

不確実な経済環境における都市集積の均衡ダイナミクス：非線形相補性アプローチ*

Core-Periphery Equilibrium Dynamics under Uncertainty: Nonlinear Complementarity Approach*

織田澤 利守**・赤松 隆***・藤原 誠****

by Toshimori OTAZAWA**, Takashi AKAMATSU*** and Makoto FUJIWARA****

1. はじめに

KrugmanのCore-Peripheryモデル¹⁾(以下、CPモデル)は、労働力(生産要素)の地域間移動、及び、それに伴う経済活動の空間的な集積・分散現象を一般均衡理論的に扱った先駆的研究である。CPモデルでは、集積の外部性に起因して複数の(長期的な)均衡解が存在しうることが示されたが、どのような要因によっていずれの均衡解が選択されるか(均衡選択問題)については詳しく分析されていない。しかし、土木計画学が対象とするような社会基盤整備の効果を計測する際には、複数均衡のうちどの均衡解が実際に実現するかを予測することは重要な課題であり、こうした問題を扱うためには、長期的な均衡解に至る過程を記述するダイナミクスに関する分析が必要となる。

複数均衡下の経済における均衡選択に関しては、マクロ経済学や貿易理論、産業組織論の各分野に研究蓄積がある^{2)–4)}。そこでは、“*history*”と“*expectation*”に基づく異なる2つの均衡選択原理が提案されてきた。前者は、初期状態値のみによって実現する均衡が特定されること(*history matters*)であり、後者は、予見的な主体(企業や消費者)の自己実現的な期待のみによって均衡が決定されること(*expectation matters*)である。さらに、Krugmanら^{5),6)}は、労働市場を例とした複数均衡問題を対象に、完全予見の設定の下で2つの均衡選択原理を統一的に表現するモデルを構築し、各均衡選択原理が有効となる条件を示した。しかし、そこで想定されている確定論的な枠組みでは、“*expectation*”に応じて複数の均衡経路が存在するため、均衡解を理論的に全く特定できないという問題(解の不定性)が存在する。

Krugman¹⁾以降、都市における経済活動の集積現象を説明する研究が膨大に蓄積されてきたが、均衡選択問題を明示的に扱った研究は少ない。Ottaviano⁷⁾やBaldwin⁸⁾は、CPモデルに応用し、確定論的な枠組みにおいて労働者が将来にわたって獲得する総効用に基づき移住地域を選

択する予見的ダイナミクス(*forward-looking dynamics*)を分析している。その結果、均衡選択に関しては、初期状態のみによって特定の均衡解が決定されるか、または、解は不定であるというKrugmanら^{5),6)}と同様な非常に極端な結論しか得られていない。昨今、ゲーム理論分野の抽象研究において、不確実性の導入により均衡選択問題における解の不定性が解消される可能性が示されている^{9),10)}が、きわめて単純化されたダイナミクスを想定しており、都市集積のダイナミクスを扱うには不十分である。

本研究では、従来研究の確定論的な枠組みでは未解決であった都市集積モデルの均衡選択問題に対し、確率論的な枠組みでの完全予見的ダイナミクス(*perfect-foresight dynamics*)を導入した新しい均衡選択原理を提案することを目的とする。本論文では、この目的達成のための第一段階として、i) 経済環境に不確実性(確率動的なゆらぎ)が存在する下での労働者の地域間移住ダイナミクスの定式化を行い、その均衡条件が非線形相補性問題(NCP:*Nonlinear Complementarity Problem*)として表現できることを明らかにする。さらに、ii) 実際に均衡ダイナミクスを解くための効率的なアルゴリズムの開発を行う。なお、本研究の成果は、集積の経済下において人口・資本の地域間移動を考慮した社会基盤整備の評価法を構築するための理論的基盤となる。

本論文の構成は、以下のとおりである。2.ではCPモデルにおける短期均衡の定式化を行い、その性質について述べる。3.では、経済環境の不確実性を考慮した人口移動ダイナミクスの定式化を行い、非線形相補性問題に帰着することを示す。4.では、問題を離散化した上で、効率的な数値解析法を提案する。5.では、提案する手法を適用した数値計算例を通じて提案手法の有効性を示す。

2. CPモデルにおける短期均衡

(1) モデルの仮定

本研究での短期均衡の分析においては、CPモデルを扱いやすくしたForslid and Ottaviano¹¹⁾の定式化を採用する。このモデルは、労働者の間接効用を地域間の人口配分の関数として陽的に表現できるという特徴がある。経済は対称的な2地域($m, n = 1, 2; m \neq n$)から構成される。この経済には、高技能労働(*skilled*)と低技能労働(*unskilled*)という2つのタイプの生産要素が存在し、全ての労働者は自らのタイプにあった1単位の労働を非弾力

*キーワード: Core-Periphery model, Multiple equilibria, Perfect-foresight dynamics, Economic uncertainty

**正会員 博(工) 東北大学大学院情報科学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06)E-mail:ota@plan.civil.tohoku.ac.jp

***正会員 博(工) 東北大学大学院情報科学研究科(〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉6-6-06)E-mail:akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp

****非会員 工修 仙台市建設局道路部(〒980-8671 仙台市青葉区国分町3丁目7-1)

的に供給するものとする。経済全体における skilled, unskilled の労働者数をそれぞれ $H = H_1 + H_2$, $L = L_1 + L_2$ で表す。ただし, H_m (L_m) は, 地域 m における skilled (unskilled) の労働者数である。skilled の労働者は地域間を自由に移動可能であると仮定する。その結果, 地域 m における skilled の労働者数は内生変数であり, 時間の経過に伴って変化する。一方, unskilled の労働者は地域間を移動不可能であり, L_m は固定とする。また, この経済には, 農業部門 A (以下, 部門 A) と工業部門 M (以下, 部門 M) の 2 部門があるとする。農業部門 A を定義する特徴は, 収穫不変の技術により, unskilled を生産要素として 1 種類の同質な財を生産する完全競争的な部門ということであり, 工業部門 M は, 収穫逓増の技術により, skilled 及び unskilled を生産要素として, 広範囲の差別化された財を生産する独占競争的な部門である (したがって, 「農業」, 「工業」という言葉は必ずしも文字通りに解釈する必要はない)。各部門の生産物を M 財, A 財と呼ぶ。M 財の輸送費用は, 氷塊費用の形をとるものと仮定する。すなわち, 1 単位の財が一方の地域からもう一方の地域へ輸送されると, 当初の 1 単位のうち一部は途中で融けてしまい $1/\tau$ だけが実際に到達する。定数 τ は, 1 単位の財が到着するために必要な発送量である。これに対し, A 財の輸送には費用がかからないものと仮定する。

(2) 消費者の行動

地域 m における全ての消費者は, 2 種類の財に対して同じコブ・ダグラス型の効用関数¹²⁾ :

$$U_m = M_m^\lambda A_m^{1-\lambda} \quad (1)$$

で表される選好を持つ。ただし, M_m は以下で定義する工業品の消費を表す指数, A_m は農業品の消費を表す。また, $\lambda \in (0, 1)$ は工業品への支出割合を表す定数である。数量指数 M_m は, 財どうしの差別化が連続的に変化する財空間で定義される部分効用関数を表す。差別化に対応するインデックスを連続変数 s として, $d_m(s)$ を地域 m における多様な各 M 財の消費量とする。また, N は利用可能な財の種類を表すが, N_m を地域 m における M 財の種類とすると, $N_1 + N_2 = N$ となる。ここで, M_m は CES 関数

$$M_m = \left[\int_{s \in N} d_m(s)^{(\xi-1)/\xi} ds \right]^{\xi/(\xi-1)} \quad (2)$$

によって定義されると仮定する。この特定化で, パラメータ ξ は任意の差別化された 2 財間の代替の弾力性を表す。

地域 m において, 所得 Y_m ならびに A 財の価格 p_m^A および地域 n で生産され地域 m で消費される各 M 財の価格 $p_{nm}(s)$ を所与とすれば, (代表的) 消費者の問題は, 予算制約 :

$$\int_{s \in N_m} p_{mm}(s) d_{mm}(s) ds + \int_{s \in N_n} p_{nm}(s) d_{nm}(s) ds + p_m^A A_m = Y_m \quad (3)$$

のもとで効用関数 (1) を最大にすることである。ただし, d_{nm} は, 地域 n で生産され地域 m で消費される各財の消費量を表す。したがって, 代表的消費者の行動は, 以下のように書き表すことができる。

$$\max . U_m = M_m^\lambda A_m^{1-\lambda} \quad \text{s.t.} (3) \quad (4)$$

これにより, 以下のような需要関数を得る。A 財については,

$$A_m = \frac{(1-\lambda)Y_m}{p_m^A} \quad (5)$$

差別化インデックス $s \in N$ の M 財については,

$$d_{nm}(s) = \frac{p_{nm}(s)^{-\xi}}{P_m^{1-\xi}} \lambda Y_m \quad (6)$$

である。ここで, P_m は地域 m の価格指数 :

$$P_m = \left[\int_{s \in N_m} p_{mm}(s)^{1-\xi} ds + \int_{s \in N_n} p_{nm}(s)^{1-\xi} ds \right]^{1/(1-\xi)} \quad (7)$$

を表す。したがって, 地域 m における skilled 労働者の間接効用関数は,

$$W_m = \lambda^\lambda (1-\lambda)^{1-\lambda} w_m P_m^{-\lambda} (p_m^A)^{-(1-\lambda)} \quad (8)$$

と表される。

(3) 生産者行動と独占的競争

部門 A では, unskilled のみを生産要素とし, 同質な財 A を完全競争のもとで, 収穫不変の技術により生産するものと仮定する。一般性を失うことなく, 1 単位の unskilled により, 1 単位の財が生産されると基準化できる。したがって, 完全競争下では, A 財の価格は, unskilled の賃金に等しくなる :

$$p_m^A = w_m^L \quad (9)$$

A 財の地域間輸送には費用がかからないため, その価格はどちらの地域でも等しい : $p_1^A = p_2^A$ 。従って, $p_m^A = w_m^L$ より $w_1^L = w_2^L$ という関係も明らかである。以下, 単純化のため, A 財をニューメレールとし, $p_m^A = w_m^L = 1$ とする。なお, unskilled の労働者は地域間を移動することが不可能である。ここではモデルを単純化するため, 農業労働者 L は 2 地域に均等に分布しているという仮定をおき,

$L_m = L/2$ とする.

部門Mでは、差別化されたM財を独占的競争のもとで、収穫増の技術により生産するものと仮定する. ただし、M財を $x_m(s)$ 単位生産する場合、 α 単位のskilledと、 β 単位のunskilledが生産要素として必要となる. 従って、地域 m の部門Mにおける1企業の総生産費用は

$$TC_m(s) = w_m \alpha + w_m^L \beta x_m(s) \quad (10)$$

で表される.

規模の経済、消費者の多様性の選好、ならびに供給できる財の種類に制限がないことから、部門Mにおいては、どの企業も別の企業が供給する財と同じ種類の財を生産しようとはしない. このことは、各種類の財が唯一の特化した企業により、唯一の地域において生産されることを意味する. 従って、部門Mにおいては、生産を行う企業数は供給される財の種類に等しい. したがって、地域 m に存在する部門Mの企業数 N_m は、地域 m におけるskilledの労働者数 H_m を用いて以下のように表される.

$$N_m = \frac{H_m}{\alpha} \quad (11)$$

次に、部門Mにおける企業の利潤最大化行動について考える. この企業は、地域 m において、所与の賃金 w_m に直面しつつ、ある特定の種類の財を生産する. 企業の利潤関数は、次のように表される.

$$\Pi_m(s) = p_{mm}(s)d_{mm}(s) + p_{mn}(s)d_{mn}(s) - TC_m(s) \quad (12)$$

短期均衡において成立するM財の市場清算条件は、以下のように示される.

$$x_m(s) = d_{mm}(s) + \tau d_{mn}(s) \quad (13)$$

式(10)を用いて、企業の利潤関数(12)は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \Pi_m(s) &= p_{mm}(s)d_{mm}(s) + p_{mn}(s)d_{mn}(s) \\ &\quad - \beta(d_{mm}(s) + \tau d_{mn}(s)) - w_m \alpha \end{aligned} \quad (14)$$

短期均衡下での利潤最大化の一階条件より、M財の価格:

$$p_{mm}(s) = \frac{\beta\xi}{\xi-1}, \quad p_{mn}(s) = \frac{\tau\beta\xi}{\xi-1} \quad (15)$$

が求められる. 式(15)を用いて、CES 価格指数(7)は以下のように単純化される:

$$P_m = \frac{\beta\xi}{\xi-1} [N_m + \phi N_n]^{1/(1-\xi)} \quad (16)$$

ここで、 $\phi \equiv \tau^{1-\xi} \in (0, 1]$ は、自地域内で生産される財の

需要に対する輸入財の需要の比率であり、貿易の自由度を表す. 輸送費用 τ が大きい(小さい)とき、 ϕ は小さい(大きい)値をとる. 式(6), (13), (15), (16)より、部門Mにおける企業の生産量を表す以下の式が導かれる:

$$x_m = \frac{\xi-1}{\beta\xi} \left[\frac{\lambda Y_m}{N_m + \phi N_n} + \frac{\phi \lambda Y_n}{\phi N_m + N_n} \right] \quad (17)$$

(4) 短期均衡における実質賃金

企業は費用を要せず参入・撤退が可能であるため、均衡状態では利潤が発生しない. 従って、式(12), (15)より、skilledの賃金 w_m が、部門Mにおける1企業の生産量 x_m の関数として導かれる:

$$w_m = \frac{\beta x_m(s)}{\alpha(\xi-1)} \quad (18)$$

さらに、式(11), (16), (17)より、次式を得る.

$$w_m = \frac{\lambda}{\xi} \left[\frac{Y_m}{H_m + \phi H_n} + \frac{\phi Y_n}{\phi H_m + H_n} \right] \quad (19)$$

また、短期均衡での地域 m の所得 Y_m はskilledの所得 w_m とunskilledの所得 w_m^L から構成される:

$$\begin{aligned} Y_m &= w_m H_m + w_m^L L_m \\ &= w_m H_m + \frac{L}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

以上のシステムから、skilled労働者の総数 H のうち地域 m に居住する比率 $h \equiv H_m/H$ を与件とすれば、地域 m の部門Mの企業数 N_m 、企業が生産量 x_m 、価格指数 P_m 、均衡賃金 w_m 、所得 Y_m が決定される. 式(20)を式(19)に代入すると、 w_m に関する2つの線形方程式が導かれる. これを解くと、均衡賃金 w_m が h の陽関数として、以下のように導かれる:

$$w_1 = A \frac{L}{2H} \frac{2\phi h + B(\phi) \cdot (1-h)}{\phi[(h^2 + (1-h)^2) + B(\phi)h(1-h)]} \quad (21)$$

$$w_2 = A \frac{L}{2H} \frac{2\phi \cdot (1-h) + B(\phi)h}{\phi[(h^2 + (1-h)^2) + B(\phi)h(1-h)]} \quad (22)$$

ただし、 $A \equiv (\lambda/\xi)/\{1 - (\lambda/\xi)\}$ 、 $B(\phi) \equiv 1 - (\lambda/\xi) + \{1 + (\lambda/\xi)\}\phi^2$ と置く. ここで、間接効用関数(8)に、式(16), (21), および(22)を代入すると、間接効用関数が h の陽関数として導かれる.

$$W_m(h) = \eta \frac{w_m(h)}{P_m(h)^\lambda} \quad (m=1, 2) \quad (23)$$

$$\eta \equiv \lambda^\lambda (1-\lambda)^{(1-\lambda)} \quad (24)$$

$$P_1(h) = \frac{\beta\xi}{\xi-1} \left(\frac{H}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\xi}} [h + \phi(1-h)]^{\frac{1}{1-\xi}} \quad (25)$$

$$P_2(h) = \frac{\beta\xi}{\xi-1} \left(\frac{H}{\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\xi}} [(1-h) + \phi h]^{\frac{1}{1-\xi}} \quad (26)$$

なお、3章以降の分析では経済全体の skilled 労働者数を $H = 1$ と基準化する。

(5) 短期均衡解の性質

図1(a)-(c)は、skilled 労働者のうち地域1に居住する比率 h と間接効用フローの地域格差 $W_1 - W_2$ の関係を示している。図1(a)は輸送費用が高い場合を、図1(b)は低い場合を、図1(c)は中間的な場合を表している。輸送費用が高い場合、 $h = 1/2$ のとき間接効用の差がゼロとなり、 $h < 1/2$ ならば正、 $h > 1/2$ ならば負である。したがって、一方の地域に skilled 労働者の過半数が存在すると、skilled 労働者にとってその地域より他方の地域のほうが魅力的となる。このことから、skilled 労働者が2地域間に均等的に存在する対称均衡が唯一の均衡解であり、安定的であることがわかる。一方、輸送費用が低い場合、間接効用の差が h に関して右上がりの曲線を描く。すなわち、いずれかの地域において skilled 労働者の比率が $1/2$ を超えて大きくなるほど、当該地域はより一層魅力的となる。そのため、すべての skilled 労働者がいずれかの地域のみ集中する Core-Periphery 均衡パターンが安定的となり、対称均衡は不安定となる。輸送費用が中間的な場合は、3つの安定均衡（対称均衡パターンとCP均衡パターン）と2つの不安定均衡が存在する。すなわち、輸送費用が低い場合、および中間的な場合に、複数均衡が存在している。

均衡パターンが輸送費用によってどのように変化するかを図1(d)に示す。赤の実線は安定均衡を示し、破線は不安定均衡を示している。図1(c)に示したとおり、輸送費用が中間的な値の場合には対称均衡パターンとCP均衡パターンがともに安定的な均衡パターンとなる。対称均衡が不安定となって2地域間の対称性が失われる点はブレイクポイント、CP均衡パターンが安定均衡として維持される限界の点はサステインポイントと呼ばれ、2点に挟まれた領域はオーバーラップと呼ばれる¹³⁾。

従来（確定論的な枠組みでの）CPモデルの動学分析では、図1(d)で示した複数均衡が存在する領域において、 h の初期状態（“history”）によらず、労働者の期待（“expectation”）によって実現する長期的均衡が決定される可能性があることが示されている^{7),8)}。その際、“expectation” に応じて複数の均衡経路が存在するため、長期的均衡解を理論的に全く特定できない。すなわち、解の不定性が問題となる。

3. 不確実性下における長期的な人口移動ダイナミクス

(1) 状況設定

本章では、経済環境に不確実性が存在する下での人口移動ダイナミクスの定式化を行う。いま、時刻 $t \in [0, \infty)$ における輸送費用を $\tau(t) \equiv X(t) + 1$ と定義しよう。その上で、 $X(t)$ が以下の幾何ブラウン運動に従うと仮定する：

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dz, \quad X(0) = X_0 \quad (27)$$

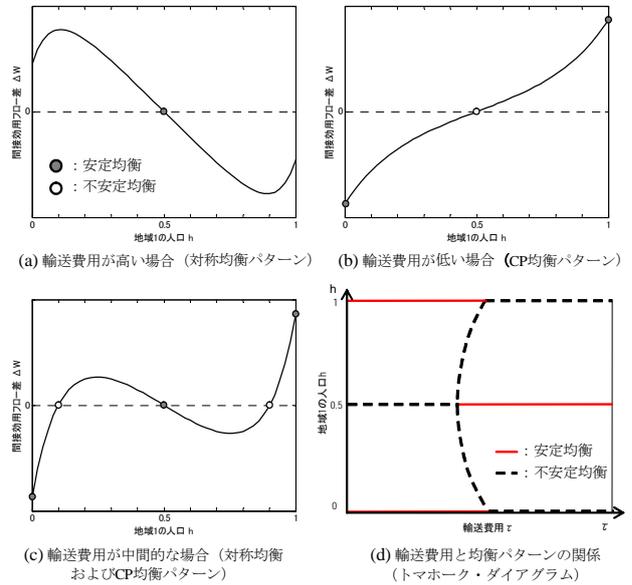


図-1 短期均衡解の性質

ここで、 μ はドリフト、 σ はボラティリティ、 dz は標準 Wiener 過程の増分である。 $X(t) > 0$ より、 $\tau(t) > 1$ が成立する。すなわち、本研究では、経済環境に内在する不確実性として輸送費用が時々刻々と変化する状況を想定している。なお、輸送費用に不確実性が介在するという仮定は、ここでの議論の本質ではない。経済システム全体に影響を持つその他のパラメータに不確実性を導入しても、以下と同様の議論を行うことができる。

CPモデルにおける人口移動ダイナミクスは、skilled 労働者の長期的な効用最大化行動に基づく地域間の移住によって生じる。なお、移住は任意の移動期間 $[0, T]$ ($T \in [0, \infty)$) で行われるものとする。skilled 労働者は、期間 $[0, T]$ 中に発生する総効用フローの純現在価値の期待値を最大化するように、時刻 t での居住地域 $l(t) \in \{m, n\}$ を決定する。時刻 t において地域 m に居住する skilled 労働者にもたらされる単位時間当たりの間接効用フローは、輸送費用 $X(t)$ と地域1の skilled 労働者数 $h(t)$ の関数 $W_m(X(t), h(t))$ で表される。ここで、間接効用フローは、 X の関数であるため、それ自身が確率過程である。一方、地域間の移住には費用

$$C_m(t) = \frac{f_{mn}(t)}{\gamma} \quad (28)$$

を要する。ここで、 $f_{mn}(t) (\geq 0)$ は地域 m から n へ移住フローを表し、 γ は移住費用のパラメータである。すなわち、移住には混雑現象を伴い、その時点で同時に移住を行うフロー f_{mn} が大きいほど、移住費用 $C_m(t)$ が大きくなる。時刻 t における経済全体の移住の純フロー $dh(t)$ は、

$$dh(t) = \{f_{21}(t) - f_{12}(t)\}dt \quad (29)$$

と表される。従って、時刻 $t' \in [t, T]$ において地域 $l(t')$ に

居住するように移住を行った場合に、期間 $[t, T]$ にわたって発生する総効用フローの時刻 t での純現在価値は、以下の式で表される：

$$J(t, l(\cdot)) \equiv \int_t^T W_{l(t')}(X(t'), h(t'))e^{-r(t'-t)} dt' - \sum_{k \in K(t)} e^{-r(\theta_k - t)} C_{l(\theta_k)}(\theta_k) \quad (30)$$

ただし、 r は割引率、 θ_k は k 回目に行われた移住の時刻を表す。また、 $K(t)$ は時刻 t 以後に行われる移住のインデックス集合を表す。式 (30) において、第 1 項は対象期間中の総効用を、第 2 項は移住に必要なとされる費用を表す。

(2) 每期成立すべき均衡条件

各瞬間における人口移動のダイナミクスが満たす均衡条件を示す。まず、時刻 t において輸送費用 $X(t) = X$ 、地域 1 の人口 $h(t) = h$ が観測された状況を (t, X, h) と表す。地域 m にいる skilled 労働者が状況 (t, X, h) において、以後最適に行動した場合に得られる総効用フローの純現在価値の期待値 $V_m(t, X, h)$ を最適値関数として以下のように定義する。

$$V_m(t, X, h) \equiv \max_{\{l(t') | t' \in [t, T]\}} E_t [J(t, l(\cdot)) | X(t) = X, h(t) = h, l(t) = m] \quad (31)$$

ただし、 $J(t, l(\cdot))$ は式 (30) で定義される $[t, T]$ 間に得られる総効用フローの純現在価値である。以下では、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において定義される最適値関数 $V_m(\cdot)$ を、“地域 m の価値” と呼ぶ。式 (32) は期待値のネストを用いて、以下のように記述できる。

$$V_m(t, X, h) = E_t \left[\int_t^{\theta_m} W_m(X(t'), h(t')) e^{-r(t'-t)} dt' + \left\{ V_n(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m)) - C_m(\theta_m) \right\} e^{-r(\theta_m - t)} \right] \Big| X(t) = X, h(t) = h, m(t) = m \quad (32)$$

ただし、 θ_m は地域 m から地域 n への移住が行われる時刻である。また、 $V_n(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m))$ は、状況 $(\theta_m, X(\theta_m), h(\theta_m))$ で地域 n が居住地として選択されているときの最適値関数を表す。式 (32) で表される最適値関数 $V_m(t, X, h)$ は、状況 (t, X, h) で地域 m を選択している skilled 労働者が時刻 t に、**a)** 地域 m から n に移住するか、**b)** 微小時間 dt だけ地域 m を選択し続けるかのいずれかを離散的に選択する問題として表される。このとき、均衡人口移動フローは状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ に依存し、 $f_{mn}(\cdot)$ 、 $f_{nm}(\cdot)$ と表される。また、 f_{mn} 、 f_{nm} が同時に正の値をとることはないことから、

$$dh(\cdot) = \begin{cases} f_{21}(\cdot) dt & \text{if } dh(\cdot) \geq 0 \\ -f_{12}(\cdot) dt & \text{if } dh(\cdot) < 0 \end{cases} \quad (33)$$

が成立する (付録 I 参照)。従って、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において地域 m を選択している skilled 労働者の行動は、以下のように場合分けすることができる。

a) 移動なし ($f_{mn}(\cdot) = 0$) の場合

$f_{mn}(\cdot) = 0$ より地域 m から n に移住する skilled 労働者数は 0 である。従って、地域 m の価値が地域 n の純価値を上回るため、以下の不等式：

$$V_m(\cdot) > V_n(\cdot) - f_{mn}(\cdot) / \gamma \quad (34)$$

が成立する。このとき、地域 m において微小時間 dt だけ移住を延期するため、最適値関数の定義より、以下の等式：

$$V_m(t, X, h) = W_m(X, h) dt + e^{-r dt} E_t [V_n(t + dt, X + dX, h + dh)] \quad (35)$$

が成立する。DP 分解、伊藤の補題¹⁴⁾を用いて式 (35) の期待値演算内を展開・整理すれば、状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ で成立すべき以下の等式を得る。

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21}) V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (36)$$

ここで、 $\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})$ は、偏微分作用素で、以下の式：

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mu X \frac{\partial}{\partial X} + \frac{1}{2} \sigma^2 X^2 \frac{\partial}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial h} (f_{21} - f_{12}) - r \quad (37)$$

で定義される。

b) 移動あり ($f_{mn}(\cdot) > 0$) の場合

微小時間 dt の間に地域 i から j に移住する skilled 労働者数は $f_{mn} dt$ と表される。均衡においては、地域 m の価値が地域 n の純価値と等しくなる水準まで移住が行われる。すなわち、

$$V_m = V_n - \frac{f_{mn}}{\gamma} \quad (38)$$

が成立する。一方、残りの skilled 労働者は微小時間 dt だけ移住を延期することとなる。したがって、 $f_{mn} = 0$ の場合と同様に、最適値関数の定義より、等式 (35) が成立する。先ほどと同様に、DP 分解、伊藤の補題を用いて式 (35) の期待値演算内を展開・整理すれば、式 (36) と同様の等式を得る。

以上 **a)**、**b)** をまとめると、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、地域 m に居住する skilled 労働者の移住に関する均衡条件は次のように表現される。

$$\begin{cases} V_m(\cdot) > V_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{mn}(\cdot) = 0 \\ V_m(\cdot) = V_n(\cdot) - \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{mn}(\cdot) > 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21}) V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \quad (40)$$

同様に、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、地域 n に居住する skilled 労働者の移住に関する均衡条件は、

$$\begin{cases} V_n(\cdot) > V_m(\cdot) - \frac{f_{nm}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{nm}(\cdot) = 0 \\ V_n(\cdot) = V_m(\cdot) - \frac{f_{nm}(\cdot)}{\gamma} & \text{if } f_{nm}(\cdot) > 0 \end{cases} \quad (41)$$

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_n(\cdot) + W_n(\cdot) = 0 \quad (42)$$

と表される。

(3) 非線形相補性問題としての表現

前節で定式化したダイナミクスの均衡条件は、解析的に解くことが困難なため、数値解法を用いる必要がある。以下では、この均衡条件が数理計画分野においてよく知られる非線形相補性問題 (NCP: *Nonlinear Complementarity Problem*) として記述されることを明らかにする。非線形相補性問題は、その解の一意性やアルゴリズムに関する理論解析が発展しているため、それらを活用することによって見通しの良い数値解法の開発が可能となる。前節で定式化したダイナミクスの均衡条件は、任意の状況 $(\cdot) \equiv (t, X, h)$ において、以下の非線形相補性問題 (43) 及び偏微分方程式 (44) として表現できる。

$$\begin{cases} f_{mn}(\cdot) \cdot \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} = 0 \\ \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \geq 0, f_{mn}(\cdot) \geq 0 \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) &= 0 \\ (m, n &= 1, 2; n \neq m) \end{aligned} \quad (44)$$

ただし、未知変数は $f_{mn}(\cdot)$ と $V_m(\cdot)$ である。これらの条件は、まとめて以下のように、無限次元の偏微分方程式制約付き相補性問題 [P-NCP] として表現できる。

[P-NCP] Find $\{f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)\} \in \Omega$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) such that

$$\begin{cases} f_{mn}(\cdot) \cdot \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \\ \left\{ V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + \frac{f_{mn}(\cdot)}{\gamma} \right\} \geq 0, f_{mn}(\cdot) \geq 0, \end{cases}$$

where

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (f_{mn}(\cdot), V_m(\cdot)) | \mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) + W_m(\cdot) = 0 \\ & (\cdot) = (t, X, h), \forall X \in (0, \infty), \forall h \in [0, 1] \} \end{aligned}$$

Ω は、 (f_{mn}, V_m) 空間内で偏微分方程式制約 (44) を満たす集合を表す。本モデルでは、 $T = \infty$ とし無限期間 $[0, \infty)$ に及ぶダイナミクスを考慮する。このとき、偏微分作用素 (37) 内の $\partial/\partial t$ の項がゼロとなり、最適値関数 V_m 及び人口移動フロー f_{mn} は、時間には依存せず、状態 (X, h) にのみ依存する形で表わすことができる。

問題 [P-NCP] を解くためには、境界条件を設定する必要がある。最適値関数の境界条件は、平面上の各境界 ($X \rightarrow 0, X \rightarrow \infty, h = 0, h = 1$) に応じて決定される。

境界条件 i) $X \rightarrow 0$

$X \rightarrow 0$, すなわち輸送費用がゼロの場合、skilled 労働者にとって地域 1, もしくは 2 に居住することは無差別となるため、将来にわたって移住は発生しない。したがって、地域 m の居住者は恒久的に $W_m(0, h) = W^0$ (一定) を得つづける。従って、 $X \rightarrow 0$ における地域 m の価値 $\lim_{X \rightarrow 0} V_m(X, h)$ は以下のように表される：

$$\lim_{X \rightarrow 0} V_m(X, h) = \frac{W_m^0}{r - \mu} \quad (45)$$

境界条件 ii) $X \rightarrow \infty$

$X \rightarrow \infty$, すなわち輸送費用が非常に大きい場合、直ちに対称均衡パターンへと収束し、その後、地域 m , n の居住者は恒久的に $\lim_{X \rightarrow \infty} W_m(X, 0.5) = \lim_{X \rightarrow \infty} W_n(X, 0.5) = W^\infty$ (一定) を得続ける。状態 $0 \leq h < 0.5$ において、地域 2 の居住者は、即座に移住費用を支払い地域 1 へ移住する。従って、 $\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h)$ 及び $\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h)$ は以下ようになる：

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} \quad (46)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} - \frac{0.5 - h}{\gamma} \quad (47)$$

同様に、状態 $0.5 \leq h \leq 1$ において、地域 1 の居住者は、即座に移住費用を支払い地域 2 へ移住する。従って、以下のようになる：

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_1(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} - \frac{h - 0.5}{\gamma} \quad (48)$$

$$\lim_{X \rightarrow \infty} V_2(X, h) = \frac{W^\infty}{r - \mu} \quad (49)$$

境界条件 iii) $h = 0$

$h = 0$ の境界では $f_{12} = 0$ となることが明らかであるため、未知変数は f_{21} および $V_1(X, 0), V_2(X, 0)$ のみとなる。したがって、 $m = 2, n = 1$ の下で $h = 0, f_{12} = 0$ として [P-NCP] を解けばよい。

境界条件 iv) $h = 1$

$h = 1$ の境界では、 $f_{12} = 0$ となることが明らかであるため、未知変数は f_{12} および $V_1(X, 1), V_2(X, 1)$ のみとなる。したがって、 $m = 1, n = 2$ の下で $h = 1, f_{21} = 0$ として [P-NCP] を解けばよい。

4. 非線形相補性アプローチによる数値解法

(1) 離散的表現の枠組み

本章では、偏微分方程式制約付きの相補性問題 [P-NCP] が、数値解法の見通しがよい標準形の NCP に帰着する

ことを明らかにし、この問題に対する具体的な解法を示す。標準形のNCPへ帰着することの目的は具体的な数値計算方法の開発にあるため、離散的な（有限次元）枠組で議論を展開する。まず十分に大きな交通費用の領域 $[X_{min}, X_{max}] \in \mathcal{R}_+$ 、及び、地域1の総移動主体数の領域 $[h_{min}, h_{max}] \in \mathcal{R}_+$ をとる。そして、交通費用と移動主体数の空間 $[X_{min}, X_{max}] \times [h_{min}, h_{max}]$ を、以下の格子：

$$\delta \equiv \{(X^j, h^k) | j = 0, 1, \dots, J, k = 0, 1, \dots, K\} \quad (50)$$

を用いて、 $(X^j, h^k) \equiv (j\Delta X + X_{min}, k\Delta h + h_{min})$ と離散近似する。ただし、 ΔX 、 Δh は、それぞれ、状態変数についての格子間隔を表す。最適値関数、および人口移動フローの格子 δ の (j, k) 座標における値をそれぞれ $V_m^{j,k}$ 、 $f_{m,n}^{j,k}$ と表現する。このとき、問題[P-NCP]の未知変数は、ベクトル $\mathbf{V} \equiv [V_1, V_2]'$ 、およびベクトル $\mathbf{f} \equiv [f_{12}, f_{21}]'$ で定義される。ただし、 $\mathbf{V}_m \equiv [V_m^1, \dots, V_m^K]'$ 、 $\mathbf{V}_m^k \equiv [V_m^{1,k}, \dots, V_m^{J,k}]'$ 、 $\mathbf{f}_{mn} \equiv [f_{mn}^1, f_{mn}^K]'$ 、 $\mathbf{f}_{mn}^k \equiv [f_{mn}^{1,k}, f_{mn}^{J,k}]'$ とする。この枠組の下では、問題[P-NCP]で現れる、最適値関数の偏微分 $\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot)$ 及び $V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + f_{mn}(\cdot)/\gamma$ は、以下のように差分近似される：

$$\mathcal{L}(f_{12}, f_{21})V_m(\cdot) \approx \mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V}, \quad (51)$$

$$V_m(\cdot) - V_n(\cdot) + f_{mn}(\cdot)/\gamma \approx \Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \quad (52)$$

ここで、 $\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) : \mathcal{R}_+^{2JK} \times \mathcal{R}_+^{2JK} \rightarrow \mathcal{R}_+^{2JK}$ は、以下のよう
に定義される写像である：

$$\Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{V} + \frac{\mathbf{f}}{\gamma} \quad (53)$$

ただし、 \mathbf{I} は単位行列を表す。一方、 $\mathbf{L}(\mathbf{f})$ は、中心差分近似のスキームを用いて得られる $2JK \times 2JK$ 正方行列である（付録II参照）。上述の枠組みの下で、ダイナミクスを表現する無限次元の偏微分方程式制約付相補性問題は、以下に示す有限次元の問題[P-NCPd]として表現される。

[P-NCPd] Find $(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \in \Omega$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$) such that

$$\begin{cases} \mathbf{f} \cdot \Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) = \mathbf{0} \\ \Psi(\mathbf{f}, \mathbf{V}) \geq \mathbf{0}, \mathbf{f} \geq \mathbf{0}, \end{cases}$$

where

$$\Omega = \{\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+^{2JK}, \mathbf{V} \in \mathcal{R}_+^{2JK} | \mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{0}\}$$

ここで、 Ω は、集合 Ω をベクトル表現したベクトル集合である。 \mathbf{W} は、間接効用フロー $W_m^{j,k} \equiv W_m(j\Delta X, k\Delta h)$ をベクトル表現した定数であり、 $\mathbf{W} \equiv [W_1, W_2]'$ 、

$\mathbf{W}_m \equiv [W_m^1, \dots, W_m^K]'$ 、 $W_m^k \equiv [W_m^{1,k}, \dots, W_m^{J,k}]'$ と定義される。

(2) 標準形の非線形相補性問題への帰着

ここでは、有限次元の偏微分方程式制約付相補性問題[P-NCPd]において、偏微分方程式制約を用い、未知変数 \mathbf{V} を消去することで、問題を有限次元の標準形のNCPに帰着させる。まず、以下に示す偏微分方程式制約を考える。

$$\mathbf{L}(\mathbf{f})\mathbf{V} + \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (54)$$

式(54)を変形することで、以下のように、最適値関数 \mathbf{V} は、フロー変数 \mathbf{f} の写像：

$$\mathbf{V} = -\mathbf{L}(\mathbf{f})^{-1}\mathbf{W} \quad (55)$$

として表現することができる。これを相補性問題[P-NCPd]に代入して整理すれば、以下に示す有限次元の標準形の非線形相補性問題[NCPd]を得る。

[NCPd] Find $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+^{2JK}$ such that

$$\begin{cases} \mathbf{f} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{f}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{G}(\mathbf{f}) \geq \mathbf{0}, \mathbf{f} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

ただし、 $\mathbf{G}(\mathbf{f}) : \mathcal{R}_+^{2JK} \rightarrow \mathcal{R}_+^{2JK}$ は、以下の式で定義される写像である。

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\mathbf{f}) \equiv \Psi(\mathbf{f}, \hat{\mathbf{V}}) \\ \hat{\mathbf{V}} = -\mathbf{L}(\mathbf{f})^{-1}\mathbf{W} \end{cases} \quad (56)$$

問題[P-NCP]の境界条件 i-iv) を離散的な表現へと変換する。

境界条件 i) $X \rightarrow 0$

$$f_{mn}^{0,k} = 0, V_m^{0,k} = \frac{W_m^{0,k}}{r - \mu} \quad (57)$$

$$m, n = 1, 2; m \neq n, \forall k \in \{0, \dots, K\}$$

境界条件 ii) $X \rightarrow \infty$

($0 \leq h < 0.5$ の場合)

$$f_{12}^{J,k} = 0, V_1^{J,k} = \frac{W_1^{J,k}}{r - \mu} \quad (58)$$

$$f_{21}^{J,k} = (\tilde{k} - k)\Delta h, V_2^{J,k} = \frac{W_2^{J,k}}{r - \mu} - \frac{(\tilde{k} - k)\Delta h}{\gamma} \quad (59)$$

($0.5 \leq h \leq 1$ の場合)

$$f_{12}^{J,k} = (k - \tilde{k})\Delta h, V_1^{J,k} = \frac{W_1^{J,k}}{r - \mu} - \frac{(k - \tilde{k})\Delta h}{\gamma} \quad (60)$$

$$f_{12}^{J,k} = 0, V_2^{J,k} = \frac{W_2^{J,k}}{r - \mu} \quad (61)$$

$$\forall k \in \{0, \dots, K\}$$

ただし, \tilde{k} は, $h^{\tilde{k}} = \tilde{k}\Delta h = 0.5$ を満たす.

境界条件 iii) $h = 0$

$$\text{Solve [NCPd]} \quad \text{s.t.} \quad f_{12}^{j,0} = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, J\}$$

境界条件 iV) $h = 1$

$$\text{Solve [NCPd]} \quad \text{s.t.} \quad f_{21}^{j,0} = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, J\}$$

(3) アルゴリズム

標準形のNCPとして表現された問題は, 数理計画法の分野で開発された様々なアルゴリズムによって解くことができる. 以下では, 最近の数理計画理論の進展に伴って現れた“merit関数アプローチ”を採用した場合のアルゴリズムを議論する. このアプローチは, 相補性問題を“merit関数”と呼ばれる関数 $\Phi(\mathbf{f})$ の最小化問題に帰着させて解くものである. ここで, merit関数 $\Phi(\mathbf{f})$ とは, \mathbf{f} が相補性問題の解ならば $\Phi(\mathbf{f}) = 0$, そうでなければ $\Phi(\mathbf{f}) > 0$ となる連続微分可能な実数値関数である. 本論文では, このような性質を満たすmerit関数として, 以下のFukushima型関数¹⁵⁾を採用する.

$$\Phi(\mathbf{f}) \equiv -\mathbf{G}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{f}) - \frac{1}{2} \mathbf{H}(\mathbf{f}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{f}), \quad (62)$$

where

$$\mathbf{H}(\mathbf{f}) \equiv [\mathbf{f} - \mathbf{G}(\mathbf{f})]_+ - \mathbf{f} \quad (63)$$

ここで, $[Z]_+$ は正の実数空間への射影演算子であり, その第 i 要素は $\max\{Z^i, 0\}$ で表される. 式(62)のmerit関数を用いて問題[P-NCP]を解く最も簡単なアルゴリズムは, 以下のようにまとめられる.

[Alg-NCP]

Step 0: 初期可能解 $\mathbf{f}^{(1)} \in \mathcal{R}_+^{2JK}$, $n := 1$ の代入.

Step 1: $\mathbf{G}(\mathbf{f}^{(n)})$ の導出: $\mathbf{f}^{(n)}$, $\mathbf{f}^{(n)}$, $\mathbf{V}^{0,k}$, $\mathbf{V}^{J,k}$, $\mathbf{V}^{j,0}$, $\mathbf{V}^{j,K}$ を与件として, $\mathbf{V}^{(n)} = -\mathbf{L}(\mathbf{f}^{(n)})^{-1} \mathbf{W}$ を解き, $\mathbf{G}(\mathbf{f}^{(n)})$ を導出.

Step 2: 降下方向ベクトル $\mathbf{d}^{(n)}$ の決定: $\mathbf{d}^{(n)} = \mathbf{H}(\mathbf{f}^{(n)})$.

Step 3: ステップ・サイズ α の決定: $\min_{0 \leq \alpha \leq 1} \Phi(\mathbf{f}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)})$.

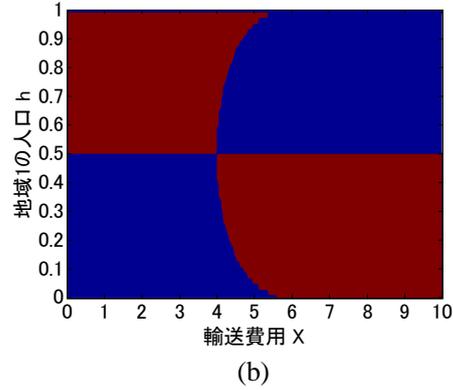
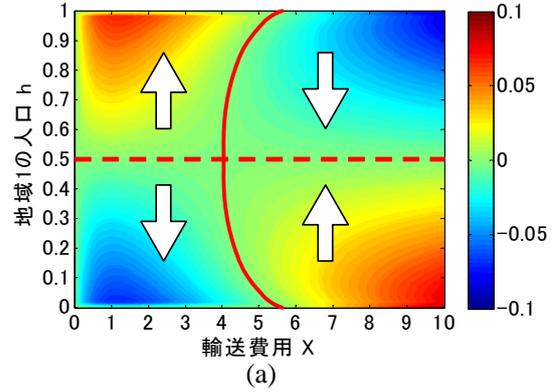
Step 4: 解の改訂: $\mathbf{f}^{(n+1)} = \mathbf{f}^{(n)} + \alpha \mathbf{d}^{(n)}$.

Step 5: 収束判定: 収束していれば停止, そうでなければ $n := n + 1$ としてStep 1へ.

5. 数値計算例

(1) 設定

前章で示した数値解法を適用することにより, 状態平面 (X, h) 上の各点における人口移動フロー $f_{mn}(\cdot)$ と地域 m の価値 $V_m(\cdot)$ ($m, n = 1, 2; m \neq n$)を導出することができる. 本章では, 都市集積の均衡ダイナミクスの数値結果



(a) 図において, 赤色実線は閾値曲線T, 赤色破線は閾値曲線Pを表す.

図-2 輸送費用と均衡人口移動フロー

を示す. 各パラメータの設定は以下のとおりである.

・短期均衡に関するパラメータ:

$$\lambda = 0.50, \quad \xi = 2.00, \quad \alpha = 0.01, \quad \beta = 0.01.$$

・長期的な人口移動ダイナミクスに関するパラメータ:

$$\mu = 0.00, \quad \sigma = 0.40, \quad r = 0.08, \quad \gamma = 0.02.$$

(2) 人口移動の均衡経路

人口移動の均衡経路の性質について考察する. 図2(a)は, 確率的に変動する輸送費用 X と時々刻々と成立する均衡状態から導かれる, 状態平面 (X, h) 上の各点における人口移動フロー $dh/dt = f_{21} - f_{12}$ の関係を示す. 均衡人口移動フロー dh/dt が正(負)となる状態 (X, h) は暖色(寒色)で, また色の濃淡は dh/dt の大小を表す. 矢印の向きは, 人口移動の方向を示す. ここで, フロー dh/dt の正負がスイッチする閾値曲線が存在することに注目されたい. 輸送費用に対する閾値曲線を“閾値曲線T”, 地域1の人口に対する閾値曲線を“閾値曲線P”とする.

図2(b)は, 人口移動フローの“方向”に着目するために, dh/dt が正(負)の値となる領域を赤色(青色)で図示したものである. 織田澤・赤松¹⁶⁾が示すとおり, 任意の状態 (X, h) において人口移動フローが一意に決定されることが図2より確認される. これは, 確率的に発生する輸送費用 X のサンプルパスに応じて, 人口移動ダイナミクスの均衡経路を一意に特定できることを意味する. この結果は, 確定論的な枠組みで複数の均衡経路が存在す

る領域においても成立している。すなわち、提案手法を用いた数値解析からも、不確実性の導入により均衡経路の不定性が解消することが確認された。

6. おわりに

本研究では、不確実な経済環境下における人口移動の完全予見的ダイナミクス (*perfect-foresight dynamics*) を記述した都市集積モデルを構築した。そこでは、経済環境に不確実性が存在する下で、将来にわたって得られる期待総効用を最大とするような労働者の地域間移住タイミングに関する意思決定モデルを定式化し、人口移動ダイナミクスの均衡条件が非線形相補性問題 (NCP: *Nonlinear Complementarity Problem*) として表現できることを明らかにした。その上で、最近の相補性問題理論を活用し、この問題を効率的に解くための数値計算手法の開発を行った。提案手法を用いた分析により、確率的に発生する輸送費用 X のサンプルパスに応じて、人口移動ダイナミクスの均衡経路が決定されることを示した。

以上に述べた本研究の成果は、従来研究の確定論的な枠組みでは未解決であった都市集積モデルの均衡選択問題に対し、新たな均衡選択原理を確立するための第一段階として位置付けられる。次のステップとして、著者らは既に、提案手法により求めた均衡人口移動ダイナミクスに関して、確定論的ダイナミクスとの対応関係や不確実性の度合いが及ぼす影響について分析を行っている。さらに、長期的に実現する都市集積・分散パターンの性質を明らかにし、その政策的含意を示している。なお、分析の詳細は、織田澤・赤松¹⁶⁾を参照されたい。

付録I $f_{12} > 0$, かつ $f_{21} > 0$ が起こらないことの証明

背理法を用いて証明する。いま、 $f_{12} > 0$, かつ $f_{21} > 0$ が成立すると仮定する。このとき、均衡条件 (39), (41) より、 $V_m(\cdot) = V_n(\cdot) - f_{mn}(\cdot)/\gamma$, $V_n(\cdot) = V_m(\cdot) - f_{nm}(\cdot)/\gamma$ が成立する。このとき、 $f_{mn}(\cdot)/\gamma > 0$ より、 $V_m(\cdot) < V_n(\cdot)$ となる。一方、 $f_{nm}(\cdot)/\gamma > 0$ より、 $V_m(\cdot) > V_n(\cdot)$ であることから矛盾する。したがって、 $f_{12} > 0$, かつ $f_{21} > 0$ が成立しない。 証明完 ■

付録II 偏微分作用素 \mathcal{L} の差分近似

式 (37) の偏微分作用素 \mathcal{L} の差分近似法を示す。中心差分法を採用すれば、 $\mathcal{L}V_m$ は以下のように差分近似される。

$$\mathcal{L}V_m \approx \mathbf{L}(\mathbf{f})V$$

ここで、 $\mathbf{L}(\mathbf{f})$ は、以下の行列で定義される。

$$\mathbf{L}(\mathbf{f}) \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1(\mathbf{f}) & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{L}_2(\mathbf{f}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_m(\mathbf{f}) \equiv \mathbf{M}_m + \frac{1}{2\Delta h} \mathbf{N}_m(\mathbf{f})$$

ここで、 \mathbf{M}_m および \mathbf{N}_m は、以下の $JK \times JK$ 行列:

$$\mathbf{M}_m \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{D}_m & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{D}_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_m \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{o} & \mathbf{E}_m^1 & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\mathbf{E}_m^2 & \mathbf{o} & \mathbf{E}_m^2 & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & -\mathbf{E}_m^3 & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & \mathbf{o} & \mathbf{E}_m^{K-1} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \cdots & -\mathbf{E}_m^K & \mathbf{o} \end{bmatrix}$$

で定義される。ただし、 \mathbf{D}_m は以下に示す $J \times J$ の 3 項帯行列:

$$\mathbf{D}_m \equiv \begin{bmatrix} c_m & b_m & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_m & c_m & b_m & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_m & c_m & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_m & b_m \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_m & c_m \end{bmatrix}$$

であり、その各要素は、 $A \equiv \mu j \Delta X / 2 \Delta X$, $B \equiv \sigma^2 j \Delta X / 2 \Delta X^2$ を用いて、それぞれ $a_m \equiv -A + B$, $b_m \equiv A + B$, $c_m \equiv -2B - r$ と定義される。また、 \mathbf{E}_m^k は、以下に示す $J \times J$ の帯行列を表す。

$$\mathbf{E}_m^k \equiv \begin{bmatrix} f_{21}^{1,k} - f_{12}^{1,k} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & & & \\ 0 & & & f_{21}^{J,k} - f_{12}^{J,k} & \end{bmatrix}$$

参考文献

- 1) Krugman, P.: Increasing Returns and Economic Geography, *Journal of Political Economy* 99, pp.483-499, 1991a.
- 2) Howitt, P., McAfee, R.P.: Stability of Equilibria with Externalities, *Quarterly Journal of Economics* CIII, pp.261-78, 1988.
- 3) Murphy, K., Shleifer, A., Vishny, R.: Industrialization and the Big Push, *Journal of Political Economics* XCVII, pp.1003-23, 1989.
- 4) Either, W.: Decreasing Costs in International Trade and Frank Graham's Argument for Protection", *Econometrica* L, pp.1243-68, 1982.
- 5) Krugman, P.: History versus Expectations, *The Quarterly Journal of Economics* 106, pp.651-667, 1991b.
- 6) Fukao, K., Benabou, R.: History versus Expectations: A comment, *The Quarterly Journal of Economics* 108, pp.651-667, 1993.
- 7) Ottaviano, G.I.P.: Monopolistic Competition, Trade, and Endogenous Spatial Fluctuations, *Regional Science and Urban Economics* 29, pp.51-77, 2001.
- 8) Baldwin, R.: Core-Periphery model with forward-looking expectations, *Regional Sciences and Urban Economics* 31, pp.21-49, 2001.
- 9) Frankel, D. M., Pauzner, A.: Resolving Indeterminacy in Dynamic Settings; The Role of Shocks, *Quarterly Journal of Economics*, 115, pp.285-304, 2000.

- 10) Burdzy, K., Frankel, D. M., Pauzner, A.,: Fast Equilibrium Selection by Rational Players Living in a Changing World, *Econometrica*, 69, pp.163-189, 2001.
- 11) Forslid, R., Ottaviano, G.I.P.,: An Analytically Solvable Core-Periphery Model, *Journal of Economic Geography* 3, pp.229-240, 2003.
- 12) Dixit, A.K., Stiglitz, J.E.,: Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity, *American Economic Review* Vol.67, pp.297-308, 1977.
- 13) Fujita, F., Krugman, P., Venables, A.,: *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, The MIT Press, 1999.
- 14) Dixit, A.K., Pindyck, R.S.,: *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- 15) Taji, K., Fukushima, M.,: Optimization Based Globally Convergent Methods for the Nonlinear Complementarity Problem, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.37, No.4, pp.310-331, 1994.
- 16) 織田澤利守, 赤松隆: 集積経済下における移住タイミング選択の均衡ダイナミクス, 土木学会論文集D, (投稿中) .

不確実な経済環境における都市集積の均衡ダイナミクス：非線形相補性アプローチ*

織田澤利守**, 赤松隆***, 藤原誠****

本研究では、都市集積均衡パターンの選択問題に対して、不確実な経済環境下における人口移動の完全予見的ダイナミクス (*perfect-foresight dynamics*) を記述したモデルを構築し、その効率的な解法を提案する。具体的には、不確実性下における労働者の地域間移住に関する意思決定モデルを定式化し、人口移動ダイナミクスの均衡条件が非線形相補性問題 (NCP: *Nonlinear Complementarity Problem*) に帰着することを示す。その上で、この問題を効率的に解くための数値計算手法の開発を行う。最後に、提案手法を用いた分析により、確率的に発生する輸送費用のサンプルパスに応じて、人口移動ダイナミクスの均衡経路が一意的に決定されることを示す。

Core-Periphery Equilibrium Dynamics under Uncertainty: Nonlinear Complementarity Approach*

By Toshimori OTAZAWA**, Takashi AKAMATSU*** and Makoto FUJIWARA****

We propose a novel long-term migration dynamics that can overcome the equilibrium indeterminacy of Core-Periphery (CP) model a la Krugman [1991b]. This goal is achieved by introducing uncertainty of economic environment into CP model with forward-looking migration dynamics. We first disclose that the equilibrium condition of migration dynamics can be represented as a NCP (*Nonlinear Complementarity Problem*) and then develop an efficient solution algorithm for the problem. We demonstrate from a numerical experience that an equilibrium path of migration dynamics can be uniquely determined in accordance with each stochastic sample path.
