数値計算法の教科内容
（連立1次方程式の場合）

神戸市立工業高専　正会員　○嵯峨　晃
関西大学工学部　正会員　三上　市蔵

1. まえがき

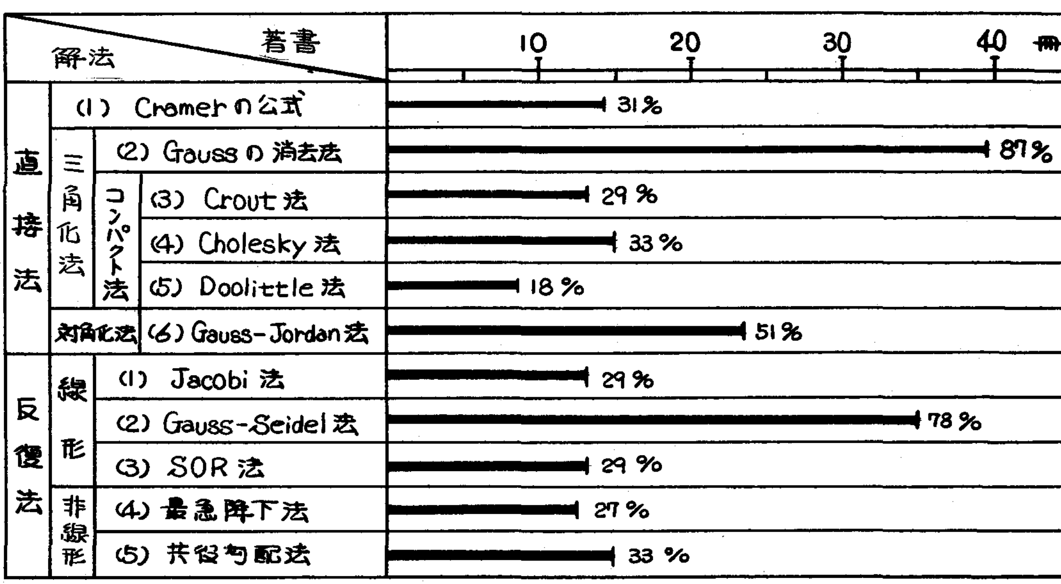
最近，大学・高専における情報処理教育の必要性が認識され，施設・設備およびカリキュラムの整備が着々となされている。しかし，教科内容については講義担当者が個々に検討し，テーマを選択しており，試行錯誤が繰り返されているようである。現在その方面の教科書および参考書は多数出版されている。これらが取り上げている内容を調査することによって多くの専門家の考えを総合したものとしての教科内容のプログラムを作成できるであろう。

この観点から数値計算法を取り上げ，その教科内容を決定するため，わが国で出版されている教科書・参考書を中心に調査した。今回は連立1次方程式の解法について，統計的に整理した結果を報告する。

2. 連立1次方程式の解法

調査に先立って連立1次方程式の解法を明確に分類する必要があるが，これはきわめて困難な問題である。連立1次方程式に関する研究はきわめて多く，1953年のG. E. Forsytheの調査によってもその文献数はすでに400を越えている。[1] その後も特に大次元の連立1次方程式の解法を中心として多くの研究がなされている。ここでは J.R. Westlake の分類[1]を若干修正して用いた。すなわち，大分類として直接法と間接法とに分け，小分類としては直接法を18，反復法を17の合計35の解法に分類した。

調査の対象とした教科書・参考書は1979年3月末までにわが国で出版されたものの51冊から特殊なテーマについてのみふれているものを除いた45冊（うち訳本15冊）である。そのうち20冊は明確にコンピュータ・プログラミングを意識して書かれている。



図－1

35の解法について取り上げられている教科書および参考書の冊数を調べた結果は図－１のようになった。直接法18解法のうち図－１に示した6解法が主として取り上げられており，その他の解法については1～2の教科書が取り上げている場合もあるが，ほとんど取り上げられていないと考えてよい。反復法については17解法のうち図－１に示した5解法のみが取り上げられており，他の解法はほとんど取り上げられていない。この結果から数値計算法に関する教科書または参考書においては対象とする解法が明確に限定されていることがわかる。

3. 連立1次方程式の解法の選択

ここでは調査結果を分析しながら望ましい連立1次方程式の教科内容について考えてみよう。

1）Cramer の公式　図－１に見られるようにCramer の公式は31％の著書で取り上げられている。この解法は行列式の計算に基礎をおいており，数学的にはすぐれた解法である。しかし，行列式の計算を最も能率的に行なったとしても演算回数が多く，実用的ではない。したがって，数値解析法としての教科内容から省くほうがすっきりする。

2）三角化法　Gaussの消去法は三角化法の一種であって，演算回数の点から最もすぐれた方法といわれている。[1,2]事実，図－１からわかるように最も広く取り上げられている。

三角化法に付属するが，三角分解法とも呼ぶべきコンパクト法が約1/4の著書で取り上げられている。Crout法とDoolittle法は三角分解のアルゴリズムに若干差があるのみで基本的には同一の解法である。表－１に示す通りCroutのみを取り上げているのが6冊，Doolittle法のみを取り上げているのが1冊，両解法にふれているのが7冊あり，なんらかの形でコンパクト法にふれているのは15冊である。この方法の特徴は右辺が複数組ある場合にはマトリックス分解は一度でよく，別の右辺に対してはマトリックス積の計算のみで解が得られる点にある。Gaussの消去法が右辺が複数組ある場合には不利であるのに対して，コンパクト法はもっと強調されてよい。その意味からGaussの消去法にふれずに，Crout法にふれている著書が1冊ある。最近，三角分解がGaussの消去法のアルゴリズムで可能なことがわかり[2]，Crout法・Doolitle法などというとらえかたをせずに，一つの三角分解法としての形で講義されるのが望ましい。コンパクト法の中でCholesky法が33％の著書で取り上げられているが，マトリックスが対称であることの特徴を考慮した解法としてこの方法のみが取り上げられていることになる。

表－１

組み合わせ ＼ コンパクト法	A	B	C
Crout 法	○	＼	○
Doolittle 法	＼	○	○
取り上げられている著書	6	1	7

3）Gauss－Jordan法　三角化法に対する対角化法ともよぶべきGauss－Jordan法はGaussの消去法と並んで広く用いられてきた解法である。しかし，演算回数はGaussの消去法では$n^3/3$であるのに対して，Gauss－Jordan法では$n^3/2$となり，ほとんどGauss－Jordan法が講義されなければならない理由はない。ただし，Gaussの消去法のように前進消去と後退代入という異なった２つのアルゴリズムから成り立つのではなく，Gauss－Jordan法では単一のアルゴリズムで解が得られるので分かり易い。また，逆マトリックスを求める方法として上記の種々の解法がそのまま利用できるが，プログラミングの点からはGauss－Jordan法の方法が簡潔で有利である。

しかし，逆マトリックスの要素そのものを求める必要の無い限り，三角分解法を用いれば，逆マトリックスを用いてできるほとんどすべてが少ない演算回数でできる。[2]その意味からGauss－Jordan法は取り上げる必要が無い。コンピュータ・メーカの提供する数値計算ライブラリーの最新版においてはGaussの消去法に席を譲り，Gauss－Jordan法がはずされることが多い。

今回の調査によれば45冊中15冊（33％）の著書が逆マトリックスについてふれている。別の目的を持つ場合は別として，連立1次方程式の1解法としてはふれる必要がないのではないか。

4）反復法　反復法としては17の解法に分類して調査したが，図－1のごとくわずか5解法が取り上げられているのみである。反復法は線形反復法と非線形反復法に分けられるが，線形反復法としては78％の著書がGauss-Seidel法を取り上げている。そのつぎに多く取り上げられているのがJacobi法とSOR法である。Jacobi法とSOR法を取り上げている著書では必ずGauss-Seidel法が取り上げられている。したがってGauss-Seidel法を取り上げたのち，Jacobi法かSOR法を取り上げるどうかが問題となる。表－2に示す通りGauss-Seidel法とJacobi法を取り上げている著書は5冊，Gauss-Seidel法とSOR法を取り上げている著書は5冊，3解法とも取り上げられている著書は8冊で，Gauss-Seidel法のみ取り上げられているのが17冊であるという現状である。計算のアルゴリズムから考えれば，Jacobi法とGauss-Seidel法とはっきりがあり，説明が簡潔であるが，収束性の点からJacobi法は劣るので，Gauss-Seidel法に的をしぼりさらに収束を加速する意味でSOR法にふれるのが1つのやり方である。

表－2

線形反復法 ＼ 組み合わせ	A	B	C	D
Gauss-Seidel法	○	○	○	○
Jacobi法	○	＼	○	＼
SOR法	＼	○	○	＼
取り上げられている著書	5	5	8	17

つぎに非線形反復法として種々あるが図－1に見るように共役勾配法と最急降下法のみである。その内訳は表－3に示すように，共役勾配法のみを取り上げているのが6冊，最急降下法のみを取り上げているのが3冊しかなく，両解法にふれているのが9冊である。非線形反復法として1つだけ取り上げるとすれば共役勾配法であろう。

表－3

非線形反復法 ＼ 組み合わせ	A	B	C
共役勾配法	○	＼	○
最急降下法	＼	○	○
取り上げられている著書	6	3	9

したがって，反復法としてはGauss-Seidel法・SOR法・共役勾配法の3つを取り上げる方法が考えられる。しかし，共役勾配法は，SOR法より収束性を高めるために非線形計算を取り入れたものであることを考えると，基本となるGauss-Seidel法と収束を早めるための共役勾配法という2つを取り上げる方法もある。

4. その他の計算技法

連立1次方程式の解法に関する計算技法の中で重要なものについて個々に述べる。

1）ピボッティング　係数マトリックスの対角要素がゼロになる場合を避けるため，また丸めの誤差を小さくするためにピボッティングは有効であることはよく知られている。ピボッティングを取り上げている著書は調査した45冊中で24冊で，うちGaussの消去法を取り上げている著書39冊中19冊である。Gauss-Jordan法を取り上げている著書23冊中11冊である。およそ半分の著書がピボッティングについてふれていることになる。やや少ないように思われる。

2）スケーリング　ピボッティングのみでもかなりの効果を発揮するが，ピボッティングを行なう場合，スケーリングを併用すると好ましいことがよく知られている。スケーリングについてふれている著書は調査した45冊中わずかに10冊である。うちGaussの消去法を取り上げている著書39冊中9冊，Gauss-Jordan法を取り上げている著書23冊中4冊のみがスケーリングについて述べている。およそピボッティングについてふれている著書の1/2程度である。構造解析など通常解かれる連立1次方程式に対してはスケーリングの必要性はあまりないであろうが，行および列に対する完全なスケーリングでなくて，行のスケーリングでよいからふれておく必要があろう。

3) 倍精度計算　マトリックスの性質が悪い場合に倍精度計算の必要な場合がある。倍精度計算についてふれている著書は調査した45冊中たった2冊である。しかし，数値計算誤差については45冊中12冊（27%）の著書がふれている。最近のコンピュータのコンパイラは自動的に倍精度計算処理ができるようになっていることを考えるとあまりふれる必要もないであろう。しかし数値計算誤差についてはふれる必要があろう。

4) ベクトルのノルム　連立1次方程式の解法における丸め誤差の解析に非常に有効である。特に反復法の場合の収束の判定に欠かすことができない。調査した45冊中15冊（33%）の著書に述べられている。

5) 大次元連立1次方程式の解法　最近，有限要素法を初めとして多くの分野で大次元の連立1次方程式が解かれることも多くなった。コンピュータの記憶容量・計算時間および解の精度が問題になる。大次元である場合の解法にふれている著書は調査した45冊中8冊で，うちスパースマトリックスやウエブフロント法を取り上げているのが6冊，帯マトリックスにふれているのが2冊である。現在13%程度の著書しかふれていないことがわかったが，コンピュータの利用が高まっていく将来を考えると，基礎的な知識のみでも与える必要があると思われる。

参考文献

1) Westlake, J.R : A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations, John Wiley & Sons, New York, 1968.（戸川隼人 訳：コンピュータのための線形ハンドブック，培風館，1972）
2) Forsythe, G.E. and Moler, C.B.: Computer Solution of Liner Algebraic Systems, Prentice-Hall, 1967.（渋谷政昭・田辺国士　訳：計算機のための線形計算の基礎――連立1次方程式のプログラミング――，培風館，1969.）
3) 牧之内三郎，鳥居達生：数値解析，オーム社，1975.
4) T. R. マッカーラ（三浦 功／田尾陽一 共訳）；計算機のための数値計算法概論，サイエンス社，1972.
5) 土木学会編；土木工学における数値解析／基礎編，サイエンス社，1974.
6) 一松 信；数値計算，至文堂，1963.
7) B. ウェンドロフ（戸川隼人訳）；理論数値解析，サイエンス社，1973.
8) 一松 信；数値解析，税務経理協会，1971.
9) 森 正武；数値解析，共立出版，1973.
10) G.E. Forsythe／M.A. Malcolm／C.B.Moler（森 正武 訳）；計算機のための数値計算法，科学技術出版，1978.
11) 平野／戸川／藤井／三好；計算技術および数値計算法，培風館，1971.
12) F. ジョン（藤田宏，名取亮 訳）；数値解析講義，産業図書，1975.
13) 篠崎寿夫・松下祐輔 編；工学のための応用数値計算法入門（上），コロナ社，1976.
14) 雨宮綾夫，田口武夫 編；数値解析とFORTRAN，丸善，1969
15) 洲之内治男；数値計算，サイエンス社，1978.
16) J. ウォルシュ（高須達監訳），数値解析概論，日本評論社，1970.
17) 山本哲朗；数値解析入門，サイエンス社，1976.
18) 藪下 信；初等数値解析，森北出版，1977.
19) J.M. マコーミク／M.G. サルバドリ（清水留三郎）；FORTRANによる数値計算プログラム，サイエンス社，1970.
20) 一松 信；電子計算機と数値計算，朝倉書店，1973.
22) 宇野利雄；計算機のための数値計算，朝倉書店，1962.
23) D.G. モースント／C.S. デュリス（村上温夫訳）；初等数値解析，共立出版，1975.
24) 新谷尚義；数値計算I－線形計算－，朝倉書店，1967.