

一次元空間における産業構造の階層化メカニズム: コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルの分岐解析*

Emergence of Industrial Hierarchy in One-dimensional Space:
Bifurcation Analysis of a Multi-industry Urban Location Model with Communication Externality*

高山雄貴**・赤松隆***

By Yuki TAKAYAMA**・Takashi AKAMATSU***

1. はじめに

数多くの国や地域の観察から、産業活動の空間パターンにはいくつかの規則性があることが示唆されている。その中でも、都市システムが形成する階層的な産業構造 (*hierarchy principle*) は、よく知られている規則性の一つである (e.g., Christaller⁴, Lösch¹², Berry², Marshall¹³, 最近の研究では Mori et al.¹⁴) など)。ここで、階層的な産業構造とは、規模の大きい都市は規模の小さい都市よりも多くの産業を有し、かつ、小都市に存在する産業は大都市にも存在するという構造である。この規則性は、Fujita et al.⁶) でも述べられているように、より空間スケールの小さい、都市圏内の業務地区においても観測される。すなわち、副都心に立地する産業は、CBD の産業の部分集合となっている。

この階層的な産業構造を生み出すメカニズムを理論的に理解することは、実際の地域・都市政策を適切に実施するために必要不可欠である。大都市圏での都心回帰や地方都市の産業空洞化など、各地で見られる複雑な産業構造の変化を鑑みると、その重要性は明らかであろう。しかし、土木計画分野においては、我々の知る限り、産業構造の階層化を説明する理論は提示されていない。

古典的な経済地理学分野の Christaller⁴, Lösch¹²) による中心地理論は、産業の階層化を説明する代表的理論である。この理論は、Fujita et al.⁶) で言及されているように、規模の経済と輸送費用のトレード・オフにより、産業の階層構造が創発することを示唆している。しかし、その結論を説明するためのミクロ経済学的基礎がないという問題が古くから指摘されている。

この問題に対して、近年、中心地理論にミクロ経済学的基礎を与えようとする試みが、新経済地理学 (NEG)

分野で行われてきた。Fujita et al.⁵) は、Krugman の Core-Periphery (CP) モデルを連続空間・多産業の枠組みに拡張することで、階層的な都市システムが創発することを示している。しかし、この研究では、総人口が増加する状況下での均衡パターンを数値計算によって例示するのみに留まっている。Tabuchi and Thisse¹⁶) は、離散空間・多産業 CP モデルにおいて、輸送費用の低下に伴う均衡解の分岐現象により、産業構造が階層化することを示している。しかし、複数の産業は生産する財の代替の弾力性 (i.e., 消費の属性) でしか区別されないため、特殊なケースでしか階層性を説明できていない。より具体的には、均衡解の分岐後の人口集積過程という、ごく一部の輸送費用領域のみで見られる 2 階層の産業構造しか示されておらず、現実によく観察される現象を表現しているとは言い難い。

そこで、本研究では、都市内の産業構造が階層化するメカニズムを明らかにすることを目的とする。そのために、高山・赤松¹⁸) により提案された、空間競争を考慮した Social Interaction モデル (SISC モデル) を多産業の枠組みに拡張する。そして、産業間の相互作用の非対称性が産業構造を階層化しうることを示す。

本稿の構成は以下のとおりである。まず、第 2 章では、高山・赤松による SISC モデルを多産業の枠組みに拡張し、均衡条件を定式化する。次に、第 3 章で都市内空間を設定した上で、分岐解析の準備のために固有値解析を行う。その結果を利用して、都市内の産業構造が階層化する条件を第 4 章で明らかにする。第 5 章では、計算分岐理論に基づいた数値実験により、より詳細な産業の集積パターンを示す。最後に、第 6 章で結論を述べる。

2. 空間競争を考慮した Beckmann 型 Social Interaction モデル

本研究では、Tabuchi¹⁵) の Beckmann 型 Social Interaction モデルに Braid³) による空間競争を組み込む

* キーワード：地域計画, 都市計画, 産業立地

** 学生員, 東北大学大学院情報科学研究科

(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,

TEL:022-795-7507, E-mail:takayama@plan.civil.tohoku.ac.jp)

*** 正員, 工博, 東北大学大学院情報科学研究科 教授

だ、高山・赤松¹⁸⁾のモデル(以降、SISCモデル)を、多産業の枠組みに拡張する。そこで、本章では、多産業SISCモデルの設定を示した後、均衡条件を定式化する。

(1) モデルの設定

a) 都市内システムの設定

離散的な C 箇所の立地点が存在する都市を考える。全ての立地点は均質であり、面積は一定値 a である。この都市には、唯一の移動主体である企業、floor space を供給するデベロッパー、企業が生産する財を購入する(立地点間を移動しない)消費者が存在する。

b) 消費者行動

消費者は立地点間を移動せず、各立地点に均等に一定人口 m 存在する。各消費者は、各産業の財を都市内に立地する1つの企業からのみ1単位購入する。産業 i の財を立地点 d の企業から購入する立地点 c の消費者の効用は、次のように与えられる:

$$u_{cd}^{(i)} = \alpha^{(i)} - p^{(i)} - \tau\psi(c, d).$$

ここで、右辺第1項 $\alpha^{(i)}$ は産業 i の財を購入することにより得られる効用、第2項 $p^{(i)} (= 1)$ は財を購入するための費用、第3項は立地点 c, d 間の交通費用であり、 τ は交通費用パラメータ、 $\psi(c, d)$ は c, d 間の距離を表す。また、本稿では、消費者の財の選考に異質性があり、立地点 c の個人 s が立地点 d の産業 i の財を購入する際の効用が次のように与えられると仮定する:

$$u_{cd,s}^{(i)} = u_{cd}^{(i)} + \varepsilon_{d,s}^{(i)}.$$

ここで、 $\varepsilon_{d,s}^{(i)}$ は個人 s 固有の立地点 d で生産された産業 i の財に対する確定的効用項である。各産業 i の財に対する各立地点 d の個人全体にわたる $\{\varepsilon_{d,s}^{(i)}, \forall s\}$ の分布は Gumbel 分布であり、その分布が全立地点、産業間で独立かつ同一であると仮定する。このとき、消費者 s の効用最大化行動

$$\max_{d_0, \dots, d_{I-1}} \sum_i u_{cd_i,s}^{(i)}$$

の結果、立地点 c における立地点 d で生産された産業 i の財の1企業当たりの需要量 $q_{cd}^{(i)}$ は、

$$q_{cd}^{(i)} = \frac{\exp[\eta^{(i)}\psi(c, d)]}{\sum_k \exp[\eta^{(i)}\psi(c, k)]n_k} m. \quad (1)$$

と表される(e.g., Anderson et al.¹⁾). ここで、 n_k は立地点 k の企業数、 $\eta^{(i)} \in [0, \infty)$ は消費者の異質性を反映したパラメータであり、以降の議論の道筋を明快に示すため $\eta^{(i)} = 1 \ \forall i$ とする。

c) デベロッパー行動

デベロッパーは、各立地点で不在地主から借りた単位面積の土地を開発し、完全競争のもとで floor space を企業に供給する。土地の開発費用は、産業毎に floor space の利用形態が異なることから、供給する産業と面積に応じて決定されると仮定する。すなわち、立地点 c で産業 i の企業に供給する floor space 面積が $y_c^{(i)}$ の場合、その開発費用は $\beta^{(i)}(y_c^{(i)})^2$ で表される。以上の仮定のもとで、デベロッパーは、利潤 Π_c^D を最大化するように、 $y_c^{(i)}$ を選択する:

$$\max_{y_c^{(0)}, \dots, y_c^{(I-1)}} \Pi_c^D = \sum_i \left\{ r_c^{(i)} y_c^{(i)} - \beta^{(i)} (y_c^{(i)})^2 \right\} - R_c$$

ここで、 r_c は企業がデベロッパーに支払う立地点 c の単位面積当たりの floor space 地代、 R_c はデベロッパーが不在地主に支払う単位面積当たりの土地に対する地代である。1階条件、利潤ゼロ条件より、

$$r_c^{(i)} = 2\beta^{(i)} y_c^{(i)}, \quad R_c = \sum_d \beta^{(i)} (y_d^{(i)})^2$$

が与えられる。

d) 企業行動

企業は I 種類の産業に分けることができ、各産業 i ($= 0, 1, \dots, I-1$) の総企業数は一定数 $N^{(i)}$ である。また、各立地点における産業 i の企業数は $\mathbf{n}^{(i)} = [n_0^{(i)}, n_1^{(i)}, \dots, n_{C-1}^{(i)}]^T$ と表される。ここで、添字 T は行列の転置記号である。

全ての企業は、1単位の floor space、都市内の企業との face to face のコミュニケーション(e.g. 取引、または情報交換)により、価格一定の財を生産する。各産業の財の価格が $p^{(i)} = 1$ となるように生産量の単位を基準化すると、産業 i の企業の利潤最大化行動は、次のように表される:

$$\max_c \Pi_c^{(i)} = \sum_d q_{dc}^{(i)} - r_c^{(i)} - \sum_j \mu^{(i,j)} T_c^{(j)}. \quad (2)$$

ここで、 $T_c^{(j)}$ は産業 j の企業とのコミュニケーションに必要な交通費用であり、立地点 c, d 間の距離抵抗 d_{cd} により次のように定義される:

$$T_c^{(j)} \equiv \sum_d \hat{d}_{cd} n_d^{(j)}.$$

距離抵抗 $\hat{d}_{cd}$ は、Fujita and Ogawa⁷⁾, Tabuchi¹⁵⁾ と同様の指数型の関数形

$$\hat{d}_{cd} \equiv 1 - \exp[-\tau\psi(c, d)]$$

で表されると仮定する。また、 $\mu^{(i,j)}$ は、産業 i の企業に必要な産業 j の企業とのコミュニケーションの費用の大きさ (e.g., 頻度) を表すパラメータであり、産業間の相互作用の非対称性を表現することができる。本稿では、その極端なケースとして、 $\mu^{(i,j)}$ が次のように与えられると仮定する。

$$\mu^{(i,j)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i > j \\ \mu^{(i)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

これは、産業 i には産業 $j (> i)$ との face to face コミュニケーションが利益を上げるのに必要となる一方、産業 j は産業 i とのコミュニケーションが不要となる (利潤の重要な要素とはならない) ことを表現している。この設定は、例えば、金融業を表す産業 i が製造業である産業 j の財務状況を常に観測する必要がある (i.e., コミュニケーションが必要となる) 一方で、製造業 (産業 j) は全ての金融業と取引する必要がないと考えれば、現実にも存在しうる状況である。

各企業は 1 単位の floor space を消費するため、立地点 c で供給される floor space は $y_c^{(i)} = n_c^{(i)}/a$ と表される。したがって、floor space の地代 $r_c^{(i)}$ が

$$r_c^{(i)} = \phi^{(i)} n_c^{(i)}. \quad (4)$$

で与えられる。ここで、 $\phi^{(i)} \equiv 2\beta^{(i)}/a$ である。

立地点 c における産業 i の企業の利潤 $\Pi_c^{(i)}$ は、式 (1)、(4) を式 (2) に代入することで得られる。ここで、企業の立地選択に利潤関数の定数項は全く影響しないため、これを除くと、 $\Pi_c^{(i)}$ は以下のように表される。

$$\Pi_c^{(i)} = \sum_d q_{dc}^{(i)} + \sum_{j=i}^{I-1} \mu^{(i,j)} \Delta_c^{(j)} - \phi^{(i)} n_c^{(i)}$$

ここで、 $\Delta_c^{(j)} \equiv \sum_d n_d^{(j)} \exp[-\tau\psi(c,d)]$ である。

次章以降の解析の便宜上、利潤関数をベクトル表記しておこう。そのために、立地点間の相互作用の減衰効果を表現する空間割引行列 $\mathbf{D}$ を定義する。この行列は、 c, d 要素 d_{cd} が

$$d_{cd} \equiv \exp[-\tau\psi(c,d)]$$

で与えられる行列である。このとき、利潤関数 $\mathbf{\Pi}^{(i)} \equiv [\Pi_0^{(i)}, \Pi_1^{(i)}, \dots, \Pi_{C-1}^{(i)}]^T$ は、

$$\mathbf{\Pi}^{(i)}(\mathbf{n}) = m\mathbf{M}^{(i)T}\mathbf{1} + \sum_j \mu^{(i,j)} \mathbf{\Delta}^{(j)} - \phi^{(i)} \mathbf{n}^{(i)}$$

で与えられる。ここで、 $\mathbf{1}$ は全ての要素が 1 である $C \times 1$ ベクトル、 $\mathbf{n} \equiv [\mathbf{n}^{(0)T}, \mathbf{n}^{(1)T}, \dots, \mathbf{n}^{(I-1)T}]^T$ 、 $\mathbf{M}^{(i)}$ は、

$$\mathbf{M}^{(i)} \equiv (\text{diag}[\mathbf{\Delta}^{(i)}])^{-1} \mathbf{D}$$

である。また、 $\mathbf{\Delta}^{(i)}$ は $\Delta_c^{(i)}$ を要素に持つベクトルであり、空間割引行列 $\mathbf{D}$ により以下のように表される：

$$\mathbf{\Delta}^{(i)} \equiv \mathbf{D}\mathbf{n}^{(i)}.$$

(2) 企業の立地均衡条件

本稿で考える多産業 SISC モデルでは、企業の各立地点に対する選好に異質性があると仮定する。産業 i の企業 f は、以下で表される利潤が最大となる立地点 c を選択する：

$$\max_c \Pi_{c,f}^{(i)} \equiv \Pi_c^{(i)} + \epsilon_{c,f}^{(i)}.$$

ここで、 $\epsilon_{c,f}^{(i)}$ は、産業 i の企業 f 固有の立地点 c に対する選好を表す確定項である。いま、各立地点 i の産業 i の企業全体にわたる $\{\epsilon_{c,f}^{(i)}, \forall f\}$ の分布が平均 0、分散 $\pi^2/\{6(\theta^{(i)})^2\}$ の Gumbel 分布に従い、その分布が全立地点間で独立かつ同一であると仮定する。すると、立地点 c を選択する企業の割合 $P_c^{(i)}(\mathbf{n})$ は、次の Logit 型の選択関数で与えられる (e.g., Anderson et al.¹⁾):

$$P_c^{(i)}(\mathbf{n}) \equiv \frac{\exp[\theta^{(i)} \Pi_c^{(i)}(\mathbf{n})]}{\sum_d \exp[\theta^{(i)} \Pi_d^{(i)}(\mathbf{n})]}. \quad (5)$$

企業の立地選択に関する均衡条件は、式 (5) を用いて、以下の不動点問題として表現できる：

$$\mathbf{n} = \text{diag}[\mathbf{N}]\mathbf{P}. \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{P}^{(i)} \equiv [P_0^{(i)}(\mathbf{n}), P_1^{(i)}(\mathbf{n}), \dots, P_{C-1}^{(i)}(\mathbf{n})]^T$ と定義すると、 $\mathbf{P} \equiv [\mathbf{P}^{(0)T}, \mathbf{P}^{(1)T}, \dots, \mathbf{P}^{(I-1)T}]^T$ である。また、 $\mathbf{N} \equiv [N^{(0)}\mathbf{1}^T, N^{(1)}\mathbf{1}^T, \dots, N^{(I-1)}\mathbf{1}^T]$ 。均衡条件 (6) は、企業が均質である場合を含んだ、一般的な均衡条件である。実際、 $\theta^{(i)} \rightarrow \infty$ とすると、従来研究でもよく知られている企業が均質な場合の立地均衡条件に帰着する：

$$\begin{cases} \Pi^{(i)*} - \Pi_c^{(i)}(\mathbf{n}) = 0 & \text{if } n_c^{(i)} > 0 \\ \Pi^{(i)*} - \Pi_c^{(i)}(\mathbf{n}) \geq 0 & \text{if } n_c^{(i)} = 0 \end{cases} \quad \forall i.$$

ここで、 $\Pi^{(i)*}$ は産業 i の企業の均衡利潤である。

(3) 均衡状態の安定性と分岐

本モデルは、後述するように複数の均衡解が存在するため、均衡選択のために均衡解周りの摂動に対する

安定性、すなわち局所安定性を調べる必要がある。この局所安定性は、パラメータ (e.g., 交通費用パラメータ τ) の変化に伴って切り替わる。安定性が変化する現象は、数学的には分岐現象と呼ばれ、本モデルでは、その分岐現象により様々な集積パターンが創発する。そこで、本節では、企業の立地分布が均衡状態へ到達するまでの調整ダイナミクスをモデル化し、均衡状態の局所安定性や分岐挙動を調べる方法を示す。

企業が立地点を変更する機会は、各時点 t において到着率 λ の Poisson 過程に従って訪れると仮定する。すなわち、各時間間隔 $[t, dt)$ において、 λdt の割合の企業が立地点変更の機会を得ると考える。時点 t に立地点変更機会を得た産業 i の企業 f は、その時点の立地分布 $\mathbf{n}(t)$ に依存した利潤 $\Pi_{c,f}^{(i)}(\mathbf{n}(t))$ が最大となる立地点に移動する。立地点 c が選択される割合は $P_c^{(i)}(\mathbf{n}(t))$ で表されるため、時点 t と $t + dt$ 間の立地分布の変化は、次のように与えられる：

$$n_c^{(i)}(t + dt) = (1 - \lambda dt) n_c^{(i)}(t) + \lambda dt N^{(i)} P_c^{(i)}(\mathbf{n}(t)).$$

$\lambda = 1$ となるように時間間隔を基準化すると、以下の調整過程が得られる：

$$\dot{\mathbf{n}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{n}(t)) \equiv N\mathbf{P}(\mathbf{n}(t)) - \mathbf{n}(t). \quad (7)$$

これは、進化・学習ゲーム理論分野でもよく知られている logit dynamics である。さらに、この調整ダイナミクスの定常状態は、式 (6) を満たす立地均衡状態と一致する。

調整ダイナミクスを定義すると、動的システム理論でよく知られているように (e.g., Hirsch and Smale¹¹), 均衡点周りの摂動が均衡点に収束するか否か (i.e., 漸近安定性) が確認できる。具体的には、均衡状態 $\mathbf{n}^*$ は、調整ダイナミクス (7) の右辺の Jacobi 行列 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n}^*)$

$$\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n}^*) = \text{diag}[\mathbf{N}] \mathbf{J}(\mathbf{n}^*) \nabla \Pi(\mathbf{n}^*) - \mathbf{I} \quad (8)$$

の固有値 $\mathbf{g}$ の実部が全て負であれば漸近安定、そうでなければ不安定である。ここで、 $\mathbf{I}$ は単位ベクトル、 $\mathbf{J}(\mathbf{n}), \nabla \Pi(\mathbf{n})$ は、各々、 $(Ci + c, Cj + d)$ 要素が $\partial P_c^{(i)}(\Pi^{(i)}) / \partial \Pi_d^{(j)}, \partial \Pi_c^{(i)}(\mathbf{n}) / \partial n_d^{(j)}$ の Jacobi 行列である。

3. 都市内空間の設定と解析の準備

本モデルで創発する安定的な均衡解を得るには、調整ダイナミクスの Jacobi 行列 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n})$ の固有値 $\mathbf{g}$ を調べる必要がある。この解析は、一般には非常に複雑であ

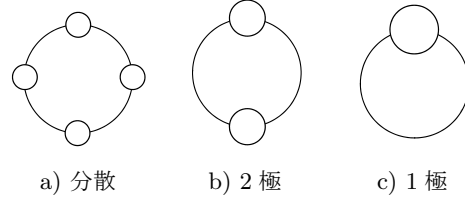


図-1 集積パターンの定義

り、数値計算以外ではほぼ不可能である。しかし、高山・赤松¹⁸)で示されているように、(1) 節で定義する円周上に立地点が並ぶ都市内空間の下では、その解析が著しく容易になる。この場合、 $\nabla \mathbf{F}(\mathbf{n})$ の固有値 $\mathbf{g}$ は、(2) 節で示される空間割引行列の固有値 $\mathbf{f} = [f_0, f_1, f_2, f_3]^T$ の関数で表されることが (3) 節で明らかにされる¹。

(1) 都市内空間の設定

半径 1 の円周上に番号 $i = 0, 1, 2, 3$ の順に、時計回りに 4 箇所の立地点を配置する。隣接する立地点間の距離は均等であると仮定し、隣接していない立地点間の距離は最短距離で定義する。すなわち、立地点 c, d 間の距離 $\psi(c, d)$ は、次のように表される：

$$\psi(c, d) \equiv (2\pi/4) \min\{|c - d|, 4 - |c - d|\}.$$

本稿では、交通費用パラメータ τ の変化に伴う分岐によって創発する安定的な均衡解 (i.e., 均衡立地パターン) を調べる。そこで、以降の解析で各産業の立地分布として創発しうる次の 3 種類の均衡立地パターンを定義しておこう：

$$\text{分散均衡状態: } \bar{\mathbf{n}}_{(4)}^{(i)} = [n^{(i)}, n^{(i)}, n^{(i)}, n^{(i)}]^T, \quad (9a)$$

$$\text{2 極集中パターン: } \bar{\mathbf{n}}_{(2)}^{(i)} = [2n^{(i)}, 0, 2n^{(i)}, 0]^T, \quad (9b)$$

$$\text{1 極集中パターン: } \bar{\mathbf{n}}_{(1)}^{(i)} = [4n^{(i)}, 0, 0, 0]^T. \quad (9c)$$

ここで、 $n^{(i)} \equiv N^{(i)}/4$ である。分散均衡状態は、各立地点に企業が均等に分布する状態 (図-1 a)) である。2 極集中パターンでは、企業が均等な間隔で並ぶ 2 立地点に均等に分布している (図-1 b))。1 極集中パターンは、1 立地点に全ての企業が集積する状態 (図-1 c)) である。

(2) 空間割引行列の固有値

前節で設定した都市内空間では、空間割引行列 $\mathbf{D}$ の要素の配列には、巡回行列と呼ばれる規則性がある (巡回行列の定義とその基本特性については、Gray¹⁰) 参

¹ 本章で立地点数・産業数を限定するのは、解析の道筋を明快に示すためのものである。立地点数・産業数を任意の値に増加させても、以降の結論は全く変わらない。

照). すなわち, D は,

$$r \equiv \exp[-\tau(2\pi/4)] > 0 \quad (10)$$

と定義すると, 第 1 行ベクトルが $d_0 \equiv [1, r, r^2, r]$ で与えられる巡回行列である.

空間割引行列が巡回行列となるため, その固有値 $\hat{f}$ は, 離散 Fourier 変換 (Discrete Fourier Transform (DFT)) により容易に得られる. すなわち, D は, DFT 行列:

$$\begin{aligned} Z &= [z_0, z_1, z_2, z_3] \\ z_k &= [\omega^0, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}]^T \quad (k = 0, 1, 2, 3) \\ \omega &\equiv \exp[i(2\pi/4)] \quad (\text{i.e. } \omega^4 = 1) \end{aligned}$$

を用いた相似変換により対角化される. また, 固有値 $\hat{f}$ は, 空間割引行列の第 1 行ベクトル d_0 の DFT:

$$\hat{f} = Z d_0^T \quad (11)$$

で与えられる. 以上の性質を利用して, 以降でモデルの分岐特性を考察する際に重要な役割を果たす D をその行和 $d(r) \equiv d_0 \cdot \mathbf{1}$ で正規化した行列 $D/d(r)$ の特性を調べると, 以下の補題が得られる:

補題 3.1 空間割引行列 $D/d(r)$ の固有値 f は, 以下の特性を持つ.

1) 固有値 $f = [f_0, f_1, f_2, f_3]^T$ は,

$$f = [1, c(r), c(r)^2, c(r)]^T \quad (12)$$

で与えられる. ここで, $c(r) \equiv (1-r)/(1+r)$.

2) $r \in (0, 1]$ の範囲内で, $f_c (c \neq 0)$ は r に関する単調減少関数である. その各々の値域は $[0, 1]$ である.

3) $r \in (0, 1)$ の範囲において, 個々の固有値で以下の大小関係が成立する:

$$0 < f_2 < f_1 < f_0 = 1 \quad (13)$$

(証明: 付録 I)

(3) 調整ダイナミクス Jacobi 行列の固有値

a) Jacobi 行列

本稿では, 産業構造が階層化するメカニズムを明快に示すために, 都市内の産業数 I が 2 種類の場合を考える. このとき, 調整ダイナミクスの Jacobi 行列 (8) の $J(n), \nabla \Pi(n)$ は

$$J(n) = \begin{bmatrix} J^{(0)} & \vdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & J^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$\nabla \Pi(n) = \begin{bmatrix} \Pi^{(0)} & \vdots & D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \Pi^{(1)} \end{bmatrix}$$

で与えられる. ここで, $J(n), \nabla \Pi(n)$ の部分行列である $J^{(i)}, \nabla \Pi^{(i)}$ は, 以下のように表される:

$$\begin{aligned} J^{(i)} &= \theta^{(i)} \{ \text{diag}[P^{(i)}] - P^{(i)} P^{(i)T} \}, \\ \Pi^{(i)} &= -m M^{(i)T} M^{(i)} + \mu^{(i)} D - \phi^{(i)} I. \end{aligned}$$

式 (8) に上式を代入することで $\nabla F(n)$ が得られる:

$$\nabla F(n) = \begin{bmatrix} F^{(00)} & \vdots & F^{(01)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & F^{(11)} \end{bmatrix}, \quad (14a)$$

$$F^{(ii)} = N^{(i)} J^{(i)} \Pi^{(i)} - I, \quad (14b)$$

$$F^{(01)} = N^{(0)} J^{(0)} D. \quad (14c)$$

b) Jacobi 行列の固有値

集積パターンが創発する分岐メカニズムを調べる準備として, 全産業の企業が各立地点に均等に分布した分散均衡状態 $\bar{n} = [\bar{n}_{(4)}^{(0)T}, \bar{n}_{(4)}^{(1)T}]^T$ を考える. このときの $J^{(i)}, \Pi^{(i)}$ を $J_{(4)}^{(i)}, \Pi_{(4)}^{(i)}$ と表記すると,

$$\begin{aligned} J_{(4)}^{(i)} &= (\theta^{(i)}/4) \{ I - (1/4) E \}, \\ \Pi_{(4)}^{(i)} &= -m \{ D / (n^{(i)} d(r)) \}^2 + \mu^{(i)} D - \phi^{(i)} I. \end{aligned}$$

ここで, E は, 全ての要素が 1 の 4×4 行列である.

$J_{(4)}^{(i)}$ は巡回行列である I, E の和で表されることから, 明らかに巡回行列である. したがって, その固有値 $\delta^{(i)} = [\delta_0^{(i)}, \delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \delta_3^{(i)}]^T$ は, DFT により次のように得られる:

$$\delta^{(i)} = (\theta^{(i)}/4) [0, 1, 1, 1]^T.$$

$\Pi^{(i)}$ も巡回行列 D, I, E の和・積で表されることから, 巡回行列である. したがって, その固有値 $e^{(i)} = [e_0^{(i)}, e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, e_3^{(i)}]^T$ は, $D/d(r)$ の固有値 f によって次のように表される:

$$e_c^{(i)} = -m(f_c/n^{(i)})^2 + d(r)f_c - \phi^{(i)}.$$

$\nabla F(\bar{n})$ は式 (14) で表されるため, 4×4 の DFT 行列 Z を対角ブロックに持つ行列 $\hat{Z} \equiv \text{diag}[Z, Z]$ による相似変換を施すことで, 各ブロックの部分行列 $F^{(ij)}$ を対角化できる:

$$\hat{Z}^* \nabla F(\bar{n}) \hat{Z} = \begin{bmatrix} \text{diag}[\lambda^{(00)}] & \vdots & \text{diag}[\lambda^{(01)}] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \vdots & \text{diag}[\lambda^{(11)}] \end{bmatrix}. \quad (15)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{Z}}^*$ は $\hat{\mathbf{Z}}$ の共役転置行列、 $\lambda^{(ij)}$ は以下のよう
に表される $\mathbf{F}^{(ij)}$ の固有値である：

$$\text{diag}[\lambda^{(ii)}] = N^{(i)} \text{diag}[\delta^{(i)}] \text{diag}[\mathbf{e}^{(i)}] - \mathbf{I}, \quad (16a)$$

$$\text{diag}[\lambda^{(01)}] = N^{(0)} \text{diag}[\delta^{(0)}] \text{diag}[\mathbf{f}]. \quad (16b)$$

式 (15) が上三角行列であることを利用すると、 $\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{n}})$
の固有値と固有ベクトルが容易に得られる。その結果
は、次の補題にまとめられる。

補題 3.2 分散均衡状態 $\bar{\mathbf{n}}$ における調整ダイナミクス
の Jacobi 行列 $\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{n}})$ の固有値、固有ベクトルは、以
下のように与えられる：

- 1) 第 $0, 4$ 固有値は常に -1 である。また、第 $4i + c$
($c \neq 0$) 固有値 g_{4i+c} は、空間割引行列 $\mathbf{D}/d$ の第
 c 固有値 f_c の 2 次関数で与えられる：

$$g_{4i+c} = \theta^{(i)} n^{(i)} G^{(i)}(f_c) \quad (17a)$$

$$G^{(i)}(x) \equiv -m(n^{(i)})^{-2} x^2 + \mu^{(i)} d(r) x - \phi^{(i)} - (n^{(i)} \theta^{(i)})^{-1}. \quad (17b)$$

- 2) 第 $4i + c$ 固有ベクトル $\mathbf{v}_{4i+c}$ は、

$$\mathbf{v}_{4i+c} = [\mathbf{v}_{4i+c}^{(0)\text{T}}, \mathbf{v}_{4i+c}^{(1)\text{T}}]^\text{T} \quad (18a)$$

$$\mathbf{v}_{4i+c}^{(0)} = \begin{cases} \mathbf{z}_c & \text{if } i = 0 \\ a_c \mathbf{z}_c & \text{if } i = 1 \end{cases} \quad (18b)$$

$$\mathbf{v}_{4i+c}^{(1)} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{if } i = 0 \\ \mathbf{z}_c & \text{if } i = 1 \end{cases} \quad (18c)$$

である。ここで、 $\mathbf{z}_c$ は DFT 行列 $\mathbf{Z}$ の第 c 列ベク
トル、 $a_c \equiv (\lambda_c^{(11)} - \lambda_c^{(00)})/\lambda_c^{(01)}$ 、 $\lambda_c^{(ij)}$ は式 (16) で
定義される $\lambda^{(ij)}$ の第 c 要素である。

(証明：付録 II)

補題 3.2 で示された固有値 g_{4i+c} は、立地パターン $\bar{\mathbf{n}}$
が固有ベクトル $\mathbf{v}_{4i+c}$ 方向に変化した場合に、移動した
企業が享受する利潤の増分を表している。したがって、
全ての g_{4i+c} が負であれば、どの方向に立地点が変化
しても企業の利潤が増加しないため、分散均衡状態 $\bar{\mathbf{n}}$
は安定である。一方、利潤増分 g_{4i+c} が正 ($g_{4i+c} > 0$)
である場合、分散均衡状態 $\bar{\mathbf{n}}$ は不安定であり、立地パ
ターンが固有ベクトル $\mathbf{v}_{4i+c}$ 方向に変化する。

4. 階層構造の創発

分散均衡状態 $\bar{\mathbf{n}}$ における交通費用の低下に伴い発生
する分岐の挙動は、前章で得られた $\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{n}})$ の固有値・
固有ベクトルにより、調べることができる。そこで、本

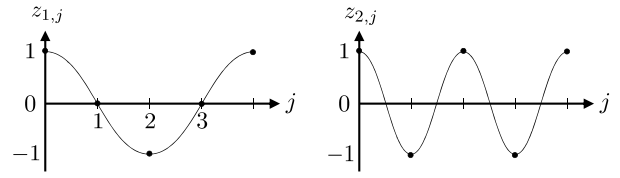


図-2-a $\mathbf{z}_1 = [1, 0, -1, 0]^\text{T}$ 図-2-b $\mathbf{z}_2 = [1, -1, 1, -1]^\text{T}$

図-2 固有ベクトル $\mathbf{z}_k$ の配列パターン

章では、(1) 節で分岐が発生する条件を示したのち、分
岐により創発する産業の集積パターンを (2), (3) 節で
明らかにする。同時に、産業の階層構造が創発する条
件も示す。さらに、交通費用が非常に低い場合、産業
の集積パターンが崩壊し、再び分散均衡状態が安定化
することを (4) 節で明らかにする。

(1) 分岐の発生条件

分散均衡状態 $\bar{\mathbf{n}}$ において、交通費用パラメータ τ の
低下に伴って分岐が発生する条件を確認しよう。均衡解
が分岐するには、 $\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{n}})$ の固有値 $\mathbf{g} = [g_0, g_1, \dots, g_7]^\text{T}$
のいずれかの符号が変化する必要がある。補題 3.2 より、
 g_{4i+c} は $G^{(i)}(f_c)$ により与えられるため、固有値 g_{4i+c}
の符号が変化するには、 f_c が取りうる値の範囲内で

$$G^{(i)}(f_c) = 0 \quad (19)$$

となる必要がある。 f_c ($c \neq 0$) の値域は補題 3.1 より
(0, 1] であるため、分岐の発生条件は、

$$\Theta^{(i)} \equiv \{\mu^{(i)} d(r)\}^2 - \frac{4m\{\phi^{(i)} + (n^{(i)} \theta^{(i)})^{-1}\}}{(n^{(i)})^2} > 0, \quad (20a)$$

$$\mu^{(i)} d(r) + \sqrt{\Theta^{(i)}} < 2m(n^{(i)})^{-2} \quad (20b)$$

と与えられる。この条件 (20a) は、 $n^{(i)}, \theta^{(i)}$ が小さく、
 $\phi^{(i)}, m$ が大きい場合、満たされない。これは、企業数
が少ない、企業の異質性が大きい、地代が高い、消費者
が多い場合、企業間の分散力が強く働くため、分散状態
が常に安定的となる (i.e., 集積パターンが創発しない)
ことを意味している。条件 (20b) は、逆に、 $n^{(i)}, \theta^{(i)}$ が
大きく、 $\phi^{(i)}, m$ が小さい場合、満たされない。これは、
集積力が強く働きすぎると、交通費用が高い状況でも
常に分散均衡状態が不安定的となるためである。この
とき、交通費用が減少しても、分散均衡状態からの均
衡解の分岐は起こらない。

(2) 分岐により創発し得る集積パターン

分岐が発生した際に企業が立地点を変更する方向は、
 $\nabla \mathbf{F}(\bar{\mathbf{n}})$ の固有ベクトル $\mathbf{v}_{4i+c}$ の配列パターンにより表

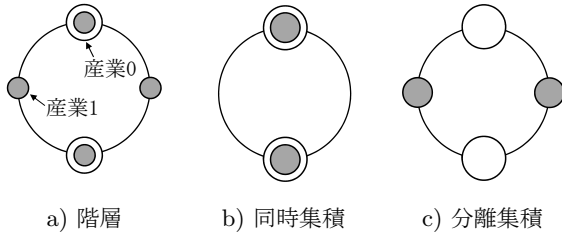


図-3 集積パターンの定義

現される．そこで，分岐により創発し得る立地パターンを，補題 3.2 を利用して整理しておこう．そのために，最初に，分岐により創発し得る産業 j の企業立地パターンを $\mathbf{v}_{4i+c}^{(j)}$ により調べる．そして，両産業の企業の同時立地パターンを $\mathbf{v}_{4i+c}$ から確認する．

まず，産業 j のみに着目して，分岐により創発する集積パターンを調べよう． $\mathbf{v}_{4i+c}^{(j)}$ は $\mathbf{z}_c$ の定数倍で与えられるため，産業 j の企業立地パターンは， $\mathbf{z}_c$ の配列パターン (図-2) で与えられる．より具体的には， $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_3$ の配列パターン (図-2-a) は 1 極集中パターン (図-1 c)) 方向， $\mathbf{z}_2$ の配列パターン (図-2-b) は 2 極集中パターン (図-1 b)) 方向に企業の集積が進むことを表している．

次に，2 産業の企業の同時立地パターンを $\mathbf{v}_{4i+c}$ の配列パターンから調べよう．まず， $i = 0$ の場合， $\mathbf{v}_{4i+c}^{(1)} = \mathbf{0}$ となるため，産業 0 の企業のみが $\mathbf{v}_{4i+c}^{(0)}$ 方向 (i.e., 2 極集中か 1 極集中方向) に集積する．これは，明らかに図-3 a) で表される産業の階層構造が創発する立地パターン (以降，階層パターン) である．次に， $i = 1$ の場合， $a_c > 0$ であれば，両産業とも $\mathbf{z}_c$ 方向に集積する．これは，図-3 b) で示した両産業が同時に同じ立地点に集積する立地パターン (以降，同時集積パターン) を表している． $a_c < 0$ となる場合は，産業 0 が $-\mathbf{z}_c$ 方向，産業 1 が $\mathbf{z}_c$ 方向に集積する．これは，図-3 c) で表現される各産業が異なる立地点に集積する立地パターン (以降，分離集積パターン) が創発することを意味している．

(3) 階層構造の創発条件

以降では，パラメータ $n^{(i)}, \theta^{(i)}, \phi^{(i)}, m$ が，分岐の発生条件 (20) を常に満足していると仮定しよう．このとき，式 (19) の解は，次のように得られる：

$$x_{\pm}^{(i)} = \frac{(n^{(i)})^2 \{ \mu^{(i)} d(r) \pm \sqrt{\Theta^{(i)}} \}}{2m} > 0. \quad (21)$$

ここで， $x_+^{(i)} > x_-^{(i)}$ である．この $x_{\pm}^{(i)}$ は， τ の減少に伴って f_c が徐々に変化した場合に，分岐が発生する f_c の臨界値を表している．この臨界値 $x_+^{(i)}$ は r の単調増加関数， $x_-^{(i)}$ は r の単調減少関数である．

得られた f_c の分岐臨界値 $x_{\pm}^{(i)}$ を利用することで，交通費用パラメータ τ を減少させた場合の分岐挙動を明らかにすることができる．ただし，本稿では， τ と r に一対一対応関係 (10) があることから， r の変化に伴う分岐挙動を示す．

初期状態では， r が十分大きく (交通費用が十分高く)

$$f_c > x_+^{(i)} \quad \forall i, c \neq 0$$

が成立しているとしよう． g_{4i+c} は，式 (17) で与えられるため，この条件は， $g_{4i+c} < 0 \quad \forall i, c$ ，すなわち，分散均衡状態が安定であることを意味している．

次に， r が徐々に増加 (i.e., 交通費用が減少) する状況を考えよう． r が増加すると， f_c が減少， $x_+^{(i)}$ が増加するため，ある i, c について，

$$f_c \leq x_+^{(i)} \quad \exists i, c,$$

が成立する．これは， $g_{4i+c} \geq 0 \quad \exists i, c$ ，すなわち分散均衡状態 $\bar{n}$ が不安定化することを意味している．ここで，最初に $f_c \leq x_+^{(i)}$ となる i, c は，明らかに $x_+^{(i)}$ が最大となる i と f_c が最小となる c である．式 (21) より， $x_+^{(i)}$ が最大となる i は， $N^{(i)}, \theta^{(i)}$ が大きく， $\phi^{(i)}$ が小さい i である．また，補題 3.1 より，

$$\arg \min_c f_c = 2$$

である．したがって， $f_2 = x_+^{(i)}$ を最初に満たす $r = r_+^*$ において，固有ベクトル $\mathbf{v}_{4i+2}$ に対応した集積パターンが創発する．以上で得られた結果から，次の命題が与えられる．

命題 4.1 多産業 SISC モデルにおいて，分岐の発生条件 (20) が常に満たされると仮定する． r が十分小さく分散均衡状態 $\bar{n}$ が安定的な状態から r を増加させると，

- 1) $f_2 = x_+^{(i)}$ を最初に満たす $r \equiv r_+^*$ で，分散状態から集積パターンへの分岐が発生する．
- 2) 分岐により創発する集積パターンは，
 - $x_+^{(0)} > x_+^{(1)}$ の場合：産業 0 のみが 2 極集中方向に集積するパターン (図-4 a))，
 - $x_+^{(0)} \leq x_+^{(1)}$ の場合：産業 0, 1 とともに 2 極集中方向に集積するパターン (図-4 b)) である．
- 3) 産業 0 の方が産業 1 より集積力が大きい (i.e., $N^{(0)} > N^{(1)}, \theta^{(0)} > \theta^{(1)}$)，もしくは，分散力が小さい (i.e., $\phi^{(0)} < \phi^{(1)}$) 場合，階層パターン方向への分岐が発生する．

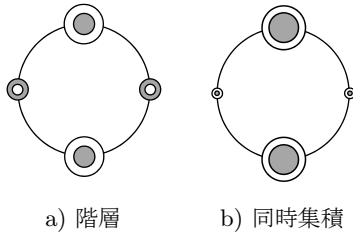


図-4 分岐方向

後の計算で示されるように、分岐により図-4のa)で示した集積パターンが創発した場合、 r がさらに増加すると、図-3a)で示した階層パターンが安定化する。同様に、図-4b)の集積パターンは図-3b)の同時集積パターンとなる。

(4) 産業集積の崩壊

前節では、 f_c の分岐臨界値 $x_{\pm}^{(i)}$ のうち、 $x_{+}^{(i)}$ での分岐のみを議論した。そこで、本節では r が増加して

$$f_c < x_{-}^{(i)} \quad \forall i, c \neq 0$$

を満たす際の分岐挙動について調べる。この条件が満たされる場合、 $g_{4i+c} < 0 \quad \forall i, c$ が成立するため、分散均衡状態が再度安定化する。ここで、最後に $f_c < x_{-}^{(i)}$ となる i, c は、 $x_{-}^{(i)}$ を最小化する i 、 f_c を最大化する c である。補題3.1より、

$$\arg \max_{c \neq 0} f_c = 1$$

である。したがって、最後に $f_1 \geq x_{-}^{(i)}$ を満足する $r = r_{+}^{*}$ において、固有ベクトル $\mathbf{v}_{4i+1}$ に対応した集積パターンから分散均衡状態への分岐が発生する。

命題 4.2 多産業 SISC モデルでは、 r を徐々に増加させると、臨界値 r_{+}^{*} で集積状態から分散均衡状態への分岐が発生する。

本章では、分散均衡状態で発生する分岐により創発する集積パターンを明らかにした。ただし、(3)節で示した集積パターンが安定均衡解となる状況から、さらに r が増加すると、均衡解の分岐が発生する可能性がある。その詳細な挙動を調べるため、次章では、計算分岐理論に基づく数値計算を行う。そして、多産業 SISC モデルにおける分岐の大域的特性の詳細を確認する。

5. 分岐大域的特性の数値計算による確認

(1) 数値計算方法

本章では、多産業 SISC モデルの分岐の大域特性を数値計算により調べる。さらに、階層的な産業構造が、

企業の異質性($\theta^{(i)}$)に依存せず、頑健に創発するものであるか否かを確認する。これまでの解析から明らかなように、SISC モデルは、交通費用の変化に伴い、繰返し分岐が発生する。したがって、本章で行う数値計算では、Ikeda et al.⁸⁾、池田ら¹⁷⁾と同様、計算分岐理論と群論的分岐理論を適切に組み合わせた方法を採用する(計算分岐理論・群論的分岐理論の詳細は、Ikeda and Murota⁹⁾参照)。

次節で示す数値計算例では、パラメータを $\phi^{(0)} = \phi^{(1)} = 0.05, m = 30, N^{(0)} = 8.0, N^{(1)} = 10.0$ と設定する。数値計算により得られる安定的な均衡解は、縦軸に都心(i.e., 企業数が最大の立地点)における各産業の企業の割合、横軸に r を取った図により示す。また、図の赤線は産業0、青線は産業1の企業の割合($n_i^{(0)}/N^{(0)}, n_i^{(1)}/N^{(1)}$)を表す。

(2) 企業が均質な場合

a) 階層パターンが創発する場合

まず、消費者が均質に近い状況($\theta^{(0)} = \theta^{(1)} = 1000$)について考える。この状況で、命題4.1の階層パターン創発条件を満たす $\mu^{(0)} = 1.0, \mu^{(1)} = 0.2$ とした場合の結果は、図-5-aのとおりである。この結果から、産業0,1の立地パターンが“分散・分散→2極・分散→1極・分散→分離1極・分散→分散・分散”と変化することがわかる。ここで、分離1極は $r = 0.96$ 付近で見られる産業0が隣接した2立地点に立地する状況を表す。

次に、 $\mu^{(1)} = 0.5$ とした場合の結果を図-5-bに示そう。この結果は、図-5-aと異なり、産業1の企業も、産業0と同様、輸送費用の減少に伴って集積することを示している。具体的には、交通費用の減少に伴い、各産業の立地パターンが“分散・分散→2極・分散→2極・2極→1極・2極→1極・1極→1極・分離1極→分離1極・分離1極→分離1極・分散→分散・分散”となる。

以上の結果は、多産業 SISC モデルでは、多段階の分岐により多階層の産業構造が創発することを示している。さらに、創発する階層パターンは、各々の産業の企業が集積するタイミングに大きく依存していることもわかる。具体的には、産業1が集積し難い図-5-aでは常に階層的な階層構造が維持される一方で、産業1が集積しやすい図-5-bでは、産業1の企業の集積により一時的に階層構造が崩れる状況が見られる。

b) 同時集積パターンが創発する場合

命題4.1の同時集積パターンが創発する条件を満たす $\mu^{(0)} = 1.0, \mu^{(1)} = 0.8$ とした場合の均衡立地パター

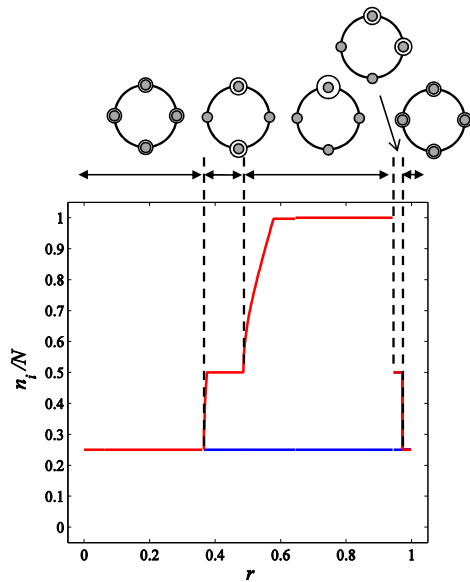


図-5-a $\mu^{(0)} = 1.0, \mu^{(1)} = 0.2$

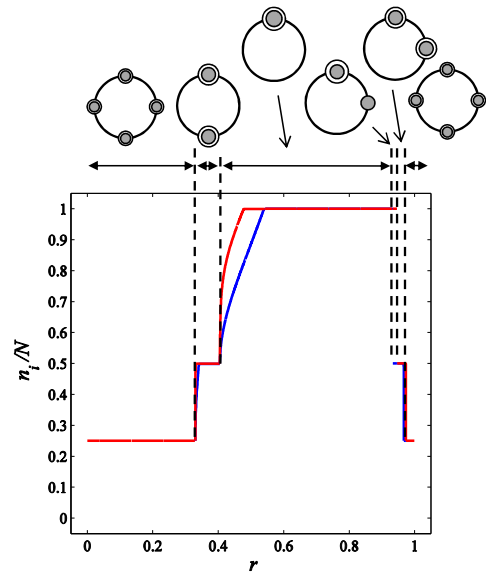


図-6 同時集積パターンが創発する場合 ($\mu^{(1)} = 0.8$)

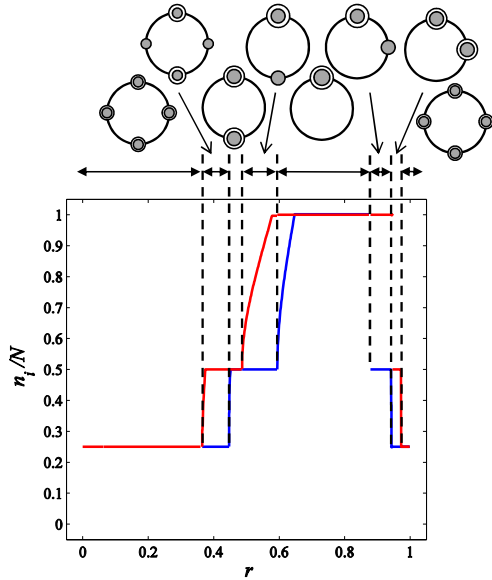


図-5-b $\mu^{(0)} = 1.0, \mu^{(1)} = 0.5$

図-5 階層パターンが創発する場合

ンは、図-6で示すとおりである。この結果から、交通費用の減少に伴い“分散・分散→2極・2極→1極・1極→1極・分離1極→分離1極・分離1極→分散・分散”と立地パターンが変化することがわかる。すなわち、全ての分岐点で両産業の企業が同時に集積、もしくは分散する。

本節で得られた結果は、交通費用の減少により、徐々に支配的となる集積力・分散力が変化していくことを示している。交通費用が高いときは企業間の空間競争が支配的となり分散均衡状態が安定的となる；交通費用が下がるにつれて、企業間のコミュニケーション外部性による集積力が支配的となり、企業が集積する；さ

らに交通費用が減少すると、地代による分散力が支配的となることで、再度、分散均衡状態が安定化する。

(3) 企業が異質な場合

本節では、企業に異質性を導入した状況を考える。ここでは、図-5-aで設定したパラメータのうち、企業の異質性パラメータ $\theta^{(0)} = \theta^{(1)} = 10$ のみを変化させた場合の結果を図-7-aに示す。この結果と図-5-aを比較すると、企業の異質性が分散力として働くことが分かる。ただし、全都市に必ず企業が立地する点を除くと、創発する集積パターンは図-5-aの結果と類似していることも確認された。

企業の異質性パラメータをさらに小さくし、 $\theta^{(0)} = \theta^{(1)} = 4.8$ とした場合の安定均衡解は、図-7-bのとおりである。この結果から、消費者の異質性を大きくすることにより、分散均衡状態が安定化する回数が増加することが分かる。これは、 $\theta^{(i)}$ の減少により、分散力が非常に大きくなったためであると考えられる。実際、地代による分散力を増やした場合でも、分散均衡状態が3度安定化する図-7-bと同様の現象が見られた。

6. おわりに

本研究では、都市内の産業構造が階層化するメカニズムを明らかにした。具体的には、複数の産業間の相互作用が非対称であれば、各産業の分岐（集積の創発）を引き起こす交通費用が異なるため、産業構造が階層化することを示した²。本稿で明らかにした階層構造の

² この結論は、産業間の非対称性に関する極端な仮定 (i.e., 式 (3)) に依存するものではない。より具体的には $\mu^{(i,j)} > 0$ ($i > j$) であっ

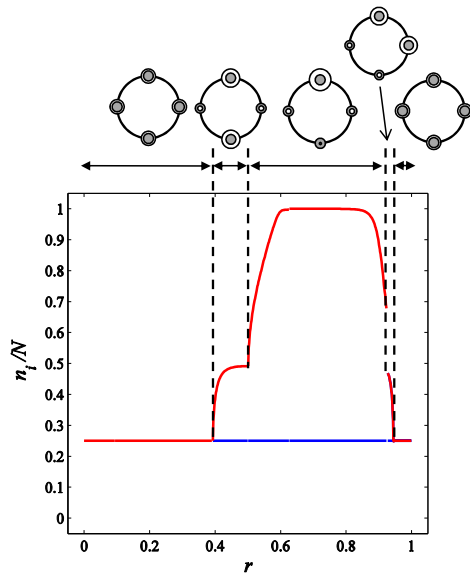


図-7-a $\theta^{(0)} = \theta^{(1)} = 10$

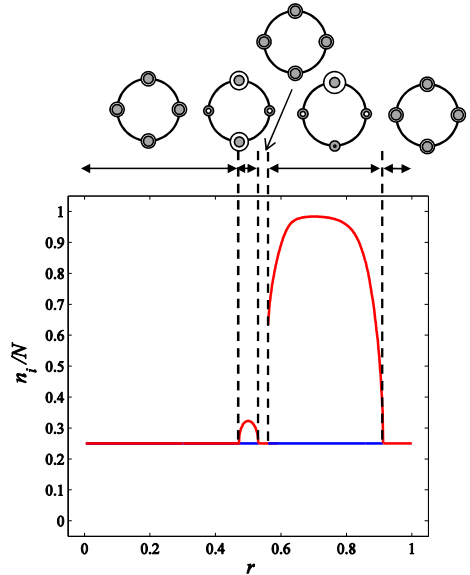


図-7-b $\theta^{(0)} = \theta^{(1)} = 4.8$

図-7 企業の異質性を考慮する場合

創発メカニズムは、従来研究では全く知られていない、オリジナルな貢献である。

本研究では、分散均衡状態からの分岐挙動のみを解析的に示したが、分岐により創発する階層パターンや同時集積パターンの安定性や分岐挙動も、高山・赤松¹⁸⁾で示した方法を拡張すれば、分析できる。また、4立地点2産業という状況設定を一般化しても、本研究と同様の方法で容易に分岐解析を行うことができる。以上

でも産業の階層構造は創発する。ただし、この条件下では、命題 4.1で示した産業 0 のみが集積する (図 3 a) という状況は存在せず、産業 0 の集積に伴い産業 1 の一部も同時に集積する。このとき、両産業の集積の度合いが産業の非対称性 (i.e., $\mu^{(i,j)}$ の値) により変化する結果、産業構造が階層化する。

に示したような、より一般的なケースで、多産業 SISC モデルの分岐挙動を解析的に明らかにすることは、今後の課題である。

付録 I 補題 3.1 の証明

1) 空間割引行列の固有値 f は、式 (11) を計算することで、式 (12) で表されることがわかる。

2) $c(r), c(r)^2$ を r で微分すると、

$$\frac{dc(r)}{dr} = \frac{-2(1-r)}{(1+r)^2} < 0$$

$$\frac{dc(r)^2}{dr} = 2c(r) \frac{dc(r)}{dr} < 0$$

であるため、 f_c ($c \neq 0$) は r に関する減少関数である。また、 $c(r)$ の定義より、 f_c の値域は明らかに $[0, 1)$ である。

3) $c(r)$ は、 $r \in (0, 1)$ の範囲では、必ず 1 未満である。したがって、式 (13) の大小関係が成立する。

付録 II 補題 3.2 の証明

1) 三角行列の固有値はその対角要素で与えられる。したがって、 $\nabla F(\bar{n})$ の固有値は、式 (16)、すなわち、式 (17) で表される。

2) 式 (15) の固有ベクトルは、

$$X \equiv \begin{bmatrix} I & 0 \\ \text{diag}[a] & I \end{bmatrix}$$

で表される。ここで、 a は 1×4 ベクトルであり、その第 c 要素は $a_c = (\lambda_c^{(11)} - \lambda_c^{(00)})/\lambda_c^{(01)}$ である。したがって、 $\nabla F(\bar{n})$ の固有ベクトルは、 $\hat{Z}X$ で与えられるため、式 (18) が得られる。

参考文献

- 1) Anderson, S.P., de Palma, A. and Thisse, J.F.: *Discrete Choice Theory of Product Differentiation*, MIT Press, 1992.
- 2) Berry, B.J.L.: *Geography of Market Centers and Retail Distribution*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1967.
- 3) Braid, R.M.: Heterogeneous Preferences and Non-central Agglomeration of Firms, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.18, pp.57-68, 1988.
- 4) Christaller, W.: *Die Zentralen Orte in Süddeutschland*, Fischer, Jena, 1933 (*Central Places in Southern Germany*, translated by C.W.Baskin, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1966).
- 5) Fujita, M., Krugman, P. and Mori, T.: On the Evolution of Hierarchical Urban Systems, *European Economic Review*, Vol.43, pp.209-251, 1999.
- 6) Fujita, M., Krugman, P. and Venables, A.J.: *The Spatial Economy*, MIT Press, 1999.
- 7) Fujita, M. and Ogawa, H.: Multiple Equilibria and Structural Transition of Non-monocentric Urban Configurations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.12, pp.161-196, 1982.

- 8) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial Agglomeration Pattern of a System of Cities: Bifurcation Theory for Core-Periphery Model, Working Paper, 2009.
- 9) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, Springer, 2002.
- 10) Gray, R.M.: Toeplitz and Circulant Matrices: A Review, *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, Vol 2, Issue 3, pp 155-239, 2006.
- 11) Hirsch, M.W., and Smale, S.: *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974.
- 12) Lösch, A.: *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fische, 1940 (*The Economics of Location*, translated by W. Woglom, New Haven, CT: Yale University Press, 1956).
- 13) Marshall, J.U.: *The Structure of Urban Systems*, Tronto: The University of Tronto Press, 1989.
- 14) Mori, T., Nishikimi, K. and Smith, T.E.: The Number-average Size Rule: A New Empirical Relationship Between Industrial Location and City Size, *Journal of Regional Science*, Vol.48, pp.165-211, 2008.
- 15) Tabuchi, T.: Urban Agglomeration Economies in a Linear City, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.16, pp.421-436, 1986.
- 16) Tabuchi, T. and Thisse, J.F.: Self-Organizing Urban Hierarchy, *CIRJE discussion paper*, No. F-414, University of Tokyo, 2009.
- 17) 池田清宏, 河野達仁, 赤松隆, 柳本彰仁, 八巻俊二: 都市の集積・分散モデルの対称性破壊分岐: 群論的分岐理論によるアプローチ, 土木学会論文集 D, Vol.63, No.4, pp.553-566, 2007.
- 18) 高山雄貴, 赤松隆: 空間競争を考慮した Social Interaction モデルによる複数都心の創発, 投稿中.

一次元空間における産業構造の階層化メカニズム: コミュニケーション外部性を考慮した多産業立地モデルの分岐解析*

高山雄貴**・赤松隆***

本研究の目的は、都市内の産業立地パターンが階層化されるメカニズムを明らかにすることである。そのために、高山・赤松(2010)により提案された、空間競争を考慮した Social Interaction(SISC) モデルを多産業の枠組みに拡張する。そして、高山・赤松による分岐解析手法を応用することで、多産業 SISC モデルで創発する均衡立地パターンを示す。その結果から、産業間の相互作用が非対称であれば、産業構造が階層化し得ることが明らかにされる。

Emergence of Industrial Hierarchy in One-dimensional Space: Bifurcation Analysis of a Multi-industry Urban Location Model with Communication Externality*

By Yuki TAKAYAMA**・Takashi AKAMATSU***

The purpose of this paper is to show how industrial hierarchy emerges in a city. Extending the single-industry model of Takayama and Akamatsu (2010), we construct the multi-industry location model with communication externality. Furthermore, we extend the method of bifurcation analysis proposed by Takayama and Akamatsu to analyze this model. The analysis discloses that asymmetric interactions among industries lead to emergence of industrial hierarchy.