

高次方程式の近似値解法

福井工業大学 正員 〇 和田 久範
大野工業高校 宮内 浩彦

1. まえがき

土木工学の分野における高次方程式はほとんど実係数の方程式であり、かつその実根の近似値を求めることを以て足りることが多い。電算機による実係数方程式の解法には、いろいろの方法が用いられるが、いまここに提案する方法は方程式を解くための計算尺の手法を電算機によって行うものである。この計算尺の方式は、方程式の各項の係数と x のべき計算の積を対数尺で行い、次にそれらの和の計算を筆算によりながらカーソル線を移動し、 $f(x)=0$ の位置を求めるという極めて原始的な方法である。従って次数の高いものほど労力と時間を要し、おのずから限界が生じる。しかしこの手法をプログラム化し電算機によって演算を実施させるならば、極めて効率的に問題が処理できるので、方程式の近似値解法として十分に役立ち得るものと考えるのである。

2. 方程式を解くための計算尺の考え方

方程式を解くための計算尺では対数尺が用いられる。対数尺は方程式の各項の係数とべき計算の積が求められるように構成され、 x の1次項には1単位対数尺、2次項には2単位対数尺... n 次項には n 単位対数尺が用いられる。いまこれらの対数尺を仮りに x 尺、 x^2 尺... x^n 尺と名づけ、又解答を与える対数尺(1単位対数尺)を解答尺と呼ぶことにする。図-1にこれを示す。(写真-1は3次方程式用の計算尺である)

この対数尺を用いて方程式(1)を解くには各滑尺を図-2のように配置する。

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0 \dots (1)$$

(写真-2は根を求めるカーソル線の位置を示す。)

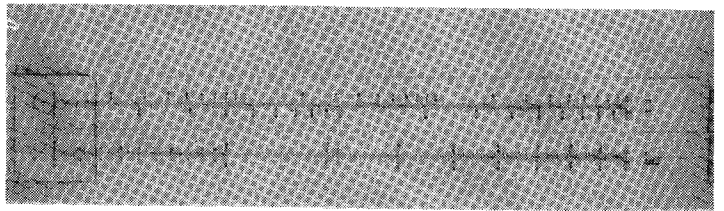
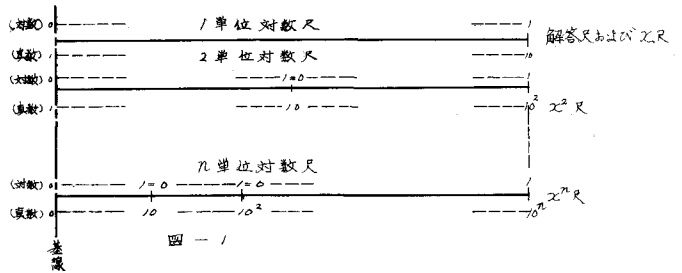


図-2において解答尺上の任意の点 α をとり、基準に平行な縦線を引き各滑尺との交点の目盛を $a, b, \dots, c$ とすれば、

$$a = a_{n-1} \alpha$$

$$b = a_{n-2} \alpha^2 \dots c = a_0 \alpha^n$$

となる。これらの値は方程式の各項の値を対数尺を用いて求め

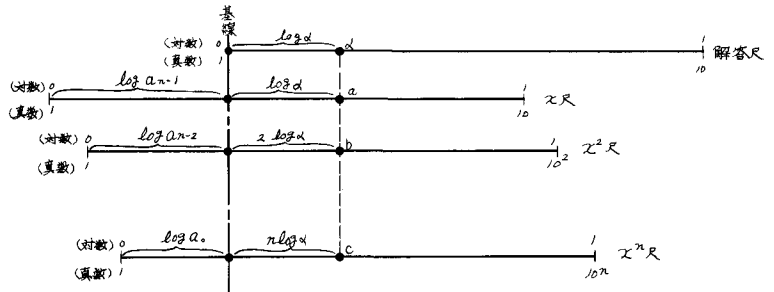
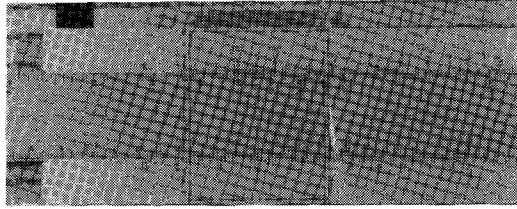


図-2

たので、これに常数項 a_n を加えると $f(x)$ の値が求められる。もし x がこの方程式の根であれば $f(x) = 0$ 、つまりそのような条件を満足する x を解答尺の中で見出すことが方程式の根を求めることになる。



$$x^3 + 4.5x^2 + 2x = 10.78$$

カーソル線の位置

x^3 尺: 1.77	ANSR: 1.21
x^2 尺: 4.59	
x 尺: 2.42	
計	10.78

以上が計算尺により方程式を解く考え方である。ところでこの方法を電算機で処理するには、さらに次のことがらを解決しなければこれを一般化することはできない。

- i) 上記の説明における $a, b, \dots, C$ などは対数目盛を真数に直した値であるが、対数目盛は仮数であるから、真数に直すときに位取りをつけるルールが必要である。
- ii) 計算尺ではカーソル線によって各滑尺の目盛を切断するのであるが、電算機の演算においてもそれに代わるものが必要である。

以上の2点について次に説明する。

3. プログラム化のための位取り

さきに述べたように一般に n 次方程式を解くには、 n 個の滑尺と解答尺が必要で、それぞれの滑尺は方程式のそれぞれの項の計算を対数計算によって行うものであるが、その場合に仮数と指標をわけて取扱うことにする。指標は位取りを定めるものであるが、位取りについては解答尺および各滑尺の関連において統一した取扱いをする方がよいからである。

さて、解答尺の対数目盛を真数に直した値を x とすれば $1 \leq x < 10$ 、これに位取りの指数 10^p (p は整数) をつけることにより x を表わすと $x = 10^p \bar{x}$ すなわち 10^p が解答尺の位取りである。又同時に各滑尺の位取りも次のように定まる。

$$\left. \begin{array}{l} 10^p \leq \text{解答尺の位取り} < 10^{p+1} \\ 10^p \leq x \text{ 尺の位取り} < 10^{p+1} \\ 10^{2p} \leq x^2 \text{ 尺の位取り} < 10^{2(p+1)} \\ \vdots \\ 10^{np} \leq x^n \text{ 尺の位取り} < 10^{n(p+1)} \end{array} \right\} \text{----- (2)}$$

次に各項の係数による影響を考える必要がある。いま方程式の各項の係数を $a_0 = 10^{e_0} A_0, a_1 = 10^{e_1} A_1, \dots, a_{n-2} = 10^{e_{n-2}} A_{n-2}, a_{n-1} = 10^{e_{n-1}} A_{n-1}$ とおけば(1)式は、 $10^{e_0} A_0 x^n + 10^{e_1} A_1 x^{n-1} + 10^{e_{n-2}} A_{n-2} x + 10^{e_{n-1}} A_{n-1} x + a_n = 0$ ----- (1')
(ここに $e_0, e_1, \dots, e_{n-2}, e_{n-1}$ は整数, $A_0, A_1, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}$ は整数部が1桁の数である。)

この式を見ると x 尺には $10^{e_{n-1}}$, x^2 尺には $10^{e_{n-2}}$, ..., x^n 尺には 10^{e_0} の位取りが加わることがわかるのでこれを(2)式にまとめると次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} 10^p \leq \text{解答尺の位取り} < 10^{p+1} \\ 10^{p+e_{n-1}} \leq x \text{ 尺の位取り} < 10^{p+1+e_{n-1}} \\ 10^{2p+e_{n-2}} \leq x^2 \text{ 尺の位取り} < 10^{2(p+1)+e_{n-2}} \\ \vdots \\ 10^{np+e_0} \leq x^n \text{ 尺の位取り} < 10^{n(p+1)+e_0} \end{array} \right\} \text{----- (3)}$$

4. プログラム作成の考え方 (第I法)

図-2よりわかるように、解答尺の対数目盛 $\log x$ に対し、 x 尺: $\log a_{n-1} + \log x$, x^2 尺: $\log a_{n-2} + 2 \log x$...

--- x^n 尺: $\log a_0 + n \log x$ が対応する。

ここで解答尺の対数目盛(仮数)を ΔL で刻むことにすると、解答尺および x 尺の ΔL 刻みに対し、 x^2 尺は $2\Delta L$ 刻み---

--- x^n 尺は $n\Delta L$ 刻みで対応することがわかる。

以上によって方程式の各項の計算ができるのでこれらの関係をまとめると表-1 のようになる。

各項の計算を表-1 により求め、それらの和に a_n を加えれば $f(x)$ の値が求まる。 $f(x) = 0$ の位置がわかればその位置における解答尺から根が得られる。

	第1回(演算の始点を解答尺の K にする)	第2回以降
解答尺	$(\log K \text{ の真数}) = K$	(前回の対数値 $+ \Delta L$) の真数
x 尺	$(\log A_{n-1} + \log K + \text{位取り指数})$ の真数	(前回の対数値 $+ \Delta L$) の真数
x^2 尺	$(\log A_{n-2} + 2 \log K + \text{位取り指数})$ の真数	(前回の対数値 $+ 2\Delta L$) の真数
⋮	⋮	⋮
x^n 尺	$(\log A_0 + n \log K + \text{位取り指数})$ の真数	(前回の対数値 $+ n\Delta L$) の真数

(1) この表の場合は方程式の(1)式と位取り指数(3)式によるものである。もし方程式が(1)式で与えられる場合は位取り指数は(2)式によることになる。
 (2) 解答尺および各滑尺において演算が左から右へ進む場合単位尺が終点に達する毎に位取り指数を1増にする。

表-1

なお本法では根に収束させるために $f(x)$ の符号が変化する位置で2分法に切替える方法を採用した。この場合の2分法は対数を2分するための正しい2分法ではないが根に収束させるには差支えないと思う。

5. プログラム作成の考え方(Ⅱ法)

さきの計算法では対数を真数に直すための手数を要するのであるが、その手数を省くため、対数値を予め真数に直した値で記憶させる方法がある。これは解答尺および各滑尺を構成する単位対数尺を対数刻み ΔL で分割し、

その刻みを番地として真数を記憶装置に格納しておき、各項の x のべき計算を行う場合に、該当番地に記憶された数値を呼び出す方法である。そこで呼び出された数値に位取りをつけ、かつその項の係数を乗ずると各項の値が求められる。

(各項の係数の値を番地に置き換えると、その番地に続いて x のべき計算の番地を追加すればよいので計算が速くなるが係数を番地に直すときの数値の処理に誤差が生ずるのでよい結果が得られない。)

なおこの場合における解答尺と各滑尺の

配置は図-1 の状態であるのでそれらの番地の対応関係は表-2 のようになる。

	基準における対応関係	演算の始点 K における対応関係	第2回以降の対応番地
解答尺	0	$\frac{\log K}{\Delta L}$	前回番地 + 1
x 尺	0	$\frac{\log K}{\Delta L}$	前回番地 + 1
x^2 尺	0	$\frac{2 \log K}{\Delta L}$	前回番地 + 2
⋮	⋮	⋮	⋮
x^n 尺	0	$\frac{n \log K}{\Delta L}$	前回番地 + n

(1) この表の場合は方程式(1)式と位取り指数(2)式によるものである。
 (2) 解答尺および各滑尺において演算が左から右へ進む場合単位尺の終点に達する毎に位取り指数を1増にする。
 (3) 演算の始点 K を番地に直す場合端数を生ずると誤差が生じるので、近接の番地に記憶された数値を K とする。

このようにして各項の値が求まれば、それらの和に定数項 a_n を加えて $f(x)$ の値を求めることができる。なおこの方法によって $f(x)$ の符号の変化するところまで走査を進め得るが、根の収束については前述の方法に切替えなければならない。その場合2分法だけでなく、ニュートン法、はさみうち法などの初期値を与える方法としてもこの方法が利用できる。

以上いろいろのケースは考えられるが、いずれの場合も代数学の諸法則を用いて、予め奥根の数を把握し、又根の上限および下根などを求め、区間を限定して演算に着手するのがよいと思う。

