複雑な形状をした構造物に対する節点番号付けアルゴリズム

京都大学工学部　正員　白石成人
岡山大学工学部　正員　○谷口健男
京都大学大学院　学生員　殿本　卓

1．まえがき

マトリクス構造解析の分野で扱われる連立一次方程式の係数行列は，正定値，対称　および疎（多くの零要素を含む）であることが多く，このような方程式に対して有効な諸解法は全て上記特性を利用している。特に第3の特性の利用は，消去演算に不必要な零要素を可能なかぎり除き，入力データ量および演算回数の節約に有効であるといえる。

いま，係数行列内の零要素を調べてみると（i）各行（列）の最終非零要素より外側の零要素は消去過程を通じて零のままであり，（ii）その内側の零要素には，消去演算の途中で，非零化するものと，最後まで零のままのものがあるのみならず，非零化する要素の数は消去の順序によって変化することに気づく。(i)の特性を利用するのが，いわゆる帯行列法，プロファイル法であり，(ii)の性質を有効に利用するものとして，スパースマトリクス法が挙げられる。従って，それらの方法を最も有効に利用する為には，前者については，領域（各行・列の最終非零要素と主対角で囲まれる部分）の，また後者については，非零化する要素の個数（フィル・インと呼ばれる）を，最少化する方法が必要となり，それぞれ，帯幅（プロファイル）最小（少）化法，フィル・イン最少化法が今日までに数多く提案されている。（i），（ii）の方法を比較すれば，前者の方が，そのプログラミングの容易さ，入力データの構成および訂正・修正の容易さに優れ，一般にはよく利用されていることより，本論文では(i)の方法のみを扱うことにする。

上述のごとく，前者を有効に利用するには，係数行列内非零要素の存在領域を最小にすることが必要であるが，そのためのラベリング・アルゴリズムは NP-Complete 問題と呼ばれ，有効なアルゴリズム設計はほとんど不可能と考えられている。[1),2),8)] しかしながら，構造系の形（位相構造）によっては，ラベリングの難易にも差があることが一般に知られ，[2)] 例えばチェーン状構造物，すなわちトラス橋のように大体において一様な幅をもち，全ての部材長が大体において等しいような系に対するラベリングは容易であり，かつその結果は帯行列となる。一方，板のF.E.M分割のような不均一なメッシュを有する系に対するラベリング，あるいは送電鉄塔のように突出枝をもつ系に対する automatic Labeling は困難であり，かつその帯領域の幅は一般には一様とはなりにくい，あるいは例え一様な幅を得ても，その領域内に数多くの零要素を有する場合が多い。[3)]

(i)の方法には，いわゆる帯行列法とプロファイル法があり，それぞれが得意とする行列の非零要素領域は非常に異なる。従来のこの分野へのグラフ理論的研究により，行列の非零要素域の違いは，明らかに系の位相構造の違いを意味することが知られている。[4)] この点に注目して，本研究ではプロファイル型係数行列の示すグラフの位相特性をまずさぐり，そのグラフと，本論文のテーマである複雑な形状を有する系のグラフを対比せしめ，それらが一致することを示す。これにより，このような系はプロファイル法で解くべきであることが示されることになる。ついで，プロファイル法で解くとき必要となる系に対するラベリング法を提案する。ここで与える方法は，いわゆるNP-Complete問題に対する一つの回避策と考えられるものであり，複雑な系をより簡単な系の集合に一度置き換えることにより，困難なラベリングを容易ならしめようとするものである。

2．プロファイル法で扱われる構造系[4)]

プロファイル法で扱われる行列は，一般に図－1のような非零領域を有する場合が多い。すなわち，上三角部において列方向への非零要素存在域が突出している場合に，この方法は有効である。

いま，図－1のグラフ表現を考える。扱っているのは解析モデルの係数行列であることより，図－1の行列，T，において各行（列）には，その主対角要素を除き少くとも1個の非零要素が存在する。すなわち，

Tが1個の解析モデルの係数行列であれば、そのグラフは1つの連結グラフとなり、従って上記条件を満たす。さらに Tは対称性を有すると仮定する。

Tが$(n \times n)$行列であれば、まず n個の点を準備し、Tの第i行(列)、T_i に対し第i番目の点 v_i を対応せしめる。Tの上三角部の全ての要素 T_{ij} に対し

$$\begin{cases} もし\ T_{ij} \neq 0\ ならば、v_i と v_j を線で結ぶ。\\ もし\ T_{ij} = 0\ ならば、v_i と v_j は結ばない。\end{cases} \qquad (1)$$

の操作を行う。ここで T_{ij} は Tの(i,j)要素を示す。また $i=1 \sim n$, $j=i+1 \sim n$。

(1)の操作により、Tのグラフ表現 $G(n,m)$ を得る。ここで nは節点数、mは線数を示す。mに対しては

$$m = \{Tの上三角行列内非零要素数,但し主対角要素は除く\} \qquad (2)$$

一般に帯行列はチェーン状構造物、すなわち各部分構造が直列につながっている系に対応することは良く知られている。その最も簡単な例は 半帯幅=2に等しい帯行列であり、そのグラフは 全ての点が直列につながったトリーグラフとなる。プロファイル型行列においても その部分行列が帯行列を構成しておれば その部分に関しては チェーン状の系が存在することを意味する。従って残された問題点は 列方向への突出領域内に位置する非零要素である。簡単のため、唯1つの列方向への突出領域をもつ行列を考える。(図-1参照) 突出領域を考慮しながら その行列を適当な数の部分行列の集合と考える。各部分行列は 少くとも帯行列の形をしており、従って それ自体1個の連結グラフ(点グループ)を示す。これを 1つの点として考えることにする。

行列Tが唯1個の連結グラフを表わすことより、プロファイル型行列には以下の2つのタイプが考えられる。

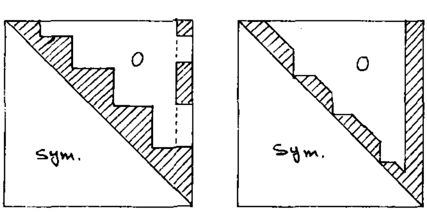
(I) Tの主対角部は帯行列を構成し、さらに そのいくつかの行においては 突出領域内にも非零要素が存在する場合。(図-1a)

(II) Tの主対角に沿う帯領域において、いくつかの行は対角要素を除き全て零要素のみよりなる。従って存在すべき非零要素は突出領域内に位置する。(図-1b)

一般には、複数個の突出領域の存在が考えられるが、これは (I),(II) の拡張として考えられる。

(I),(II) を(1)の操作に従ってグラフ表現したものが 図-2a, bにそれぞれ示される。前者は いわゆるメッシュグラフの形状を、後者は分岐枝を有するトリーグラフの形状を示しており、(I),(II)は全く異なるグラフに対応することが認められる。すなわち、行列内の非零要素の位置の違いは、グラフの大きな変化をもたらす。この2種類のグラフを それぞれメッシュ構造、および分岐を有するトリー構造と呼ぶことにする。帯行列のグラフは 明らかに分岐を有しないトリーグラフに対応する。(図-3)

図-2および3の3つのグラフを対比すると、プロファイル法で扱われる行列のグラフは相対的に複雑なものであることが認められる。分岐を有するトリー構造は、非常に複雑な構造モデル、例えば 板のFEMモデル、送電鉄塔のように、点密度が不均一な系や、外周辺が入り組んでいる系に対応し、メッシュ構造は 穴あき板のFEMモデル、タイドアーチ等の内部境界を有するような系に対応することが容易に知られる。従って、このような系に対しては、プロファイル法が有効であると言える。残された問題は、逆に系が与えられたとき、いかにうまく、プロファイル型行列の非零要素配列を与えるかというラベリング法である。



a　b

図-1

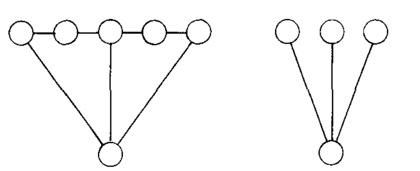

a　b

図-2

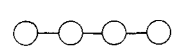


図-3

3. プロファイル最少化法の提案

3.1 メッシュ系に対するプロファイル最少化の考え方

プロファイル法における入力データ，P，に占める非零要素数は一定（グラフの線数）であることより，プロファイル最少化は P に占める零要素の数の最小化に他ならない。この零要素の数をロス，L，と呼ぶことにする。従って，

$$\min.P \equiv \min.L \tag{3}$$

いわゆるトリーグラフに対するプロファイル最少化はすでにほぼ完全なものとして提案されている。[5)] その方法は，［STEP 1］グラフを切断して分岐のないトリーグラフの集合に置き換え，［STEP 2］各部分グラフについて独立にプロファイル最少化を行い，［STEP 3］それら各部分グラフの組み合わせにおいてロスが最少となる番号グループの組み合わせを見い出す，の3ステップより成る。この方法で重要な点は

(i) min.P においては，Gを部分グラフの集合として扱ってよく Gそのままを扱う必要はない。

(ii) 各部分グラフの min.P が全体系の最少化につながる。

従って，トリーグラフに対するロス，L，は下式で示されることになる。

$$L = \sum_{i=1}^{\alpha} l_i + \sum_{j=1}^{\beta} C_j = \sum_{j=1}^{\beta} C_j \tag{4}$$

ここで l_i は i部分グラフのロスで，トリーグラフであれば零に等しく，αは部分グラフの個数，C_j は j番目の組み合わせにおいて発生するロス，βは部分グラフよりそのグラフを作るとき必要な接続回数とする。

トリーグラフに対するこの方法をメッシュ系の min.P に対し適用することを考える。その背景として

1). 一般のメッシュグラフは容易に分岐のない，あるいは分岐のあるトリーグラフに置き換えられうること。

2). そのようにして得られたグラフに対しては，上記方法が適用可能なこと。

3). 分岐のないトリー構造を有する系における最少プロファイルを与える番号順序の流れは，大体において分岐のないトリーグラフのそれに一致していることがすでに確められていること。 が挙げられよう。

いま，(4)式をメッシュ系に対して拡張して適用する。そうするとメッシュ系のプロファイル最少化は下式のように与えられる。

$$\min.L = \min.\left\{\sum_{i=1}^{\alpha} l_i\right\} + \min.\left\{\sum_{j=1}^{\beta} C_j\right\} + \min.\{\Gamma\} \tag{5}$$

右辺第1項は，切断された各部分グラフのロスの最小化であり，第2項は枝として扱われる部分グラフに含まれる点個数によって決まる。第3項Γは，ここで扱うのがトリーではなくメッシュであることより新たに発生するロスである。すなわち，全体グラフより部分グラフの集合に置き換える時必要なグラフの切断は，2本以上の線を切断することになり，この為に発生するロスと考えるべきものが第3項である。(5)式の結果，一般にメッシュ系のプロファイル最少化法は次の3階段を経ねばならないと結論される。

STEP 1. 部分グラフの集合に置換するための最適切断個所の設定法 …… 第3項

STEP 2. 各部分グラフ（凸グラフと呼ぶ）に対するラベリング法 …… 第1項

STEP 3. ラベルされた部分グラフよりそのグラフを組み立てる時の最適な接続順序 …… 第2項

通常のメッシュ系においては STEP 3 は不必要である。なぜなら，それらのいわゆる突出領域の個数は少なく，再結合の組み合わせはほとんど自明であるからである。

以下，まず凸グラフに対するプロファイル最少化法を述べ，その後，それ以外のグラフに対する方法を述べる。

3.2 凸グラフに対するプロファイル最少化法[6)]

凸グラフに対するプロファイル最少化法の具備すべき条件としては (i) 全体的にみた場合の条件と (ii) 局所的にみた場合の条件 の2種類考えられる。さらに(i)に対するものとして

1. 始めに番号を付ける点（出発点）は直径の一端である。ここで直径とは，Gの任意の2点間の最大距離。

2. 出発点よりの等距離集合（D_i，iは出発点よりの距離）ごとに番号付けを施こす。ここで距離とは 2節点間をつなぐパス（最短パス）上に位置する線数を云う。

D_iの要素数（節点数）をe_iと書くと，消去法のグラフ理論的な考え方，すなわち vertex elimination[7]により その近傍の点が完全グラフ化することより，

$$l_i \fallingdotseq \sum_{i=1}^{\delta} (e_i)^2 - m \qquad (6)$$

従って，i番目の部分グラフのロスの最小化は下式で示される。

$$\min.\{l_i\} = \min.\{\sum_{i=1}^{\delta} (e_i)^2\} \qquad (7)$$

ここで δは 等距離集合D_iの個数である。 $\sum_{i=1}^{\delta}(e_i)^2$を最小化するには まず δを最大にするのが有効であることは明らかである。δを大きくするということは，等距離集合の個数を増すことであり，対象が凸グラフであれば必然的にe_iを平均化することになるからである。δの最大値は下式で与えられる。

$$\max.\{\delta\} = \text{diameter of } G_i \qquad (8)$$

D_iに属するものとして以下の2つがあるが，その前に indegree，out-degree の定義を行う。点AとBが線で結ばれているとき，AとBは隣接しているという。 A（$\ni D_i$）の out-degree とは Aと隣接しているD_iの点の数をいい， A（$\ni D_{i-1}$）の in-degree とは Aと隣接しているD_{i-2}の点数をいう。

1．D_iの点集合における番号付けは，D_{i-1} の out-degreeの小さいものに隣接するD_iの点からうっていく。

2．out-degree 最少のものがいくつかある場合には，その中で in-degree最大のものから番号を付ける。

以上の結果より，凸グラフ（n点系）に対するプロファイル最少化アルゴリズムは次のようになる。ただしグラフの長手軸（直径方向）は明らかであると仮定する。

STEP 1．直径の両端の点の中で，out-degree 最小の点を出発点として番号nを付ける。

STEP 2．D_iの点に番号を付ける場合は，D_{i-1}の out-degreeの小さいものに隣接するD_iの点から付ける。

STEP 3．out-degree最小のものがいくつかある場合は，その中で in-degree 最大のものに，まず番号を付ける。

STEP 4．番号をうった節点の in-degree を消す。

STEP 5．2，3，4の操作を続けてすべての節点に番号をうつ。なお番号は，$n, n-1, n-2, \cdots, 2, 1$ と付ける。

3．3　外周辺が複雑な系に対するプロファイル最少化法[6]

Gの各部分グラフG_iに対しては3.2で提案したアルゴリズムを適用すると 残された問題は GよりG_iの集合への分割個所の設定法である。凸グラフとそれ以外のグラフの定義が完全でないことより，汎用性のあるアルゴリズムは見い出されていないのが現状であるが，以下示すアルゴリズムで，トラス構造等骨組系に対しては十分な結果が得られる。なお，B.P.とは D_iの中の境界点が初めて3個以上になるD_iに属し，D_{i-1}から距離1にない境界点のことを示す。

STEP 1．直径の一端より始めて，B.P.を探す。

STEP 2．Gの直径の両端点を結ぶ境界点のみの2つのパスのうち，一方を(+)，他を(−)のパスとする。

STEP 3．B.P.が(+)にあれば(−)に，(−)にあれば(+)に向って B.P.を出発点とする最短パスを探す。各B.P.の最短パスの短いものを切断線とする。

STEP 4．切断線上にあるB.P.を出発点として 1，2，3の操作を続けて，GをG_iの集合に置換する。

STEP 5．各々のG_iに対しては 3.2の節点番号付けアルゴリズムを用い，後に組み合わせる。

4．あとがき

本論文において (1).複雑な形状を有する構造系に対しては，帯行列法よりプロファイル法のほうが有効であること (2).プロファイル法をそのような系に適用するに必要なラベリングアルゴリズムの提案が示された。この結果，構造系の形状により用いる解法を選択することが，数値解法の有効利用のみならず，そのプレプロセシングであるラベリングをも容易ならしめることが示された。なお当日適用例を示す。

参考文献

1). Computing，16，pp.263−270，1976

2). 第2回電算機利用に関するシンポジウム，pp.57-60，1977

3). J. of Structural Mechanics，Vol.4 No.2，pp.197-226，1976

4). 第33回土木学会年次学術講演会，I-19，1978

5). 電算機利用に関するシンポジウム，pp.5−8，1976

6). 昭和53年度土木学会関西支部年講，I-10，1978

7). Graph Theory and Computing (ed. R.C. Road)，pp.183−217，1972

8). 第32回土木学会年次学術講演会，I-59，1977