

FEMによる拡散解析プログラムの開発

(株) 大林組 太田 順
徳永正博
○ 中尾通夫

1. はじめに.

筆者らは、数年前より、土木関連の主に非構造分野を対象とした問題に、有限要素法(FEM)を適用した一連のプログラムを開発している。それまで、浸透流、熱伝導等の解析プログラムとして差分法やFEMを使った単能の、比較的小次元のものが開発されていたが、それらは、規模も小さく、それぞれのプログラム間での連成解析が出来なかったため、それらの機能を拡大し、なるべく新しく、有利な手法を取り入れ、大次元の解析能力を持つ、図化機能も考慮した、汎用的なプログラムをめざして開発に着手した。また、計算法、解析手法等の進歩が著しい分野でもあり、出来るだけそれに対応出来るように、プログラムの修正および追加を容易にしようとするシステムとなるように努めた。昨年の当シンポジウムにおいては、本システムの構成、内容および開発済みのプログラムの概要とその使用状況について報告したが、今回、まず本システムの現況を報告し、次いで新たに拡散解析プログラムが開発されたので、それについて報告する。最後に、その使用例を載せる。

2. 本システムの全体構成

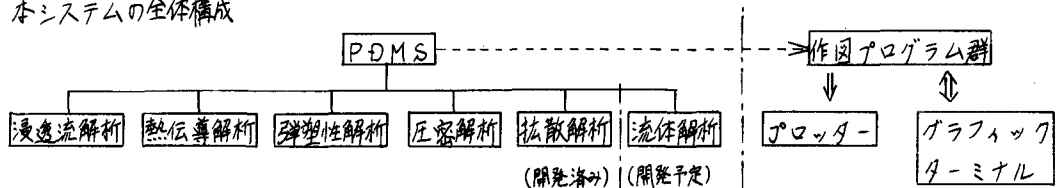


図1 全体構成概略図

現在の本システムは、図1の様に、1つのコントロール・システム(PDMS)と5つのサブシステム(解析プログラム)から成る。コントロール・システムで、インプット・データ、中間データおよび解析プログラム相互関係等を一括して管理しており、幾何形状作成、荷重作成、境界条件処理等のデータ・ジェネレーション機能を有している。また、中間データの保存、サブシステム間の連成解析も可能である。解析プログラムのプレ、ポスト・プロセッサとして、グラフィック・ターミナルによるTSS処理、およびプロッターによるBatch処理用の作図プログラム群とも有機的につながっており、各段階での図化が可能である。現在、このシステム内のプログラムの修正および追加は、ほとんどTSS処理としている。

3. 拡散解析

環境アセスメントということが言われるようになって久しいが、日々の生活の中で環境悪化の防止という意識が、定着したと言っても過言ではない。すでに、米国ではNEPA(National Environmental Policy Act)が制定され、我が国においても、環境アセスメントに関する法律が制定されるのは間近だと思う。このような状況から、近年、当社のようなゼネコンにおいても、開発事業等を行うに当たり、前もってその影響評価を行なうことが不可欠となってきている。その中には、水質汚濁や大気汚染の問題がある。そして、このような流れで拡散現象の問題に対して、古くから理論的な解明の努力がなされ、その成果が報告されている。しかしながら、大気汚染の予測手法としてよく使われるガウス型のプルーム・

モデルやパフ・モデルのように、一様流れや流れを無視した解析解しが得られない。それで、シミュレーションによる方法が一般的に行なわれているようである。近年、電子計算機の大形化、高速化が進み、数値シミュレーションによる予測手法が主流を占めているようである。この方法では、差分法による方法が一般的であるが、最近、変分原理が存在しなくても、重み付き残差法によりFEMの定式化が可能となったことにより、FEMによる方法も増えて来たようである。このような状況から、水質汚濁、大気汚染等の数値シミュレーションを行なえるようにするための第一段階として、FEMによる拡散解析プログラムを開発した。

ここでは、拡散場を支配する方程式として、Fickの拡散方程式を取り上げ、問題を二次元に限定して行なう。このプログラムでは、物質拡散モデル(式1)と熱拡散モデル(式2)の2つのモデルを取り扱う。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + u_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) + Q \quad \dots (1)$$

ここで、 ϕ : 濃度 u_x, u_y : x, y 方向の流速 K_x, K_y : x, y 方向の拡散係数 Q : 汚濁負荷

境界条件: $\phi = \phi_0$ (固定)

$$K_x \frac{\partial \phi}{\partial x} l + K_y \frac{\partial \phi}{\partial y} m = 0 \quad \text{ただし、} l, m \text{ は境界面上での外向き法線方向余弦}$$

$$\sigma C_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial \theta}{\partial y}) + Q \quad \dots (2)$$

ここで、 σ : 媒体密度 C_p : 定圧比熱 θ : 温度 u_x, u_y : x, y 方向の流速

K_x, K_y : x, y 方向の熱伝導率 Q : 発熱量

境界条件: $\theta = \theta_0$ (固定)

$$K_x \frac{\partial \theta}{\partial x} l + K_y \frac{\partial \theta}{\partial y} m + \alpha (\theta - \theta_0) = 0$$

ここで、 l, m : 境界面上での外向き法線方向余弦 α : 熱伝達率

θ_0 : 外部流体の温度

これらの式に重み付き残差法を適用して、FEMの定式化を行なう。その概略を以下に述べる。式1および式2を簡単のために式3と置く。

$$T(\phi) = a \frac{\partial \phi}{\partial t} + b \frac{\partial \phi}{\partial x} + c \frac{\partial \phi}{\partial y} - d \frac{\partial \phi}{\partial x} - e \frac{\partial \phi}{\partial y} - Q = 0 \quad \dots (3)$$

まず、領域を有限個の要素(四角形のアイソパラメトリック要素)に分割して、その要素内の未知量 ϕ を形状関数 $[N]$ と要素節点の ϕ の値 $\{\phi\}^e$ とで式4のように表す。

$$\phi = [N] \{\phi\}^e \quad \dots (4)$$

ただし、 $[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4]$

$$\{\phi\}^e = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]^T$$

Galerkin法により、重み関数として N_m を用い、残差の式を求めると、

$$\int_V N_m \cdot T(\phi) dV = 0 \quad \dots (5)$$

ここで、 V は今考えている領域

式5では、試行関数は二次微分を持たないので、部分積分を行なうことによって微分次数を下げる。このようにすると、式5は、次の式6のように書ける。

$$[C] \{\frac{\partial \phi}{\partial t}\}^e + [K] \{\phi\}^e = \{F\} \quad \dots (6)$$

ここで、 $C_{ij} = \int_V a N_i N_j dV$

$$K_{ij} = \int_V (b \frac{\partial N_i}{\partial x} N_j + c \frac{\partial N_i}{\partial y} N_j + d \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + e \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}) dV$$

$$F_i = \int_V N_i Q dV$$

式6の第一項は、非定常項で、時間の関数となる。ここでは、式6に対し、重み付き残差法による時間のFEM化を行なう。時間区間内の $\{\phi\}$ の値は、時間区間 Δt と考えると、次のマトリックスで表示出来る。ただし、 $\{\phi\}_0$ は既知とする。

$$\{\phi\} = [N_0 \ N_1] \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} \quad \dots (7)$$

$$\text{ただし、 } N_0 = (\Delta t - \tau) / \Delta t, \quad N_1 = \tau / \Delta t$$

時間微分項は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ \phi \} = \left[\frac{\partial N_0}{\partial t} \quad \frac{\partial N_1}{\partial t} \right] \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} \quad \dots (8)$$

式8を式6に代入し、残差方程式を得、積分を行なうと、

$$\frac{1}{\Delta t} [C] \{ \phi \}_1 + \frac{1}{\Delta t} [K] \{ \phi \}_1 = \frac{1}{\Delta t} [C] \{ \phi \}_0 - \frac{1}{\Delta t} [K] \{ \phi \}_0 + \frac{2}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \{ F \} \tau \, d\tau \quad \dots (9)$$

となる。以上より全要素の寄与を求め、連立方程式を解くことにより解が求まる。

非定常項を取り扱う方法として、上述の時間のFEM化と、以前から行なわれている差分化による方法等があるが、後に挙げる参考文献などから、 Δt の選定方により、差分化の方法は、解が不安定になることがあるが、それに比較して、FEM化の方法は、安定性、収束性が優れているようである。従って、長時間の時系列シミュレーションを行なうような場合には、FEM方式は、適した方法であると思われる。

4. 使用例

今回開発した拡散解析プログラムは、完成したばかりであり、未だ、実使用例はない。従って、当社において過去に行なった数値シミュレーションの中から、比較的データのそろっている一例（他社計算機センターの、差分による潮流および拡散プログラムを使用している）を選んで、このプログラムの使用例とする。

これは、下水終末処理排水による汚濁拡散シミュレーションである、図2は、ある海域をメッシュ分割した図であり、この海域には、1本の河川が流入している。下水処理排水による影響範囲は、この海域内とし、現況の汚濁発生源は、河川部のみと考え、将来の汚濁発生源は、河川と下水処理場の2ヶ所と考えている。また、下水処理排水の放流点は2ヶ所（図2のA、B）を考えている。

現在、流体解析プログラムは未開発であるため、流況に関するデータは全2、以前の計算結果をそのまま、あるいは修正（現況および将来の流速値は、特定時刻の結果しかないで、必要な時刻の流速値は、その結果の値と比例配分して求める。等）して用いる。境界条件は、湾口部のC0の濃度を現況、将来とも0、2 PPM、河川の流入量は466560 (m³/d) で、平均濃度を3.5 PPM、下水処理場の排水量は40000 (m³/d) で最大濃度を20 PPMとし、拡散係数は、以前の計算と同じとする。（最大流速より求められている）

以上の計算結果を以下の図に示す。図3～6は、現況、将来の満潮時、干潮時の流速図であり、図7～9は現況および放流点A、Bのケースの平均濃度のコンター図である。参考として、以前の計算結果の各ケースの平均濃度を図10に示す。なお、今回の計算は、10～14潮時行ない、 $\Delta t = 600$ 秒とした。

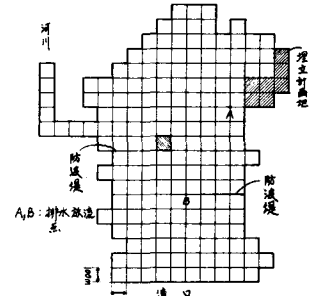


図2 メッシュ分割図

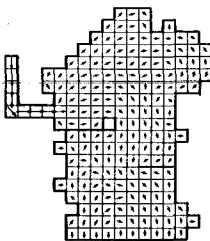


図3 現況の満潮時流速図

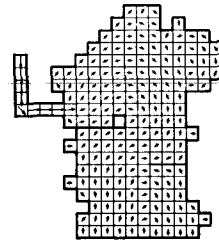


図4 現況の干潮時流速図

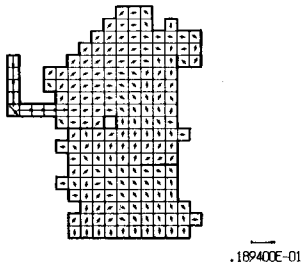


図5 将来の満潮時流速図

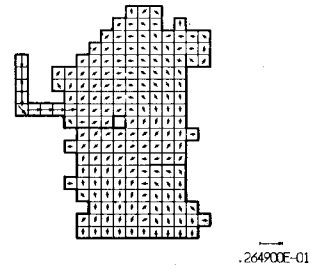


図6 将来の干潮時流速図

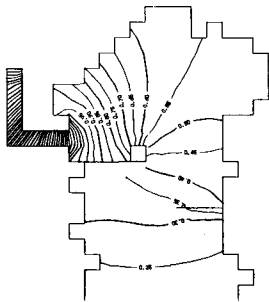


図7 現況の平均濃度コンター図

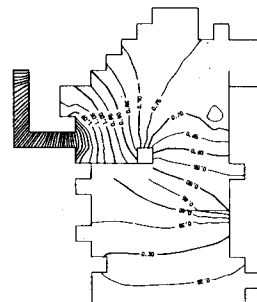


図8 将来(A)の平均濃度コンター図

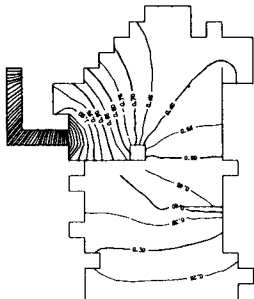


図9 将来(B)の平均濃度コンター図

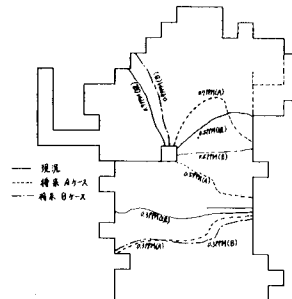


図10 以前の計算結果の平均濃度図

参考文献

1. 「マトリックス有限要素法」 O. C. ツィエンキーヴィッツ著 吉識雅夫・山田嘉昭監訳 培風館
2. 「重みつき残差法と変分原理」 B. A. フィンレイソン著 鷲津久一郎他訳 培風館
3. 「有限要素法による拡散予測手法について」 小林三男・荒木正夫・富所五郎
オ32回年次学術講演会講演概要集 土木学会
4. 「FEMによる非構造解析プログラムの開発とその利用」 太田順他
電算機利用に関するシンポジウム講演概要 土木学会
5. 「環境アセスメントの手法と実例資料集」 フジ・テクノシステム
6. 「水質汚濁 現象と防止対策」 杉本昭典著 技報堂