

都市集積・分散ダイナミクスと確率的均衡*

Stochastic Dynamics and Equilibrium Selection in Core-Periphery Model*

織田澤利守**・西山秀紀***

By Toshimori OTAZAWA**・Hidenori NISHIYAMA**

1. はじめに

(1) 研究の目的

都市間交通施設整備は、人口や資本といった生産要素の地域間移動を伴って長期的な効果をもたらす。したがって、その効果を評価するためには、整備後に実現する均衡状態及びそこに至る変遷過程について適切に把握することが必要となる。Core-Periphery モデル¹⁾(以下、CP モデル)は、生産要素の地域間移動、及びそれに伴う経済活動の空間的な集積・分散現象を一般均衡理論的に扱った先駆的研究であり、財の輸送費用が都市の集積・分散パターンを決定する重要な要因であることを明らかにした。また、そこでは、集積の外部性に起因して複数の均衡解が存在しうることが示されている。しかし、複数均衡のうち、どのような要因によっていずれの均衡解が実現するか(均衡選択問題)については詳細には述べられていない。

こうした均衡選択問題に対して、本研究では、長期的に実現する均衡を確率的に予測できる枠組みを提案する。具体的には、労働者の地域に対する選好の異質性とそれに起因する確率動学的ゆらぎを明示的に考慮した完全予見的ダイナミクスを定式化し、それを確定的なダイナミクスとゆらぎのダイナミクスに分解することによって、定常的な均衡解が確定的なダイナミクスの停留点周りに実現する確率分布として表現されることを明らかにする。その上で、複数均衡が存在する場合の均衡選択確率を導出し、将来実現する都市集積・分散パターン(人口パターン)が確率的に予測可能となることを示す。

(2) 既存研究と本研究の位置づけ

均衡選択問題に関しては、これまでマクロ経済学や貿易理論、産業組織論の各分野で議論されてきた。例えば、Diamond and Fudenberg²⁾は、景気循環を説明するモデルにおいて、異なる就業費用をもった完全予見的な労働者を想定し、労働者の自己実現的な期待に応じた複数の均衡経路が存在することを明らかにした。しかし、複数存在する均衡経路のうち、どの経路が選択され、どの均衡解が実現されるのかを理論的に特定するには至っていない。昨今、ゲーム理論分野において調整

過程を明示的に考慮した分析が活発に行われており、いくつかのアプローチが存在する。進化ゲーム理論分野では、突然変異を均衡選択要因とした Kandori, Mailath and Rob³⁾やリプリケーター・ダイナミクスに確率の変動を織り込んだ Foster and Young⁴⁾, Fudenberg and Harris⁵⁾などの研究がある。これらは、いずれも近視眼的な主体による進化的ダイナミクスを想定している。一方、Matsui and Matsuyama⁶⁾は、より合理的な主体による完全予見的ダイナミクスにおける均衡の大域的安定性の概念を提案し、その後、ポテンシャルゲーム・アプローチによる数学的な一般化が図られている⁷⁾。

CP モデルにおいては、Baldwin⁸⁾や Ottaviano⁹⁾が、完全予見的な労働者を想定したダイナミクスを定式化し、実現する均衡が初期条件のみによって特定される(*history matters*)か、または、主体の自己実現的期待に応じて決定される(*expectation matters*)ことを示した。この結果は、先行研究である Krugman¹⁰⁾と同様のものであり、解の不定性については依然として解消されていない。CP モデルの均衡選択問題については、ポテンシャルゲームのアプローチを用いた Oyama¹²⁾がある。また、織田澤・赤松¹³⁾は、経済環境が時々刻々と変化する状況下での完全予見ダイナミクスにおける新しい均衡選択原理を提案し、解の不定性を克服できることを明らかにした。本研究は、織田澤・赤松¹³⁾と同様の問題意識に基づくものであるが、分析の枠組みが異なる。具体的には、Diamond and Fudenberg²⁾を確率動学的に拡張した Aoki and Shirai¹⁴⁾のモデルに基づき、労働者の地域に対する選好の異質性とそれに起因する確率動学的ゆらぎを考慮した完全予見的ダイナミクスの下で長期的に実現する都市集積・分散パターン(人口パターン)の性質を解明する。

2. 静学的 CP モデル

(1) モデルの構造

2 地域からなる経済環境を考える。この経済には、高技能労働(skilled)と低技能労働(unskilled)の2つのタイプの生産要素が存在し、すべての労働者はどちらかのタイプに属するものとする。skilled タイプは地域間を自由に移動可能で両地域で計 N , unskilled タイプは移動不可能で計 $L(=L_1+L_2)$ 存在する。また、地域1に居住する skilled タイプ労働者数を n_1 とし、その割合を $h = n_1/N$ で表す。それぞれの地域には、収

* キーワード：産業立地、集積の経済、均衡選択

** 正員 東北大学大学院情報科学研究科

*** 学生員 工博 東北大学大学院情報科学研究科
(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06,
TEL: 022-795-7508; FAX: 022-795-7500)

穫不変で完全競争的な同質財 A を生産する A 部門と、収穫逓増で独占競争的な差別化財 M を生産する M 部門が存在する。A 部門には unskilled タイプしか従事せず、生産される A 財には輸送費用はかからないとする。一方、M 部門は、skilled を固定生産要素、unskilled を可変生産要素とする。また、M 財は輸送費用がかかり、氷塊費用を仮定する。すなわち、地域 i で生産された M 財 1 単位を地域 j まで輸送するとき、一部は融けてしまい $1/\tau_i$ だけが実際に到着する。定数 τ_i は、1 単位の財が地域 j に到着するために必要な地域 i から発送量である。

各部門で生産される財 A、M のシェアをそれぞれ α 、 $1 - \alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$) とすると、地域 i における代表的消費者 (労働者) の効用関数は、次のように表すことができる：

$$U_i = \ln \left[\left(\frac{M_i}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{A_i}{1 - \alpha} \right)^{1 - \alpha} \right], i = 1, 2 \quad (1)$$

ここで A_i は A 財の消費量、 M_i は M 財の消費を表す指数を表し、差別化された財に関する連続空間において定義されている部分効用関数を表し、CES 関数を用いて、

$$M_i = \left[\int d_{ii}(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} ds + \int d_{ji}(t)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} ds \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \quad (2)$$

と定義される。ここで $d_{ji}(s, t)$ は時刻 t に地域 j で生産されたインデックス s の差別化財が地域 i で消費された量を表す。また、 $\sigma \in (1, +\infty)$ は M 財間の代替弾力性を表す。

(2) 短期均衡

本研究における短期均衡においては、Ottaviano⁹⁾に準拠することとする。

a) 消費者の行動

短期均衡において消費者 (労働者) は瞬間的な自身の効用を高めるように行動する。つまり (1) の以下の予算制約によって行われる効用最大化行動である。

$$\int p_{ii}(s) d_{ii}(s) ds + \int p_{ji}(s) d_{ji}(s) ds + p_i^A A_i = Y_i \quad (3)$$

p_i^A は地域 i での A 財の価格、 $p_{ji}(s, t)$ は地域 i で生産され地域 j で消費される各 M 財の価格である。また、 $Y_i = w_i H_i + w_i^L L_i$ は、地域 i での所得を表す。ここで skilled 労働者の所得 w_i と unskilled 労働者の所得 w_i^L である。

以上より、以下の需要関数を得る。A 財については、

$$A_i = \frac{(1 - \alpha) Y_i}{p_i^A} \quad (4)$$

差別化インデックス s の M 財については、

$$d_{ji}(s) = \frac{p_{ji}(s)^{1-\sigma}}{q_i^{1-\sigma}} \alpha Y_i \quad (5)$$

である。ここで、 $q_i(t)$ は地域 i での価格指数：

$$q_i = \left[\int p_{ii}(t)^{1-\sigma} ds + \int p_{ji}(t)^{1-\sigma} ds \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \quad (6)$$

である。したがって、地域 i における skilled 労働者の間接効用関数は、

$$W_i = \ln \left[w_i q_i^{-\alpha} (p_i^A)^{-(1-\alpha)} \right], \quad (7)$$

と表される。

b) 企業の行動と独占的競争

部門 A では、unskilled 労働者のみを生産要素とし、部門 A の仮定より一般性を失うことなく、1 単位の unskilled 労働者により、1 単位の財が生産されると基準化できる。したがって、完全競争の下での、A 財の価格は unskilled 労働者の賃金に等しくなる ($p_i^A = w_i^L$)。A 財の輸送費用はかからないとしているため、その価格はどちらの地域でも等しい ($p_1^A = p_2^A$)。したがって、 $w_1^L = w_2^L$ でもある。ここで単純化のため、A 財をニューメレールとし、 $p_i^A = w_i^L = 1$ とする。

部門 M では、M 財を $x_i(s)$ 単位生産する場合、 a 単位の skilled 労働者と、 b 単位の unskilled 労働者が生産要素として必要になる。したがって、地域 i の部門 M における 1 企業の総生産費用は、

$$TC_i(s) = w_i a + w_i^L b x_i(s) \quad (8)$$

と表される。規模の経済、消費者の多様性の選考、ならびに供給できる財の種類に制限がないことから、部門 M においては、生産を行う企業数は供給される財の種類に等しい。したがって、地域 i に存在する部門 M の企業数 E_i は、地域 i における skilled 労働者数 H_i を用いて $E_i = H_i/a$ と表される。

部門 M の企業における利潤最大化行動は、以下の利潤関数の最大化行動である：

$$\Pi_i(s, t) = p_{ii}(s, t) d_{ii}(s, t) + p_{ij}(s, t) d_{ij}(s, t) - TC_i(s) \quad (9)$$

短期均衡において成立する M 財の市場清算条件 $x_i(s) = d_{ii}(s) + \tau d_{ij}(s)$ であり、一階条件より、M 財の価格が求められる：

$$p_{ii}(s, t) = \frac{b\sigma}{\sigma - 1}, p_{ij}(s, t) = \frac{\tau_j b\sigma}{\sigma - 1} \quad (10)$$

以上より、部門 M における企業の生産量を表す式が以下のように導かれる：

$$x_i = \frac{\sigma - 1}{b\sigma} \left[\frac{\alpha Y_i}{E_i + \rho_j E_j} + \frac{\rho \alpha Y_i}{\rho_i E_i + E_j} \right] \quad (11)$$

ここで、 $\rho_i \equiv \tau_i^{1-\sigma} \in (0, 1]$ は、自地域内で清算される財の需要に対する輸入財の需要の比率であり、貿易の自由度を表す。

c) 短期均衡における両地域の実質賃金と間接効用差

企業は費用をかけることなく参入・撤退が可能のため、均衡状態では利潤が発生しない。したがって、skilled 労働者の賃金 w_i は、部門 M の 1 企業の生産量 x_i の関数として導かれる：

$$w_i = \frac{bx_i(s)}{a(\sigma - 1)} \quad (12)$$

さらに、整理すると以下の式を得る：

$$x_i = \frac{\alpha}{\sigma} \left[\frac{Y_i}{H_i + \rho_j H_j} + \frac{\rho Y_i}{\rho_i H_i + H_j} \right] \quad (13)$$

ここで、skilled 労働者の総数 H のうち地域 1 に居住する比率を $h \equiv H_1/H$ を与件とすれば、地域 i の部門 M の企業数 N_i 、企業の生産量 x_i 、価格指数 P_i 、均衡賃金 w_i 、所得 Y_i が決定される。また、特に地域 1 の均衡賃金 w_i の地域 2 の均衡賃金 w_2 に対する比率は、

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\{\rho_1 l + \rho_2(1-l)\}h + \psi_1(1-h)}{\psi_2 h + \{\rho_1 l + \rho_2(1-l)\}(1-h)} \quad (14)$$

ここで、 $\psi_1 \equiv l + \rho_2^2(1-l) - (\alpha/\sigma)(1 - \rho_1 \rho_2)l$ 、 $\psi_2 \equiv (1-l) + \rho_1^2 l - (\alpha/\sigma)(1 - \rho_1 \rho_2)(1-l)$ と定義され、また、 $l = L_1/L$ 、 $1-l = L_2/L$ とする。以上より、間接効用関数は、

$$W_i = \ln[w_i/q_i^\alpha] \quad (15)$$

であり、地域間間接効用差 $W_1(h) - W_2(h)$ は、

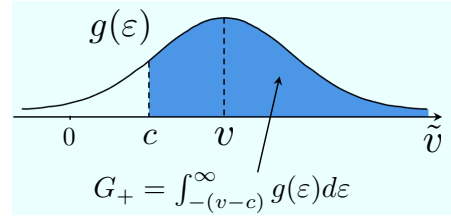
$$W_1(h) - W_2(h) = \frac{\alpha}{\sigma - 1} \ln \left[\frac{h + \rho_2(1-h)}{\rho_1 h + (1-h)} \right] + \ln \left[\frac{\{\rho_1 l + \rho_2(1-l)\}h + \psi_1(1-h)}{\psi_2 h + \{\rho_1 l + \rho_2(1-l)\}(1-h)} \right] \quad (16)$$

と導かれる。これ以降は地域間間接効用差を $f(h) = W_1(h) - W_2(h)$ と表す。

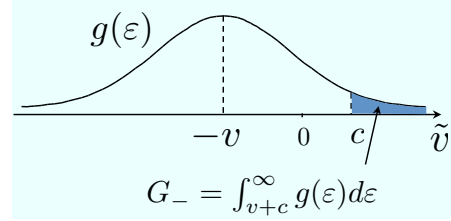
3. 都市集積・分散ダイナミクス

(1) ゆらぎを考慮した完全予見ダイナミクス

長期均衡では、skilled 労働者は自身の将来にわたって獲得する期待総効用を最大とするように地域間の移住選択を行う。ただし、労働者は自由に移住を行えるのではなく、ポアソン到着率 a で移住選択の機会が訪れる。移住の機会を得た地域 i の skilled 労働者は、地域 j に移住した場合に得られる期待総効用 v_j から移住に要する費用 c を引いた値と移住せずに地域 i に居住する場合に得られる期待総効用 v_i とを比較して、移住に関する意思決定を行う。すなわち、完全予見ダイナミクスを想定する。



(a) 地域 2 ⇒ 地域 1 の移住



(b) 地域 1 ⇒ 地域 2 の移住

図-1 労働者の異質性

a) 労働者の異質性

労働者の地域に対する選好には異質性が存在し、知覚効用は確定効用と各個人で異なるランダム項 ε の和からなるとする。

$$\tilde{v}_i = v_i - v_j + \varepsilon \quad (17)$$

ランダム項 ε の確率密度関数を $g(\varepsilon)$ と表す。労働者は知覚効用が移住にかかる費用 c を上回った場合に移住を行うので、地域 1 から 2 へ、地域 2 から 1 へ移住する労働者の割合はそれぞれ、

$$G_+ = \int_{-(v_1 - v_2 - c)}^{\infty} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (18)$$

$$G_- = \int_{-(v_2 - v_1 - c)}^{\infty} g(\varepsilon) d\varepsilon \quad (19)$$

と表される。これらを用いると、地域 1 に存在する skilled 労働者数が n_1 から $n_1 + 1$ へと遷移する確率は $r_n = an_2 G_+$ 、 n_1 から $n_1 - 1$ と遷移する確率は $l_n = an_1 G_-$ と表現される。なお、これ以降は、確定効用差を $v = v_1 - v_2$ と表現する。また、 $n_1 = n$ 、 $n_2 = N - n$ とおく。

b) マスター方程式

時刻 t に n 人が地域 1 に存在する確率を $P_n(t)$ とすると、 $P_n(t)$ の時間変化は、以下のマスター方程式で表される。

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = r_{n-1}P_{n-1}(t) + l_{n+1}P_{n+1}(t) - (r_n + l_n)P_n(t) \quad (20)$$

式 (20) は、時刻 t に n 人が地域 1 に存在するという確率が、 $n-1$ 人が地域 1 に居住している状態で地域 2 から 1 人が移住する確率と $n+1$ 人が地域 1 に居住して

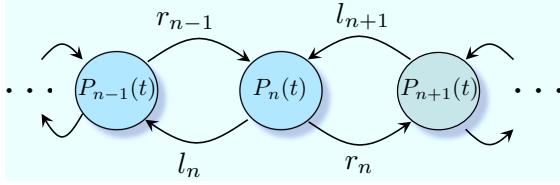


図-2 確率 $P_n(t)$ の推移

いる状態から 1 人が地域 2 へ移住する確率の和から地域 1 に n 人が居住している状態から 1 人が出ていく確率、入ってくる確率を引いたものとなることを表している。ここで、以下のような変数変換：

$$h = \frac{n}{N} = \phi + \frac{\xi}{\sqrt{N}} \quad (21)$$

を施し、テイラー展開を行った後に整理すれば、

$$\frac{d\phi}{dt} = a(1-\phi)G_+ - a\phi G_- \quad (22)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = A(\phi)P + A(\phi)\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + C(\phi) \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \quad (23)$$

$$\Phi(\phi) = a(1-\phi)G_+ - a\phi G_-$$

$$A(\phi) = -\Phi'(\phi)$$

$$C(\phi) = \frac{1}{2}a\{(1-\phi)G_+ + \phi G_-\}$$

を得る（詳細は付録 I. 参照）。式 (22) は、平均値 ϕ のダイナミクスを表す式であり、以降では平均値ダイナミクスと呼ぶ。また、式 (23) は確率的ゆらぎに起因する拡散過程を表す Fokker-Planck 方程式であり、以降ではゆらぎのダイナミクスと呼ぶ。

c) Value Functions

skilled 労働者は現在から将来までの確定効用に関して、予見的に知ることができるとする。地域 1(地域 2) に n 人が存在するときに得られる効用を現在価値換算したものを $v_1(n/N)(v_2(n/N))$ と表せば、

$$\begin{aligned} rv_1\left(\frac{n}{N}\right) = & W_1 + a \int_{v+c}^{\infty} \left[v_2\left(\frac{n-1}{N}\right) - v_1\left(\frac{n}{N}\right) - c + z \right] dG(z) \\ & + a(N-n)G_+ \left[v_1\left(\frac{n+1}{N}\right) - v_1\left(\frac{n}{N}\right) \right] \\ & + a(n-1)G_- \left[v_1\left(\frac{n-1}{N}\right) - v_1\left(\frac{n}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} rv_2\left(\frac{n}{N}\right) = & W_2 + a \int_{-v+c}^{\infty} \left[v_1\left(\frac{n+1}{N}\right) - v_2\left(\frac{n}{N}\right) - c + z \right] dG(z) \\ & + a(N-n+1)G_+ \left[v_2\left(\frac{n+1}{N}\right) - v_2\left(\frac{n}{N}\right) \right] \\ & + anG_- \left[v_2\left(\frac{n-1}{N}\right) - v_2\left(\frac{n}{N}\right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ただし、 $n=0$ のときには、

$$rv_1(0) = W_1 + aNG_+ \left[v_1\left(\frac{1}{N}\right) - v_1\left(\frac{0}{N}\right) \right] \quad (26)$$

であり、 $n=N$ のときには、

$$rv_2(1) = W_2 + aNG_+ \left[v_2\left(\frac{N-1}{N}\right) - v_2\left(\frac{N}{N}\right) \right] \quad (27)$$

である。なお、 r は割引率である。

式 (24),(25) の右辺は、第一項がその地域での短期均衡のときに得られる効用、第二項が次の瞬間に自身が他地域へ移住を行ったときに得られる効用の増分、さらに第三項は次の瞬間に自身以外の誰かが地域 1 から 2 へ、第四項は地域 2 から 1 へ移住を行った場合の効用変化分である。つまり、あるときにその地域にいるということの価値は、短期均衡で得られる価値と、次の瞬間に自身も含め、誰か 1 人が地域を移動したときに得られる価値の増分の現在価値との和で表される。ここで、式 (24),(25) についても式 (21) の変数変換を施した後、テイラー展開を行い整理すれば、

$$\begin{aligned} rv_1(\phi) = & W_1 + a\{(1-\phi)G_+ - \phi G_-\}v'_1 \\ & - aG_-(v_1(\phi) - v_2(\phi)) + a \int_{v+c}^{\infty} (z-c)dG(z) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} rv_2(\phi) = & W_2 + a\{(1-\phi)G_+ - \phi G_-\}v'_2 \\ & - aG_-(v_2(\phi) - v_1(\phi)) + a \int_{-v+c}^{\infty} (z-c)dG(z) \end{aligned} \quad (29)$$

を得る（詳細は付録 II. 参照）。さらに、両式を引くと次式を得る：

$$\begin{aligned} rv(\phi) = & f(\phi) - (G_+ + G_-)v(\phi) \\ & + \left[\int_{v+c}^{\infty} (z-c)dG(z) - \int_{-v+c}^{\infty} (z-c)dG(z) \right] \\ & + \dot{v} \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、 $\dot{v} = dv/dt = (dv/d\phi)(d\phi/dt)$ である。式 (30) は、地域 2 に対する地域 1 の（相対的な）価値であり、skilled 労働者の人口比率（の平均値） ϕ の関数として表される。

(2) 長期均衡

a) 平均値ダイナミクス

式 (22),(23),(30) は、本モデルにおけるシステムの挙動を表す。式 (22),(30) は確定値な場合の（平均値）のダイナミクスであり、この 2 式の長期均衡状態 ($\dot{v} = 0, \dot{\phi} = 0$) を同時に満たす点が停留点である。図-3 は、 $\dot{v} = 0, \dot{\phi} = 0$ の概形を輸送費用 τ の水準毎に示したものである。図中の黒丸 (●) は、(局所的に) 安定的な停留点を白丸 (○) は不安定な停留点を表す。輸送費用が中間的な場合や低い場合には、同時に複数の安定的な停留点が存在することがわかる。ここで、輸送費用と停留点における人口比率 ϕ の関係は、図-4 のようになる。この図は、標準的な CP モデルにおいて輸送費用

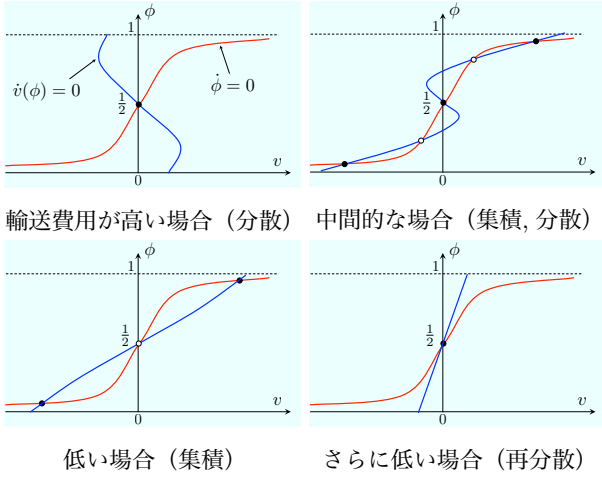


図-3 平均値ダイナミクスの停留点

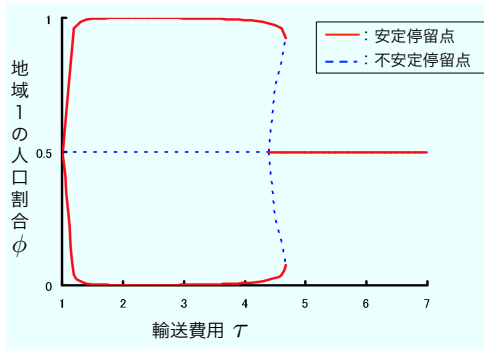


図-4 輸送費用 τ と地域 1 の人口割合 ϕ

と均衡解の関係を表すトマホーク・ダイアグラムと対応している。また、パラメータによっては、この図形がベル型となることも確認された（図-6 参照）。以上より、労働者の異質性と移住費用を考慮した完全予見的ダイナミクスを想定した本研究において、輸送費用と停留点における人口比率 ϕ の関係について既存の枠組みと同様の結果が得られることがわかった。

b) ゆらぎのダイナミクス

ゆらぎのダイナミクスを表現する Fokker-Planck 方程式 (23) の定常状態 ($\partial P / \partial t = 0$) を考える。

$$A(\phi)P + A(\phi)\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} + C(\phi)\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = 0 \quad (31)$$

上式をを解くと、 ξ の定常分布 $P(\xi)$ ：

$$P(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi C(\phi)/A(\phi)}} \exp \left[-\frac{A(\phi)}{C(\phi)} \frac{\xi^2}{2} \right] \quad (32)$$

を得る。この分布は、平均が 0 で分散 $\sigma^2 = C(\phi)/A(\phi)$ である正規分布を表している。さらに、書き換えると、

$$P(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma(\phi)}} \exp \left[-\frac{(h - \phi)^2}{2\sigma^2(\phi)/N} \right] \quad (33)$$

となり、skilled 労働者の人口比率 $h = n/N$ が平均値ダイナミクスの（局所的に）安定停留点を中心として、

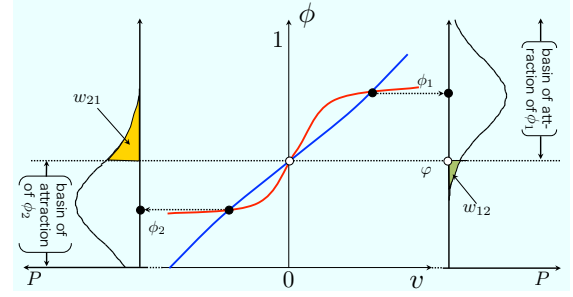


図-5 確率的均衡と均衡選択確率

分散 σ^2 で分布することが明らかとなった。概念図を図-5 に示す。以上より、本モデルにおける確率的な均衡解が確定的なダイナミクスの安定停留点周りに実現する正規分布として表現されることが示された。

(3) 均衡選択確率

以上のことを用いて、本節では、都市集積・分散パターンに関する均衡選択問題について検討を行う。既に述べたように、本モデルでは複数の安定的な均衡解が同時に存在し得る。この場合、各均衡の basin of attraction（均衡が支配する領域）から逸脱する確率を算出し、システム全体の定常状態を考慮することにより、各均衡が選択される確率を導出できる。例として、図-5 のように均衡が 2 つある場合を考える。安定均衡における人口比率を ϕ_1, ϕ_2 ($\phi_1 > \phi_2$)、不安定均衡を φ と表し、安定均衡 ϕ_i ($i = 1, 2$) の選択確率を π_i とする。ただし、 $\pi_1 + \pi_2 = 1$ のとき、均衡 i から j へ逸脱する確率 w_{ij} は、式 (32) より以下のように導出される：

$$w_{12} = \Pr[\xi > \sqrt{N}(\phi_1 - \varphi)]$$

$$w_{21} = \Pr[\xi > \sqrt{N}(\varphi - \phi_2)]$$

また、選択確率の時間変化は、

$$\frac{d\pi_1}{dt} = \pi_2 w_{21} - \pi_1 w_{12} \quad (34)$$

であり、その定常状態 $d\pi_1/dt = 0$ を考慮することにより均衡選択確率：

$$\pi_1 = \frac{w_{21}}{w_{12} + w_{21}}, \quad \pi_2 = \frac{w_{12}}{w_{12} + w_{21}} \quad (35)$$

を得る（安定的な停留点が 3 つある場合は、付録.III に示した）。

さらに、定常状態におけるシステム全体の安定性について議論するために、均衡間の遷移に要する平均到達時間を $T \equiv 1/w_{12} + 1/w_{21}$ と定義する。

以上より、複数均衡の可能性が示されたときに、いずれの均衡解が選択されるかについて、確率的に予測することが可能になった。

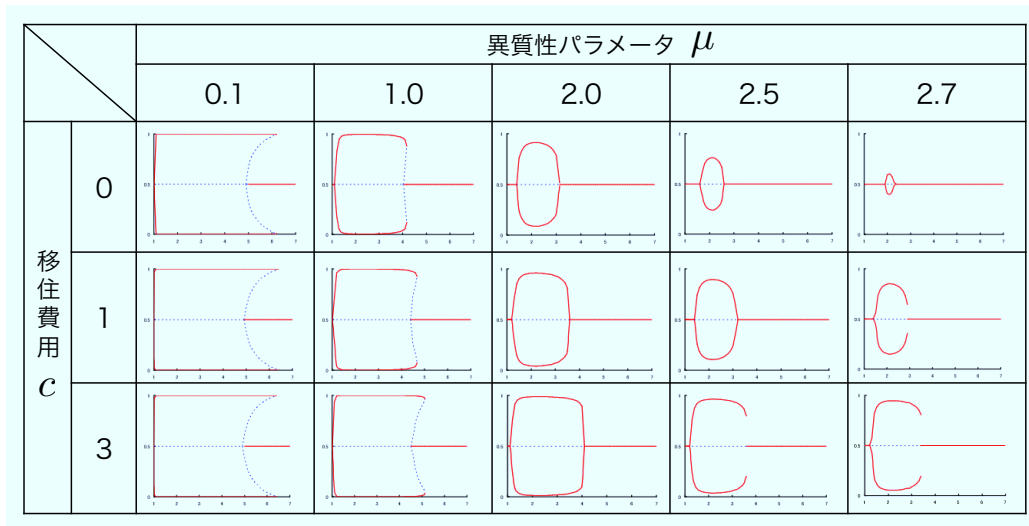


図-6 異質性の度合，移住費用と停留点の関係

4. 数値解析

(1) 設定

次のように各パラメータを設定し，数値解析を行う． $\alpha = 0.5$ ， $\sigma = 2$ ， $r = 0.04$ ， $N = 100$ ， $a = 1/N$ ．また，労働者の異質性を表す分布 $g(\varepsilon)$ としてガンベル分布を用いる．労働者が地域 i から移住を行い地域 j へ移る割合を次のように表す：

$$G = \frac{\exp[(v_j - c)/\mu]}{\exp[(v_j - c)/\mu] + \exp[v_i/\mu]} \quad (36)$$

ここで， μ は異質性のパラメータであり，値が大きくなるほど，その異質性の度合いが増していることを表す．以下では，まず始めに対称な2地域 ($l = L_1/L = 0.5$ ， $\tau_1 = \tau_2 = \tau$) の場合について分析を行い，続いて非対称な2地域について分析する．

(2) 対称な2地域の場合

a) 平均値ダイナミクスの停留点

先に示した図-4 は， $c = 1$ ， $\mu = 1.0$ のときの輸送費用 τ と平均値ダイナミクスの停留点の関係を示している．横軸に輸送費用 τ ，縦軸に地域1の人口割合（の平均値） ϕ をとり，赤の太線が安定的な均衡，青の点線が不安定な均衡を示す．この場合，輸送費用が高いときには，人口は両地域に分散している．徐々に輸送費用が低下していくと，分散，集積の両方が安定的となる状態を経て，両地域のどちらかに集積することが安定的となる．さらに輸送費用が低くなると，空間的な集積の効果が消滅し，労働者の地域に対する選好の異質性の効果により，再び分散状態が安定的となる．

移住費用 c と異質性の度合 μ を変化させた場合の結果を図-6 に整理した．移住費用の大小および異質性の度合の違いによって，均衡解がどのような影響を受けるかが見て取れる．移住費用を低下（増加）させると，

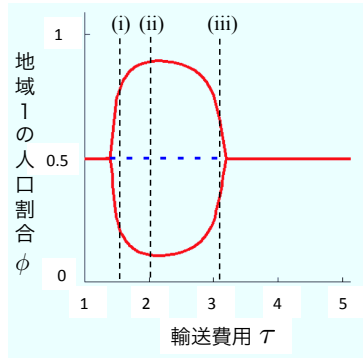
より分散状態に近づく様子（一方の地域へ集積していく様子）がわかる．また，異質性が増加させた場合も分散状態に近づく．すなわち，移住費用の低下および異質性の増加は，地域間の移住を活性化させ，一方の地域への集積を抑制する分散力として働くことがわかる．

図-7 は， $c = 1$ ， $\mu = 2.5$ のときの輸送費用 τ と平均値ダイナミクスの停留点および確率均衡の関係を示している．対称な地域を想定しているため，2つの均衡が存在する場合に各均衡が選択される確率は0.5ずつであるが，(b) より，周辺の確率分布は輸送費用によって異なることがわかる．(a) に示した輸送費用 τ の異なる3ケース (i)-(iii) に関して，均衡間の遷移に要する平均到達時間 T の値はそれぞれ，(i) $\tau = 1.5$ のケース： $T_1 = 2.35 \times 10^6$ ，(ii) $\tau = 2.0$ のケース： $T_2 = 1.86 \times 10^{35}$ ，(iii) $\tau = 3.13$ のケース： $T_3 = 9.46$ となる．すなわち，輸送費用が低く，一方の地域へある程度集積が進んだ状態では，均衡間を遷移する可能性が極めて低く，システムは非常に安定であるのに対し，輸送費用が高く，集積が進んでいない状態では，均衡間を頻繁に遷移する可能性があり，不安定であるということがいえる．

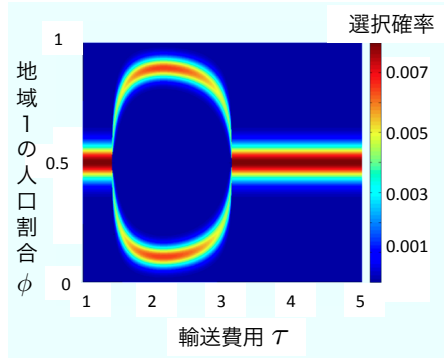
(3) 非対称地域の場合

a) unskilled 労働者数に関する非対称性 ($l = 0.55$)

人口比率は $l = 0.55$ である非対称な2地域を想定する． $c = 3$ ， $\mu = 2.5$ とし，その他のパラメータは対称地域の分析と同様である．図-8 は，輸送費用 τ と平均値ダイナミクスの停留点と確率的均衡解の関係を表している．(a) より， $\tau = 2$ 付近で複数の安定的な停留点が存在する．すなわち，人口規模の小さい地域よりに集積が起こる可能性があることがわかる．しかし，(b) には，人口規模の小さい地域への集積が起こる確率は

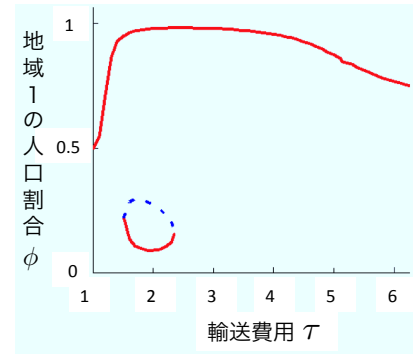


(a) 平均値ダイナミクスの停留点

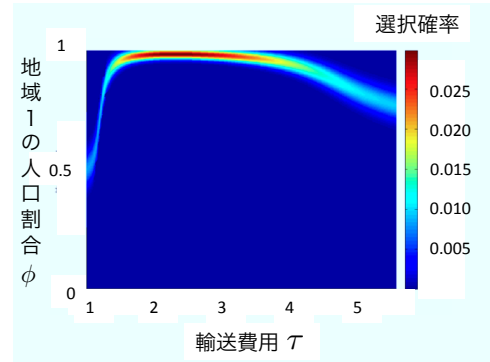


(b) 均衡選択確率

図-7 輸送費用 τ と確率的均衡（対称な2地域）



(a) 平均値ダイナミクスの停留点



(b) 均衡選択確率

図-8 輸送費用 τ と確率的均衡（非対称な2地域）

長期的にはほぼ0となることが示されている。以上より、確定論的な枠組みにおいて安定な均衡が確認されても、その均衡が選択されない可能性があることが明らかとなった。

b) 輸送費用に関する非対称性

次に、輸送費用に関する非対称性について考察する。通常、2地域間では輸送費用は等しいと考えるのが自然であるが、より現実的な $N(>2)$ 地域モデルの場合、地域の空間的位置関係や交通インフラの整備状況に応じて地域間で交通アクセシビリティの差が生じる。そうした状況を想定するため、ここでは仮想的に交通アクセスの良い地域1とそうでない地域2を考える ($\tau_1 < \tau_2$)。これにより、企業は輸送費用を軽減できる地域1に立地する方が地域2より収益性が高く、その分、地域1の skilled 労働者の賃金が相対的に高くなる（他地域からの移入財が安くなることにより物価が低下する効果は含まれない）。その際に実現する均衡パターンの基本的に性質は、unskilled 労働者数の非対称性を考慮した場合と同様となった。すなわち、交通アクセスのよい地域に集積が起こり、そうでない地域に集積が起こる確率は長期的にはほぼ0となることが示された。

5. おわりに

本研究では、都市集積・分散モデルの均衡選択問題に対して、確率論的な均衡概念を導入することによって、長期的に実現する均衡を確率的に予測できる枠組みを提案した。数値解析の結果、確定論的モデルにおいて複数均衡が存在する場合でも、人口規模が小さい地域や交通アクセスの悪い地域に集積が起こる均衡パターンは長期的にはほぼ起こらないことが示された。

本研究の枠組みは、現時点では、2地域モデルの分析に留まっている。従って、都市間の空間的な位置関係や交通ネットワークの形状といった重要な要素を考慮できていない。また、本論文では、その主眼を新たな枠組みの開発に置くため、特に静学モデル部分は極めて単純化されたモデルを採用した。そのため、都市集積に起因する通勤コストや地代の増加といった urban cost は無視されている。上記の結果の一部は、こうした影響を受けていると思われる。今後の課題として、高速都市間交通整備のもたらす長期的・広域的な効果を予測・評価できる多地域モデルへの拡張が挙げられる。

謝辞：本研究は、科学研究補助金・若手研究（B）（課題番号：20760337）ならびに基盤研究（B）（課題番号：21360240）の助成を受けたものである。ここに記して感謝の意を表する。

付録 I. マスター方程式 (20) の展開

式 (20) に $r_n = a(N - n + 1)G_+$, $l_n = anG_-$ を代入すれば,

$$\begin{aligned} \frac{dP_n(t)}{dt} &= a(N - n + 1)G_+P_{n-1}(t) \\ &\quad + a(n + 1)G_-P_{n+1}(t) \\ &\quad - a\{(N - n)G_+ + nG_-\}P_n(t) \\ (\text{左辺}) &= \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} \sqrt{N} \\ (\text{右辺}) &= aN \left(1 - \phi - \frac{\xi}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \right) G_+ \\ &\quad \times \left[P - \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2N} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \frac{1}{N} \right] \\ &\quad + aN \left(\phi + \frac{\xi}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \right) G_- \\ &\quad \times \left[P + \frac{\partial P}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \frac{1}{N} \right] \\ &\quad + a(N - n)G_+P - anG_-P \\ &= -a\{(1 - \phi)G_+ - \phi G_-\} \frac{\partial P}{\partial \xi} \sqrt{N} \\ &\quad + a \left[(G_+ + G_-)P + (G_+ + G_-)\xi \frac{\partial P}{\partial \xi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\{(1 - \phi)G_+ + \phi G_-\} \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} \right] + O(N^{-1/2}) \end{aligned}$$

(左辺) は n を固定し, 式 (21) を t で偏微分することによって得る. (左辺) = (右辺) が N の大きさに関わらず恒等的に成立するためには, 式 (22),(23) および $O(N^{-1/2}) = 0$ が成立する必要がある.

付録 II. Value Function(34) の展開

式 (24), (25) に式 (21) の変数変換を行い, テイラー展開をすると,

$$\begin{aligned} r \left(v_1 + v'_1 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right) &= W_1 + a \int_{v+c}^{\infty} (-c + z) dG(z) \\ &\quad + a \left[v_2 + v'_2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} \right) - v_1 - v'_1 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right] G_- \\ &\quad + aN \left(1 - \phi - \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right) \\ &\quad \times \left[v_1 + v'_1 \left(\frac{\xi}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \right) - v_1 - v'_1 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right] G_+ \\ &\quad + aN \left(\phi + \frac{\xi}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} \right) \\ &\quad \times \left[v_1 + v'_1 \left(\frac{\xi}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} \right) - v_1 - v'_1 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right] G_- \\ r \left(v_2 + v'_2 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right) &= W_2 + a \int_{-v+c}^{\infty} (-c + z) dG(z) \\ &\quad + a \left[v_1 + v'_1 \left(\frac{\xi}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \right) - v_2 - v'_2 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right] G_+ \\ &\quad + aN \left(1 - \phi - \frac{\xi}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \right) \\ &\quad \times \left[v_2 + v'_2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{N}} + \frac{1}{N} \right) - v_2 - v'_2 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right] G_+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ aN \left(\phi + \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right) \\ &\times \left[v_2 + v'_2 \left(\frac{\xi}{\sqrt{N}} - \frac{1}{N} \right) - v_2 - v'_2 \frac{\xi}{\sqrt{N}} \right] G_- \end{aligned}$$

となる. ここで, $E(\xi) = 0$, $V(\xi) = \sigma^2$ を考慮すれば, N の大きさに依らず上式が恒等的に成立するための条件として, 式 (28),(29) を得る.

付録 III. 安定停留点が 3 つの場合

平均値ダイナミクスの安定的な停留点をそれぞれ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , 不安定な停留点を ψ_1, ψ_2 とする. また, ϕ_i が選択される確率を π_i , ゆらぎによって ϕ_i の basin of attraction から逸脱し, ϕ_j へ移る確率を w_{ij} とする. 確率 π_i の時間変動は, 次のように表される.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1}{\partial t} &= \pi_2 w_{21} + \pi_3 w_{31} - \pi_1 (w_{12} + w_{13}) \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial t} &= \pi_1 w_{12} + \pi_3 w_{32} - \pi_2 (w_{21} + w_{23}) \\ \frac{\partial \pi_3}{\partial t} &= \pi_1 w_{13} + \pi_2 w_{23} - \pi_3 (w_{31} + w_{32}) \end{aligned}$$

定常状態 $\partial \pi_i / \partial t = 0$ における均衡選択確率 π_i は, $\sum_{i=1}^3 \pi_i = 1$ を用いて,

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (w_{21}w_{32} + w_{21}w_{31} + w_{23}w_{31})/\Omega \\ \pi_2 &= (w_{12}w_{31} + w_{12}w_{32} + w_{13}w_{32})/\Omega \\ \pi_3 &= (w_{12}w_{23} + w_{21}w_{13} + w_{23}w_{13})/\Omega \end{aligned}$$

と求まる. ただし, $\Omega = w_{12}w_{31} + w_{12}w_{32} + w_{13}w_{32} + w_{21}w_{32} + w_{21}w_{31} + w_{23}w_{31} + w_{12}w_{23} + w_{21}w_{13} + w_{23}w_{13}$.

参考文献

- 1) P. Krugman: Increasing returns and economic geography, *The Journal of Political Economy*, Vol.99, No.3, pp.483-499, 1991.
- 2) P. Diamond and D. Fudenberg: *Journal of Political Economy*, Vol.97, No.3, pp.606-620, 1989.
- 3) M. Kandori, G. Mailath, and R. Rob: Learning, mutation, and long run equilibria in games, *Econometrica*, Vol.61, No.1, pp.29-56, 1993.
- 4) D. Foster and P. Young: Stochastic evolutionary game dynamics, *Theoretical Population Biology*, Vol.38, pp.219-232, 1990.
- 5) D. Fudenberg and C. Harris: Evolutionary dynamics with aggregate shocks, *Journal of Economic Theory*, Vol.57, pp.420-441, 1992.
- 6) A. Matsui and K. Matsuyama: An approach to equilibrium selection, *Journal of Economic Theory*, Vol.65, pp.415-434, 1995.
- 7) J. Hofbauer and G. Sorger: Perfect foresight and equilibrium selection in symmetric potential games, *Journal of Economic Theory*, Vol.85, pp.1-23, 1999.
- 8) R. E. Baldwin: Core-periphery model with forward-looking expectations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.33, pp.22-49, 2001.
- 9) G. I. P. Ottaviano: Monopolistic competition, trade, and endogenous spatial fluctuations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.31, pp.51-77, 2001.

- 10) P. Krugman: History versus expectations, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.106, No.2, pp.651-667, 1991.
- 11) K. Fukao and R. Benabou: History versus expectation: a comment, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol.108, No.2, pp.535-542, 1993.
- 12) D. Oyama: History versus expectation in economic geography reconsidered, *Journal of Economic Dynamics & Control*, Vol.33, pp.394-408, 2009.
- 13) 織田澤利守, 赤松隆: 集積経済下における地域間移住タイミング選択の均衡ダイナミクス, 土木学会論文集 D, No.4, pp.567-578, 2007.
- 14) M.Aoki and Y. Shirai: A new look at the Diamond search model: Stochastic cycles and equilibrium selection in search equilibrium, *Macroeconomic Dynamics*, Vol.4, pp.487-505, 2000.

都市集積・分散ダイナミクスと確率的均衡*

織田澤利守**, 西山秀紀***

本論文では, 都市集積・分散モデルの均衡選択問題に対して, 確率論的な均衡概念を導入することによって, 長期的に実現する均衡を確率的に予測できる枠組みを提案する. 具体的には, 労働者の地域に対する選好の異質性, およびその確率動的なゆらぎを明示的に考慮した完全予見的ダイナミクスを定式化し, 長期的な均衡解が平均値ダイナミクスの停留点周りに実現する確率分布として表現されることを示す. その上で, 複数均衡が存在する際の均衡選択確率を導出する. さらに, 本研究では, このような枠組みにおける都市集積・分散ダイナミクスの特性を明らかにする.

Stochastic Dynamics and Equilibrium Selection in Core-Periphery Model*

By Toshimori OTAZAWA** and Hidenori NISHIYAMA***

In this paper, we study a perfect foresight dynamics in the Core-Periphery(CP) model with taste heterogeneity of agents, that has multiple equilibria. We introduce stochastic fluctuations into the model and describe the state of the model by a Markov process. By solving the master equation and the value function, we show that equilibrium agglomeration patterns can be obtained as probability distributions around the stationary states of the mean dynamics and that this provides a basis for equilibrium selection in CP models.
