \pi$ までの区間を $+\Delta \theta$ で刻むことと $0 \sim -\pi$ までの区間を $-\Delta \theta$ で刻むこととは全く同値になるのでその何れかをとればよい。又 $g(r, \theta) = 0$ については前者と後者の計算で数値は等しく符号が反対になるので共役根の関係になる。この方法に対し第1法として $g(r, \theta) / r \sin \theta = 0$ による走査($g(r, \theta)$ には $r \sin \theta$ の因子があるのでこれを除いて計算する)を用いて r の値を計算し、 $f(r, \theta) = 0$ に代入して判定する方法があるが、この計算では出発値を求めることが困難な場合がある。さらに第3法として前の二つの方法で得られた値を初期値として二元のニュートン法を全走査区間の数点において用いれば解が得られることが多い。ただしここでは主として第1法について述べたいと思う。

(2) r の計算と根の求め方

まず $f(r, \theta) = 0$ とおいて r を求める計算の出発値について考える。いま(2)式において $\theta = 0$ とおけば r の n 次式が得られるが、これは(1)式において $x = r$ と置き換えた式である。従って x の実根が予め求められているならばその実根の値を r の出発値にとればよいことになる。ところで r はもともと正の実数とすべきであるが、ニュートン法の計算の手段としては r の連続性が条件となるので正負の実数として考えなければ解が得られない。

(計算の結果 r が負になれば角を修正することにより正にすることが出来る)

次にもし x の実根が n 以上あるときは何れか一つを選び、他の実根の因子は予め組立除法を行い、原方程式から取除いておけば、 r を追跡する上で混乱が生じない。以上によって $f(r, \theta) = 0$ に用いる出発値を $\theta_0 = 0$

$r_0 = x$ の実根にとれば $f(r_0, \theta_0) = 0$

さて計算の最初のステップはこの状態から角を $\Delta\theta$ だけ進行させた位置で Δr を求めるところから始まる。ここで $\theta_1 = \theta_0 + \Delta\theta$ に対し $r_1 = r_0 + \Delta r$ を以て表わす。次に $f(r_1, \theta_1)$ をテーラー展開してオス項までをとり、

$$\Delta r = -\frac{f(r_0, \theta_1)}{f'(r_0, \theta_1)} \quad r_1 = r_0 - \frac{f(r_0, \theta_1)}{f'(r_0, \theta_1)} \quad (f'(r_0, \theta_1) \neq 0)$$

この反復計算により $f(r_1, \theta_1) = \varepsilon_f$ を計算し $|\varepsilon_f|$ が誤差の許容値 (これを E_f とする) に入るようにする。次にここで得られた r_1 と θ_1 を $g(r, \theta)$ に代入し、 $g(r_1, \theta_1) = \varepsilon_g$ を計算して $|\varepsilon_g|$ もまた誤差の許容値 (これを E_g とする) の中に入れば、(2)式と(3)式は略々満足されるので根の存在が予想されるのである。以下オスステップからは同じ方法で次のように計算を行えばよい。

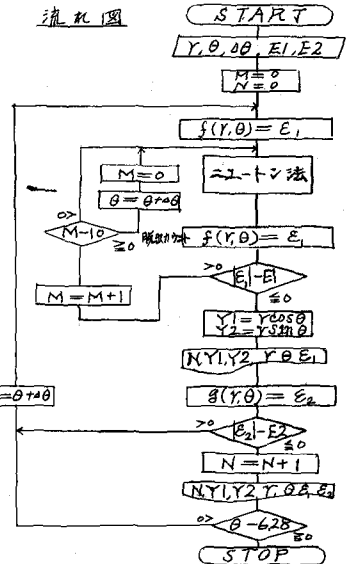
$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon_f| \leq E_f \\ |\varepsilon_g| > E_g \end{array} \right\}$ の区間は $\Delta\theta$ 刻みでステップを進行させる
 $\left. \begin{array}{l} |\varepsilon_f| \leq E_f \\ |\varepsilon_g| \leq E_g \end{array} \right\}$ の区間で $|\varepsilon_f|$ と $|\varepsilon_g|$ の最小のものをオス近似値とする。

さらに精度を高める必要のある時はこの区間を $\frac{1}{10}\Delta\theta$ 刻みとして次の計算をする。(必要に応じて刻みを小さくする)

$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon_f| \leq \frac{E_f}{10} \\ |\varepsilon_g| \leq \frac{E_g}{10} \end{array} \right\}$ の区間で $|\varepsilon_f|$ と $|\varepsilon_g|$ の最小のものをオス近似値とする

もちろんオス近似値を初期値として二元のニュートン法を用いることもできる。

流れ図



例 (1) $x^4 + x^3 - x - 1 = 0$ の複素根を求める この式は $(x-1)(x+1)(x^2+x+1)$ である (根 $x = \pm 1$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$)

(解) 出発値 $r_0 = 1$, $\theta_0 = 0$ (この計算では出発値が2あるが一つを残して他の関数を原式から除いた方がよい)

N	Y1(rainθ)	Y2(rainθ)	R(r)	T(θ)	E1(ε _f)	E2(ε _g)
0=	0.100000E+01+J(0.000000E+00)	0.000000E+00	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00 (出発値)	0.000000E+00
1=	0.100000E+01+J(0.000000E+00)	0.000000E+00	0.100000E+01	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
1=	0.100046E+01+J(0.174629E-01)	0.100061E+01	0.100061E+01	0.1745320E-01	0.2861023E-05	
1=	0.100184E+01+J(0.349847E-01)	0.100245E+01	0.100245E+01	0.3490640E-01	0.2980232E-04	
1=	0.100417E+01+J(0.526253E-01)	0.100555E+01	0.100555E+01	0.5235960E-01	0.8511543E-04	
1=	0.100748E+01+J(0.704490E-01)	0.100994E+01	0.100994E+01	0.6981279E-01	0.1692772E-03	
1=	0.101181E+01+J(0.885213E-01)	0.101563E+01	0.101563E+01	0.8726598E-01	0.2863407E-03	
1=	0.101724E+01+J(0.106916E+00)	0.102285E+01	0.102285E+01	0.1047192E+00	0.4408360E-03	
1=	0.149516E+01+J(0.573933E+00)	0.160153E+01	0.160153E+01	0.3665171E+00	0.5745173E-01	
1=	0.165252E+01+J(0.667657E+00)	0.178230E+01	0.178230E+01	0.3839703E+00	0.2550602E-02	
1=	0.204129E+01+J(0.366473E+00)	0.221758E+01	0.221758E+01	0.4014235E+00	0.2311015E-01	
1=	0.676604E+00+J(-0.104187E+01)	-0.124229E+01	-0.124229E+01	0.9948320E+00	-0.2352130E-01	
1=	-0.531717E+00+J(-0.850913E+00)	-0.100338E+01	-0.100338E+01	0.1012285E+01	-0.8768904E-01	
2=	-0.531717E+00+J(-0.850913E+00)	-0.100338E+01	-0.100338E+01	0.1012285E+01	-0.8768904E-01	
2=	-0.533487E+00+J(-0.887859E+00)	-0.103581E+01	-0.103581E+01	0.1029738E+01	-0.4342794E-03	
2=	-0.499979E+00+J(-0.865977E+00)	-0.999947E+00	-0.999947E+00	0.1047192E+01	-0.9465218E-04	
3=	-0.499979E+00+J(-0.865977E+00)	-0.999947E+00	-0.999947E+00	0.1047192E+01	-0.9465218E-04	
3=	-0.472169E+00+J(-0.851802E+00)	-0.973914E+00	-0.973914E+00	0.1064645E+01	0.2610683E-03	
4=	-0.472169E+00+J(-0.851802E+00)	-0.973914E+00	-0.973914E+00	0.1064645E+01	0.2610683E-03	
4=	-0.447696E+00+J(-0.841980E+00)	-0.953605E+00	-0.953605E+00	0.1082098E+01	0.3230572E-03	
4=	-0.425527E+00+J(-0.835131E+00)	-0.937292E+00	-0.937292E+00	0.1099551E+01	0.3039837E-03	
13=	-0.447623E+00+J(0.841914E+00)	-0.953512E+00	-0.953512E+00	0.5201052E+01	0.2166033E-03	
13=	-0.472095E+00+J(0.851740E+00)	-0.973825E+00	-0.973825E+00	0.5213505E+01	0.1864433E-03	
14=	-0.472095E+00+J(0.851740E+00)	-0.973825E+00	-0.973825E+00	0.5218505E+01	0.1864433E-03	
14=	-0.499962E+00+J(0.866017E+00)	-0.999973E+00	-0.999973E+00	0.5235953E+01	0.3552437E-04	
15=	-0.499962E+00+J(0.866017E+00)	-0.999973E+00	-0.999973E+00	0.5235953E+01	0.3552437E-04	
15=	-0.533378E+00+J(0.887748E+00)	-0.103566E+01	-0.103566E+01	0.5253411E+01	-0.5139112E-03	

例 (2) $2x^7 - 7x^6 + 10x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 36x^2 + 34x - 24 = 0$ この式は $(2x-3)(x^2-3x+4)(x^2+2x+2)(x^2-x+1)$

(根 $x = 1.5$ $x = -1.0 \pm i$ $x = 0.5 \pm 0.866025i$ $x = 1.5 \pm 1.022876i$)

(解) 出発値 $r_0 = 1.5$ $\theta_0 = 0$ (この計算では x^4 の根を求めるためオス近似値まで算出した)

N	Y1(rcosθ)	Y2(rsinθ)	R(r)	T(θ)	E1(μ)	E2(μ)
0=	0.150000E+01+J(0.000000E+00)	0.150000E+01	0.000000E+00	-0.3814697E-05 (出発値)		
1=	0.150000E+01+J(0.000000E+00)	0.150000E+01	0.000000E+00	-0.3814697E-05	0.000000E+00	
2=	0.542735E+00+J(0.903250E+00)	0.102377E+01	0.1024738E+01	0.2923203E-01		
2=	0.500276E+00+J(0.366490E+00)	0.100054E+01	0.1047192E+01	0.9519577E-02		
3=	0.500276E+00+J(0.366490E+00)	0.100054E+01	0.1047192E+01	0.9519577E-02	-0.2163315E-01	
4=	-0.105081E+01+J(0.108818E+01)	0.151272E+01	0.2338723E+01	0.2868118E+00		
4=	-0.100220E+01+J(0.100223E+01)	0.141735E+01	0.2356131E+01	0.3762131E+00		
5=	-0.100220E+01+J(0.100223E+01)	0.141735E+01	0.2356131E+01	0.3762131E+00	-0.9843445E+00	

根 ① $X = 0.500276 + 0.866490i$

② $X = -1.00220 + 1.00223i$

③ $X = 2.00029 (\cos 41.32^\circ + i \sin 41.32^\circ)$

$= 1.50228 + 1.32072i$ (以上共根を省略)

2.00029 41.26000 0.0581 158.6770

2.00029 41.32000 0.0565 159.0187

R(r) T(θ) FUNCTION(1) FUNCTION(2)
④ 2.00029 41.32000 0.0565 -0.4969

3. 多元連立方程式 (非線形) の実根

多元連立方程式の根の近似値についても、ニュートン法の変数への拡張した方法が適用できるので、前節で述べたと同様の手法で計算を行う。しかし一元高次方程式の実根の場合のように根の存在する区間の上限と下限を予め知ることができないので、総ての根の近似値を求めることは困難である。従って1つの変数を固定した場合、その走査区間を限定してその中に存在する根を求めることにしなければならない。固定された変数はこの区間を ΔX 刻みで進行し、その刻みの数だけの各ステップについてニュートン法の計算を実施して条件を満足すれば根の近似値である。さて $X_1, X_2, \dots, X_n$ を変数とする連立方程式

$$f = \begin{pmatrix} f_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ f_2(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ \vdots \\ f_n(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{において } X_1 \text{ を固定し、走査区間を定めてこれを } \Delta X \text{ で刻むことにする。そこで } X_1 \text{ が変化すればその変化に対応して } X_2, X_3, \dots, X_n \text{ がどのように変化するかを多変数のニュートン法で計算する。この計算に必要な式は } (n-1) \text{ 個であるからいま } f_1, \dots, f_{n-1} \text{ までを選んで } (n-1) \text{ 元連立方程式をつくる。残った } f_n \text{ は各ステップにおける計算結果が根になるか否かの判定に用いる。}$$

ここで先ずこの計算に用いる出発値 $X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}$ を求める必要が生じる。そのためには $X_{1,0} = 0$ ($X_{1,0} = 0$ において連続とする) とおいて $(n-1)$ 元連立方程式を解かねばならない。さらに又これを解くには変数の1つを選び、例えば $X_{2,0} = 0$ ($X_{2,0} = 0$ において連続とする) とおいて $(n-2)$ 元連立方程式を解かねばならない。以下それらの一連の解が得られた時はじめてもとの $(n-1)$ 元連立方程式の出発値が得られる。すなわち

$$f = \begin{pmatrix} f_1(X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}) \\ f_2(X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}) \\ \vdots \\ f_{n-1}(X_{1,0}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}) \end{pmatrix} = 0 \quad \text{ここで } X_{1,1} = X_{1,0} + \Delta X \text{ として第1ステップの計算をするには}$$

$$\begin{aligned} f_1(X_{1,1}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}) &= f_{1,1} \\ f_2(X_{1,1}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}) &= f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{n-1}(X_{1,1}, X_{2,0}, \dots, X_{n,0}) &= f_{n-1,1} \end{aligned}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \frac{\partial f_1}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \frac{\partial f_2}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{n-1}}{\partial X_2} & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial X_n} \end{pmatrix} \quad \text{を用いて}$$

$$\begin{pmatrix} X_{2,1} \\ X_{3,1} \\ \vdots \\ X_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{2,0} \\ X_{3,0} \\ \vdots \\ X_{n,0} \end{pmatrix} - A_1^{-1} \begin{pmatrix} f_{1,1} \\ f_{2,1} \\ \vdots \\ f_{n-1,1} \end{pmatrix} \quad \text{の反復計算を行う。}$$

これによって誤差の許容値まで収束させてから、その結果を $f_n(X_{1,1}, X_{2,1}, \dots, X_{n,1})$ に代入し、根としての適否を判定する。オスステップ以下の計算についても同様の方法で計算し条件が満足されるものを以てオ1近似値とする。

以上は X_1 についての走査区間が与えられている場合であるが、他の変数についても必要ならば同じ手法で計算しなければならない。

例 ③ $\begin{cases} X_1^2 X_2^2 + 2 X_2^3 X_3^2 + 3 X_1^2 X_3^3 = 229 \dots (1) \\ X_1^2 X_2^2 + 3 X_2^3 X_3^3 + 5 X_2^3 X_1 = 83 \dots (2) \\ X_1^2 X_2 X_3 + X_1 X_2^3 X_3 + X_1 X_2 X_3^3 = 84 \dots (3) \end{cases}$ の実根を求めろ

根 $\begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 2 \\ X_3 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 0.2405 \\ X_2 = 1.4268 \\ X_3 = 6.1441 \end{cases}$

(解) (1) (2) 式でニュートン法の計算をし (3) 式で根

の利便をする。出発値は次の3通りで算出する。
(x_1 を固定し $\Delta x = 0.01$ とする。走査区間は $0 \sim 10$ まで)

① (1) (2) 式において $x_{1,0} = 0$ とおいて $x_{2,0}, x_{3,0}$ を求める。

② $x_{2,0} = 0$ とおいて $x_{1,0}, x_{3,0}$ を求める。③ $x_{3,0}$ とおいて

$x_{1,0}, x_{2,0}$ を求める。この計算では②により次の出発

値を得た。 $x_{1,0} = 0.18$ $x_{2,0} = 0$ $x_{3,0} = 18.2$

例 (4) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 = 96$ ----- (1)

$x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_3^2 = 1408$ ----- (2)

$x_1^2 x_2^2 + 4x_2^2 x_3^2 - 2x_3^2 = 88544$ ----- (3)

(解) 計算法は例(3)と同じであるが、出発値は次の

ようにした。 $x_{3,0} = 0$ とおいて (1) (2) 式に代入し

$x_1^2 - 2x_2^2 = 96$ ----- (1') この式を解くため $x_{2,0} = 0$

$x_1^2 + 3x_2^2 = 1408$ ----- (2') とおいて $x_{1,0} = 1.66055/5$

と出発値とする計算を行う。

その結果 $x_{1,0} = 2.41$ $x_{2,0} = 3.32$ と得た。

以上は例(3)同様の出発値は $x_{1,0} = 2.41$ $x_{2,0} = 3.32$

$x_{3,0} = 0$ とする。ここで x_3 を固定し $\Delta x = 0.01$ で

刻み、その走査区間を $0 \sim 10$ までとして計算する。

$x(x_1)$	$y(x_2)$	$z(x_3)$	FUNCTION1	FUNCTION2	F'1
0.18000	0.00000	18.2000	-123.5241	215.1140	0.0000
0.18000-13823.08030	25.3047	2038.9603	*****.*****	*****.*****	*****.*****
0.18000	0.00313	50.6095	2038.9603	2222.1927	0.1508

$x(x_1)$	$y(x_2)$	$z(x_3)$	FUNCTION(1)	FUNCTION(2)	FUNCTION(3)
0.24000	1.42572	6.1513	-0.0000	0.0000	0.0437

$x(x_1)$	$y(x_2)$	$z(x_3)$	FUNCTION(1)	FUNCTION(2)	FUNCTION(3)
0.99973	2.00020	3.0001	0.0000	0.0000	-0.0037
0.99973	2.00020	3.0001	0.0000	0.0000	-0.0037

NO. 出発値	$x(x_1)$	$y(x_2)$	$z(x_3)$	z'
1	1.66000	0.00000	-0.2865	518.9281
1	1.66055	0.00000	0.0003	520.3108
2	1.66055	0.10000	0.0003	520.3108

NO.	x	y	FUNCTION(1)	FUNCTION(2)
36	2.41308	3.32000	0.0000	-0.4867

NO.	$x(x_1)$	$z(x_2)$	FUNCTION1	FUNCTION2	F'1
2.41319	3.32023	0.1000	0.0003	-0.0079	7846.5258
2.41319	3.32023	0.2000	0.0006	-0.0639	7846.5889
2.41324	3.32034	0.3000	0.0000	0.0000	7848.1071
2.41331	3.32048	0.4000	0.0000	0.0000	7850.5479
2.41342	3.32072	0.5000	-0.0000	0.0000	7854.9084
2.41358	3.32108	0.6000	-0.0000	0.0001	7861.9166

2.00012	3.99997	5.9999	0.0000	0.0000	-5.2849
2.00000	3.99999	6.0000	0.0000	0.0000	0.0003
$X(X_1)$	$Y(X_2)$	$Z(X_3)$	FUNCTION(1)	FUNCTION(2)	FUNCTION(3)
2.00000	3.99999	6.0000	0.0000	0.0000	0.0003

4. 多元連立方程式 (非線形) の複素根

多元連立方程式の複素根についても、一元連立方程式の場合と同様にド・モアブルの定理により展開し、 θ の連立方程式をつくり前節の方法で計算して根の近似値を求める。

例 (5) $\begin{cases} x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_2^3 - 1 = 0 \\ x_1^3 x_2 + x_1 + x_1 x_2^2 - x_2 = 0 \end{cases}$ 実根 $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

(この例では実根を既知とし、複素根 $x_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ を求める)

(解) 次の3つの場合について考える

① x_1 が実根で x_2 が複素根

$f_1 = x_1^3 + x_1^2 x_2 \cos \theta_2 - x_2^3 \cos \theta_2 - 1 = 0$

$f_2 = x_1^3 x_2 \sin \theta_2 + x_1^2 x_2 \sin \theta_2 - x_2^3 \sin \theta_2 = 0$

$f_3 = x_1^3 \cos \theta_2 + x_1^2 x_2 \cos \theta_2 - x_2^3 \cos \theta_2 = 0$

② x_2 が実根で x_1 が複素根

$f_1 = x_1^3 \cos \theta_1 + x_1^2 x_2 \cos \theta_1 - x_2^3 \cos \theta_1 - 1 = 0$

$f_2 = x_1^3 \sin \theta_1 + x_1^2 x_2 \sin \theta_1 - x_2^3 \sin \theta_1 = 0$

$f_3 = x_1^3 \cos \theta_1 + x_1^2 x_2 \cos \theta_1 + x_1 x_2^2 \cos \theta_1 - x_2 = 0$

③ x_1, x_2 共に複素根

$f_1 = x_1^3 \cos \theta_1 + x_1^2 x_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - x_2^3 \cos \theta_2 - 1 = 0$

$f_2 = x_1^3 \sin \theta_1 + x_1^2 x_2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 - x_2^3 \sin \theta_2 = 0$

$f_3 = x_1^3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + x_1^2 x_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + x_1 x_2^2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - x_2 \cos \theta_2 = 0$

$f_4 = x_1^3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + x_1^2 x_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + x_1 x_2^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - x_2 \sin \theta_2 = 0$

この計算では θ_1 を用い、 θ_2 を固定し $\theta_2 = 1^\circ$ とした。

5. まとめ

一元高次代数方程式の複素根については $\Delta \theta$ の刻み巾を最初はやや粗く取って θ_1 近似値を求め、さらに必要に応じて細分化する方法にしたが、この計算は三角関数の倍角式であるから計算速度は割合速く、実際問題の解決に役立つものと思われる。次の多元連立方程式の計算では各変数毎に走査区間を限定しなければならない点を改善する必要がある。又この方法では次数が高くなるより、変数の増える方が大きな負担になると思われるので、多くの変数を有する実際問題に適用するには、今後さらに能率的な計算法を開発すべきであると考えている。

以上課題は残されているが、一応ここに提案してご指導を賜りたいと思う次第である。

- 参考文献
- (1) 磯田和男・大野 豊 FORTRANによる数値計算ハンドブック
 - (2) 山内二郎・森口繁一・一 松 信 電子計算機のための数値計算法
 - (3) 宇野利雄 応用数学力学講座 14 計算機のための数値計算

近似値 $x_1 = -0.99596(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = -0.4980 - 0.8625i$
 $x_2 = -0.94976(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ) = 0.5033 - 0.8054i$