

1. まえがき

構造解析の分野において多元連立一次方程式の解法は重要な地位を占め、さまざまな手法が提案されてくる。そのうち係数行列が Sparse であり、ある程度、非零要素が Band Form になることを利用して、必要な容量および演算時間の節約をはかろうとするものである。特によく用いられる方法としてバンドマトリクス法が挙げられ、この手法を最大限有効に用いるための Labeling 法が今日までいくつか提案されている。Labeling の目的として、1) 固定帯幅の最小化、2) 変動帯幅の最小化が挙げられるが、それらは各々次の式で表現される。

$$\text{固定帯幅: H.B.W.} = \text{minimization of } (\max_i (a_{ij} - a_{ii})) \quad (1)$$

$$\text{変動帯幅: Profile} = \text{minimization of } (\sum_{i=1}^n (a_{ii} - a_{ik_i})) \quad (2)$$

ここで、H.B.W. は Half Bandwidth の略記であり、 a_{ij} , a_{ii} , A はそれぞれ構造物特性行列 (ここで剛性行列) の i 行の最後の非零要素、対角要素、最初の非零要素を示し、Profile は各行の最初の非零要素と対角要素間にある領域を示す。すなわち、H.B.W. 最小化問題は一次元的な最適化であるのに対し、Profile 問題は二次元的な意味をもつということである。(図-1)

一方、Labeling の問題は、G.G. Alway & D.W. Martin の論文にも示されているように完全にグラフの問題であり、その最適化にはグラフ理論に立脚したアプローチが必要であることは言うまでもない。従来このテーマに対して用いられたグラフ理論の概念として“次数”、“距離”が挙げられる。この程度の導入だけでは不十分であることは、それを用いた諸手法では得られた結果の良否は対象系の形状に依存することより明白である。^{(2), (3)}

本研究においては筆者らが新たに提案している図式帯幅減少法、プロファイル減少法^{(4), (5)}について略記するとともに、それらの自動化への展望について考察を加える。ここに注意しなければならないことは、Labeling の問題はあくまで以後の構造解析のための準備段階にすぎず、よってたとえ自動化されたとしても、もし長時間の演算時間を要するものであれば価値がないということである。

2. グラフ理論に基づく節点番号付け手法^{(4), (5)}

本節において、筆者らが新たに提案している図式帯幅減少法およびプロファイル減少法の概略を、いくつかの適用例を示す。

2-1. 図式帯幅減少法

本手法は与えられた系を示すグラフを座標系 (図-2) の中に元のトポロジを保存したまま、その最大縦座標値を最小にするような図形に書き直すことであり、座標系の特性よりその縦座標値が半帯幅値を示す。

この座標系は、本手法の基盤であり、次のような特徴をもつ。

(1). 点配置: 面が縦横等間隔に切り分けられ、その交点に1点が配置される。

(2). 線配置: 節点間の接続は図示される方向のみ許容される。

(3). 点番号: 節点番号の順序は座標系に固定されている。画かれた図形の最右側節点列内最上点より下方へ、次に左2列最上点へと順次番号が付けられる。最終番号は最左側節点列内最下点に付けられる。

相隣る点列間および側点列最下点と左側点列最上点間の最大縦座標差を α とすると、ここに画かれた系の半帯幅値はその対角要素を含めて、

$$\text{H.B.W.} = \alpha + 1 \quad (3)$$

より、縦座標差の最小化と帯幅最小化は等価であることがわかる。以下本手法の手順を簡単に示す。

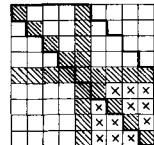
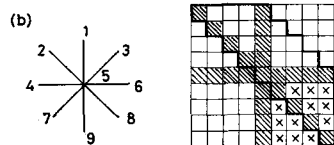
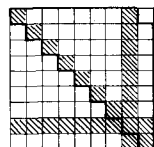
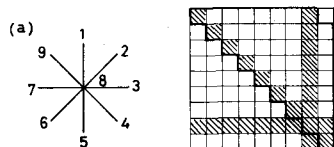


図-1. 節点番号とその係数行列

(a) - 最小バンドパイル

(b) - 最少帯幅値

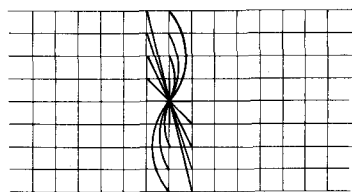


図-2. Filling Field と許容接続方向

STEP 1. 系の長手軸を見出し、座標の横軸に沿ってその点列を配置する。

STEP 2. 長手軸に対し垂直方向にその軸を横切り、系の外周上の1点より他点に至る最短パスを見出し、系に含まれる全節点と1パスのパスに含めるようにする。全てのパスを総点列として座標に配置。

STEP 3. 高さが比較的高い部分の点列内の点を左右に移動せしめ、その近傍の諸点列の高さを一致せしめる。

この操作が完了したとき、本手法は終了。Labelingは前述のように行う。

==に述べたのは Mesh System を対象とした取り扱ひ法であり、Tree System を対象とする時は取り扱ひは少々異なり、この方法を Sequential File Method と呼ぶ。

2-2. プロファイル最小化手法

この方法は特に Tree System を対象として作られた方法である。すなわち蛇束より云われるように、固定端幅は、比較的外周辺形状がなめらかな場合、プロファイルは凹曲がはげしい系に対し有効である。

系から与えられる時点での特性行列中の非零要素数 $n(n+m)$ と与えられる。

== n , m はそれぞれ節点数、線の本数である。しかしながら消去過程で零要素が、たまたま非零化するものがある。このような零要素は各行において最初の非零要素と対角要素間に位置する。またプロファイル最小化であることは、この領域内の零要素数を最小化することと他ならない。その手順は次のとおりである。

STEP 1. 各集中点について節点数の多い枝2本を選び、他には仮想的開放を与える。

== n 個の集中点について行えば、最終的に次数1の2点を両端とした

Simple Path が1本得られる。これを0級 Trunk とする。

STEP 2. 系から0級 Trunk を分離し、残った分離グラフに対して STEP 1 の操作、図-3 帯幅減少法の例題を適用し、各分離グラフ内に各々1本ずつ1級 Trunk を得る。

STEP 3. STEP 2 の操作をくり返して2級の Trunk を得る、これをくり返すことにより、与えられた系は0級より n 級までの Trunk の集合として表わされる。

STEP 4. 0級 Trunk の1端より番号付けを行う。集中点に至れば集中点に対する番号付けに先行して、その集中点より派生している枝内にある1級 Trunk の1端より番号付けを続ける。同様に、ある級 $(h+1)$ 級 Trunk の集中点に至ればその集中点に対する番号付けに先行して、その集中点より派生している枝内にある $(h+2)$ 級 Trunk の1端より番号付けを続ける。

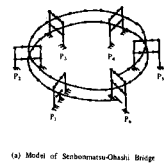
STEP 5. 0級 Trunk の他端に至れば番号付けを終了する。

いま非零化する零要素の個数を L_0 とあらわし、これを“ロス”と呼び、これを、上記手順によ、2“ロス”は全2集中点に集められ他の点には“ロス”が派生しない。また、ある級の Trunk に含まれる節点はそれ以下の級の Trunk の集中点になしと見られる。このようなロスの総和 L_0 は下式で表現される。

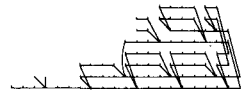
$$L_0 = \sum_{h=1}^n h \cdot T_h - \sum_{h=1}^n m_h \quad (4)$$

== n は最高級の Trunk が存在することを示し、 h は Trunk の級数、 T_h は h 級の Trunk の内に含まれる節点個数、 m_h は h 級 Trunk の個数を示す。また系全体の節点数は $\sum_{h=0}^n T_h - 1$ で表現されるが、Profile は

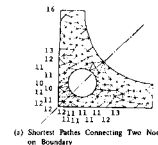
$$Profile = \sum_{h=0}^n (h+1) T_h - \sum_{h=1}^n m_h - 1 \quad (5)$$



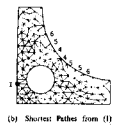
(a) Model of Seibonmatsu-Choshi Bridge



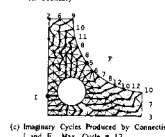
(b) Field Form of Seibonmatsu Bridge



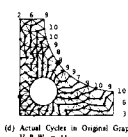
(a) Shortest Paths Connecting Two Nodes on Boundary



(b) Shortest Paths from (1)



(c) Imaginary Cycles Produced by Connecting I and F. Max. Cycle = 12



(d) Actual Cycles in Original Graph

図-4. 帯幅減少法の適用例

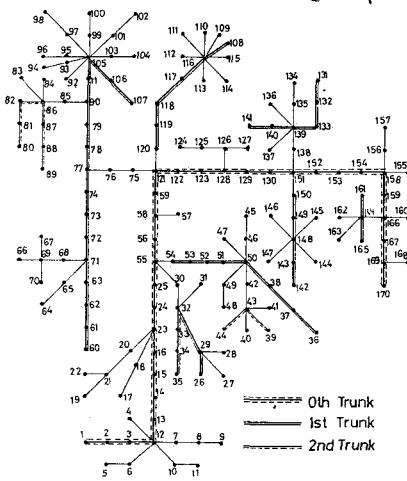


図-5. プロファイル減少法の適用例

なお、この手法はほとんどどの系に対し最小プロファイルを与えるが、場合によっては最小化しない場合がある。その原因はTrunk選定基準として各枝内の節点個数のみ考慮していることによる。実際には枝の長さ、集中点間隔も影響を及ぼす。しかしこのプロファイルなるから近似値で十分であると考えるであろう。

2-3. 適用例

図-3, 4は図式帯幅減少法の適用例で、それぞれH.B.W.は9, 11と異なる。図-5はプロファイル減少法の適用例を示し、番号順序が定められている。図-6, 7は両手法を斜張橋モデルに適用した結果を示しているが、番号順序が非常に異なっていることがわかる。

図-8はTree Systemに対して、Cuthill-McKee, King, Levy法に示した両手法を適用した結果と比較したものであり、この両手法はそれぞれH.B.W., Profileの最小値(真値)を与えていることがわかる。この程度の大きさのグラフに対してとした場合は、両手法を用いて最小化するのは1分程度しか必要としない。

3. 帯幅減少法の自動化への展望

従来の手法の主な特徴は大きく分けると1)行列の入力軽減、2)向らからグラフの構造を導入することによって計算が速い。それらはいずれも最適化という観点からすれば十分であり系の形状に結果は大きく支配される。特に距離 ≥ 2 の離れた点に接続番号を付与することは不可能に近く、Tree系のような系は特に最適化が困難であったと云える。本節では第2節に示した手法の自動化への問題点を述べる。

グラフ形式が表現する一番簡単な方法は節点間、もしくは部材節点間接続行列を用いる方法であろう。前者の場合グラフの節点相互の接続が距離(距離=1)を表現しており、後者は各部材とその境界となる両端点との関係を示しており、1, -1よりなる行列である。今前者を $A(N \times N)$ で表現する。 A 行列の要素 E_{ij} 、1のみとする。各節点の次数は各行の要素の和でも定めうる。あるいは $A^t = A \times A$ の対角要素の値が次数に一致する。 A の非零要素は、その行・列番号に対応する2節点間の距離=1の関係にあることを示す。 A を α 回掛けた時(i, j)要素が非零になったとすると、

$$A^{(\alpha)}(i, j) = A(i, a_1) \cdot A(a_1, a_2) \cdots A(a_{\alpha-1}, j) \neq 0 \quad (6)$$

$$\therefore A(i, a_1) = A(a_1, a_2) = \cdots = A(a_{\alpha-1}, j) = 1 \quad (7)$$

となり、 i, j 間の距離は最大 $\alpha = \alpha$ であることがわかる。この考え方をを用いてグラフの直径 d は理論上容易に定められる。あるいは

$$\tilde{A}^{(d)} = A + A^{(2)} + A^{(3)} + \cdots + A^{(d)} \quad (8)$$

α を始めて全ての要素が非零化したとすると、そのグラフの直径は d であり、最後に非零化した要素(i, j)の d は i, j 間に位置ありことがわかる。しかしながらこの方法によれば演算時間は N^3 のオーダーに比例する。以下、これに替えて簡便法を示す。 A の任意の1行 $A^{(i)}$ を取り出し以下の演算を行う。

$$\begin{aligned} A_1^{(2)} &= A \cdot A \\ &\vdots \\ A_1^{(n)} &= A_1^{(n-1)} \cdot A \end{aligned} \quad (9)$$

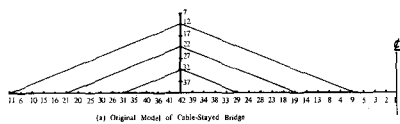


図-6. 帯幅減少法適用例

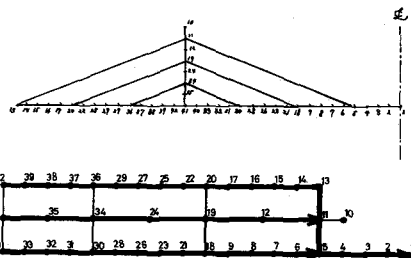
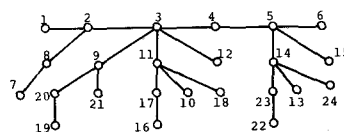
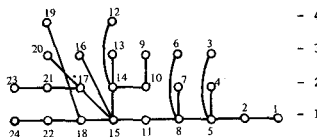


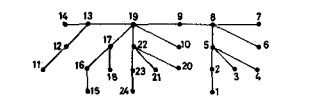
図-7. プロファイル減少法適用例



(a) Original Labeled Tree Structure



(b) Result of Sequential File Method (H.B.W. = 5)



(c) Result of Our Method for Profile Reduction

Algorithm	Bandwidth	Profile
Original	13	107
Cuthill-McKee	10	101
King	13	50
Levy	14	37
Sequential File Method	5	41
Proposed Method	10	28

d) Comparison of Results by Several Algorithm

図-8. さまざまな手法による結果の比較

A_{ij} の全ての要素が非零化した時、最後に非零化した要素 $E(A_{ij})$ とおき、上式の i と j に置き換え、同じ操作をくり返す。さらに A_{ij} が最後に非零化したならば j と i を置き換え、再び同じ操作をくり返す。対象系が Tree であれば上記操作のみで演算は終了し、直径は n の間に位置する（ここがわかり）。 $d_0 = n$ である。対象系が Mesh 系の場合でも 4 くらい回をくり返して完全に直径が求められる。しかしながら系の形によらず、上記操作による Local Optimum が求まる場合がある。これは初期値 (i) の取り方に依るものであり、また Mesh 系の場合初期値を変えて演算することが望ましい。本手法によれば、演算時間は N^2 のオーダーになり（ここが理論的にわかり）、前者に比して大いに有利である。例えば、図-8 の Tree System ($N=24$) の場合、その演算所要時間は前者が 0.9 秒、後者が 0.1 秒、さらに図-6 の Cable Stayed Bridge ($N=42$) の場合、7.1 秒、0.3~0.4 秒となり、ここに示した手法は節点数が多くなればなる程有利となる。ここで 0.3~0.4 秒と幅があるのは、初期値の影響による。節点の選定に図式帯幅減少法において、この直径の概念がその基本戦略の重要な地位を占めていることより、上記手法によりそれが容易に求められることがわかったことは自動化へ大きく一歩前進したと云えよう。特に Tree 系の場合、本論文では示さなかったが、この“点容量”という考えが積極的に導入され、それが Tree 系では節点列を包囲形で全体として処理することになり、例えば節点を別個に取り扱って 1 本ずつ座標系に file する時生じる折れ曲がり操作とある程度除去しうることになり、図式帯幅減少法の自動化は可能と思われる。Mesh 系の場合、直径を届く方向への 1 歩の選択、凸部の折れ曲がり等困難な点が数多く残ってしまう。しかし、それはあくまで本手法の完全自動化を目標とした場合であり、例えば従来提案されてきた諸手法に“直径”の概念を導入し、その節点選定の初期値 (つまり 1) を与えるように改良する場合は容易である。

一方、フロイド最小化法は、前者に比してさらにフロウ化は容易であり、現在研究室においてプログラム化中である。その最大の理由は、対象が Tree であることより任意 2 点間の 1 歩は 1 本しか存在しないということ、および、Trunk の選定が節点数というもので決定されるということ、さらにフロイドの大小を支配する“長さ”が集中点に集めるのが最適であるということから、2 つのことによる。しかしながら、これは Mesh 系に拡張しようとすれば、前者と同様の数多くの問題点が残されている。

図式帯幅減少法、フロイド減少法を直接フロウ化を行った場合、そのフロウ化の大半は論理演算で占められ、数値演算はほとんどないであろう。これは、両手法がその基本戦略をグラフの諸概念にたよっていることによる。この点、両手法を自動化する最大の欠点となるであろう。

4. おわりに

本論文においてすでに提案された図式、変換帯幅減少法の概略、およびその自動化への問題点を述べた。帯幅減少法は元来グラフの問題であり、かつ本論文のテーマは幾何学の問題を電子計算機にのせようとする試みである。これは、土木学会誌 1976 Vol. 61 対談：現代数学を語る野田元、佐武正雄両先生の推薦している問題点であり元来不可能に近いことがあろうともしない。とあるが、次の 2 つの手法が考えられるであろう。

1) グラフの諸概念が電子計算機にのせ易い要素のみを導入し、自動化をはかる。

2) 自動化は行なわず、manual な方法にたよる。

前者は、少くとも大規模な系に対しては行なわれねばならず、後者は中小規模の系に対し有効なアプローチであると思われる。なお、上記演算は FACOM 230-77 に依る結果がある。

参考文献

- 1) G. G. Alway & D. W. Martin, "An Algorithm for Reducing the Bandwidth of a Matrix of Symmetric Configuration," Computer J., 8, pp. 264-282, 1965
- 2) 佐々木 R. P. Tewarson, "Row-Column Permutation of Sparse Matrices," Computer J., 10, pp. 300-305, 1967
- 3) E. Cuthill, "Several Strategies for Reducing the Bandwidth of Matrices," Sparse Matrices and Their Applications, Plenum, New York, 1971-166, 22
- 4) T. Taniguchi, "Application of Topology to Bandwidth Reduction Method of Structural Stiffness Matrices," Doctoral Dissertation to Kyoto Univ., Dec. 1974
- 5) I. Konishi, N. Iwawaki, T. Taniguchi, "Reducing the Bandwidth of Structural Stiffness Matrices," J. of Structural Mechanics, 4(2), pp. 197-226, 1976