

金利リスクを考慮したリアル・オプション問題に関する研究*

Real Option Problems with Stochastic Interest Rates*

高橋 啓**・赤松 隆***・水谷 剛****

By Kei TAKAHASHI**・Takashi AKAMATSU・Go MIZUTANI****

1. はじめに

社会基盤整備事業を評価する方法は、社会・経済的側面に焦点を当てた手法と財務的な側面に焦点を当てた手法に大きく二分される。前者については、社会的必要性の側面から、土木計画学の分野においてもその代表的な手法である経済的費用便益分析に関する研究が多くなされてきた。一方、後者については、社会基盤整備事業以外の一般的な投資事業においてもその評価がなされるため、土木計画学の分野においてその分析・評価法について研究がなされることは少なかった。

しかし、社会基盤整備事業における財務的評価の重要性は近年ますます高まっている。従来よりその必要性が高かった鉄道整備事業等に加え、最近では今まで民間が参入することの無かった事業にまで、PFIにより民間事業者の参入が考えられるようになった。これらを契機として、従来あまり考えられることがなかった社会基盤整備事業の財務的（ファイナンス論的）評価が脚光を浴びるようになった。

社会基盤整備事業においては、その経済活動に伴い様々なキャッシュ・フローが発生する。例えば、有料道路事業では、借入を行い、建設費用を投資し、道路建設後に、利用者からの料金収入に加え、維持管理費用が発生する。そして、有料道路事業者は時々刻々と変化する環境下で適切な意思決定を行い、そのキャッシュ・フローの価値を高めなければならない。

従来から、これらの事業価値評価ならびにその最適意思決定問題は、リアル・オプション問題として広く研究

されている。例えば Dixit&Pindyck¹⁾では、不確実性下における企業の最適投資政策について分析している。また、社会基盤整備事業に限っても、横松ら²⁾、小林ら³⁾、等多くの研究がなされている。しかしこれらの研究では、事業の現在価値を求めるために確定的な割引率を用いて割引を行っており、社会基盤整備事業のキャッシュ・フローを財務的（ファイナンス論的）に評価するためには、確率的に変動する市場金利で割引を行う必要がある。

市場金利は時間とともに変動しているため、財務的事業価値は金利変動のリスクを被る。また、市場には満期の異なる金利が多数存在し、それらの金利は無裁定条件を介して金利期間構造として表されている。

ファイナンス分野では、Hull-White⁴⁾、Cox-Ingersoll-Ross⁵⁾、Heath-Jarrow-Morton⁶⁾らにより、金利派生証券の価格付け問題が研究されている。しかし、これらの研究は完備市場での無裁定理論を前提にしており、本研究のようなプロジェクト・リスクについては不完備であり、金利リスクについては完備であるような社会基盤整備事業への投資問題の分野にまでは至っていない。

そこで、本研究では、プロジェクト収入リスク自体は不完備で、金利リスクについては完備である状況を考え、社会基盤整備事業のキャッシュ・フローを財務的（ファイナンス論的）に評価することを目指す。ベンチマークとして、代表的なリアル・オプション問題である最適投資タイミング選択問題に対し、金利の不確実性および金利期間構造を導入したモデルを扱う。

プロジェクト収入と金利の関係から、このモデルにおけるプロジェクト価値は、金利が確定的な場合であるとした場合の最適投資タイミング選択問題のプロジェクト価値とアメリカン・オプション・タイプの金利デリバティブの単純な線形和とはならない。したがって、まずこのモデルを解析し、プロジェクト価値を求め、金利が確定的であるとした場合と比較する必要がある。次に、最適投資タイミング・ルールについても金利が確定的であるとした場合の結果と比較し、どのように異なるかを明らかにする。最後に、金利期間構造に違いによる、プロジェクト価値、最適投資タイミング・ルールの違いを明らかにする。

*キーワード：計画手法論，金利期間構造

**正員，情報科学修士，(株)企画開発
(東京都渋谷区恵比寿西2-3-3，
TEL03-5458-1811
E-MAIL takahashi@crp.co.jp)

***正員，工博，東北大学大学院情報科学研究科
(宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉06
TEL022-795-7503
E-MAIL akamatsu@plan.civil.tohoku.ac.jp)

**非会員，情報科学修士，野村證券(株)
投資戦略マーケティング部

2. 状況設定および定式化

(1) 状況設定

事業主体は満期 T までの任意の時刻 t に埋没費用 I を投資し、直後にプロジェクトから一括収入 $P(t)$ を受け取る。ここで、 $P(t)$ は次式で表される幾何ブラウン運動に従う。ここで、 μ_P はドリフト、 σ_P はボラティリティ、 dz_P は標準ウィーナー過程の増分を表す。

$$dP = \mu_P P dt + \sigma_P P dz_P(t), \quad P(0) = P_0. \quad (1)$$

このとき、プロジェクト収入リスクは当該事業に固有のリスクであるとし、金融資本市場で取引されている資産の変動と相関がない不完備リスクとする。すなわち、金融資本市場を活用し、プロジェクト収入リスクをヘッジすることができない状況を考える。

(2) 金利期間構造モデル

社会基盤整備事業の適切な事業価値を求めるためには、市場金利に依存した割引を行う必要がある。ここで、市場金利は時間とともに変動するため、その挙動は一般に確率過程を用いて表される。また、市場には満期の異なる金利が多数存在し、これらの金利は無裁定条件を介して金利期間構造として表される。そのため、市場金利を扱うためには、金利期間構造をモデル化することが必要になる。

一般に、金利期間構造はフォワード・レートもしくは瞬間スポット・レート過程の従う確率微分方程式を用いてモデル化される。前者の例として、Heath-Jarrow-Morton (HJM) ⁶⁾モデルが挙げられる。また、後者の例として、Vasicek ⁷⁾モデル、Cox-Ingersoll-Ross ⁵⁾モデル、Brennan-Schwartz ⁸⁾モデル、そしてHull-White ⁴⁾モデルが挙げられる。これらのモデルにはそれぞれ利点、欠点があり、利用目的に応じて適切なモデルの選択を行う必要がある。

本研究では、金利期間構造の違いによる、プロジェクト価値、最適投資タイミング・ルールの違いを明らかにするため、初期金利期間構造を明示的に与えることができるHull-Whiteモデルを採用する。ただし、Hull and White ⁹⁾はHull-Whiteモデルにおいて拡散係数を一定($\sigma_r(t) = \sigma_r$)とすることを推奨しており、本研究でも同様に一定とする。

従って、本研究で採用する金利期間構造モデルは、債券の相対価格をマルチンゲールにするような測度 Q の下で、瞬間スポット・レート $r(t)$ が、以下の確率微分方程式：

$$dr(t) = (\phi(t) - ar(t))dt + \sigma_r dz_r^*(t) \quad (2)$$

に従うものとする。ただし、 $\phi(t)$ は回帰レベル・パラ

メータ、 a は平均回帰率、 σ_r は確率項のボラティリティ、 $dz_r^*(t)$ は確率測度 Q の下での標準ウィーナー過程の増分を表す。ただし、プロジェクト収入リスクと金利変動リスクは独立であるため、

$$dz_P(t) \cdot dz_r^*(t) \equiv 0 \quad (3)$$

とする。このとき、時刻 t における満期 T の割引債価格 $v(t, T)$ は次式で表される。

$$v(t, T) = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}. \quad (4)$$

また、初期時点 0 における満期 t のイールド $R(0, t)$ についても次式で表される。

$$R(0, t) = \frac{1}{t} \{B(0, t)r(0) - \log A(0, t)\}. \quad (5)$$

ここで、時点 0 における時点 t の瞬間フォワード・レートを $f(0, t)$ とすると、 $A(t, T), B(t, T)$ はそれぞれ以下の式で表される。

$$A(t, T) \equiv \exp \left\{ \frac{\sigma_r^2}{2} \int_t^T B^2(u, T) du - \int_t^T \phi(u) B(u, T) du \right\}, \quad (6)$$

$$B(t, T) \equiv \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

なお、上記の割引債価格の詳しい式の導出については付録1に示す。式(5)および(6)より、 $\phi(t)$ と初期時点 0 における満期 t のイールド $R(0, t)$ の関係が求まり、 $\phi(t)$ を適当に選ぶことによって、任意の初期金利期間構造の形状を表すことができる。時点 0 における時点 t の瞬間フォワード・レートを $f(0, t)$ とするとき、無裁定条件より得られる初期時点 0 における満期 t のイールド $R(0, t)$ と $f(0, t)$ の関係：

$$R(0, t) = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t f(0, s) ds \quad (7)$$

より、本研究のモデルでは、回帰レベル・パラメータ $\phi(t)$ が次式のように時点 t の瞬間フォワード・レート $f(0, t)$ を用いて、明示的に表される。なお、次式の詳しい導出に関しては、Kijima and Nagayama ¹⁰⁾を参考にされたし。

$$\phi(t) = af(0, t) + \frac{\partial}{\partial t} f(0, t) + \frac{\sigma_r^2}{2a} (1 - e^{-2at}). \quad (8)$$

(3) 定式化

以上より、事業主体の行動は、最適な投資タイミング T^* を選択する期待利潤最大化行動として、以下のよう

に定式化される：

$$\max_{T^*} J \equiv E_0^Q [E_0[P(T^*) - I | P(0)] e^{\int_0^{T^*} -r(s)ds} | r(0)], (9)$$

subject to

$$dP(t) = \mu_P P(t)dt + \sigma_P P(t)dz_P(t), P(0) = P_0, (10)$$

$$dr(t) = (\phi(t) - ar(t))dt + \sigma_r dz_r^*(t), r(0) = r_0, (11)$$

$$dz_P(t) \cdot dz_r^*(t) = 0. (12)$$

ここで、 $E_t^Q[\cdot]$ は、債券の相対価格をマルチンゲールにするような確率測度 Q の下で、時刻 t における期待値演算を示す。

プロジェクト収入 P およびスポット・レート r は、式(10),(11)および(12)で表される確率過程に従うため、上記の問題は、将来の状態変数 $P(t), r(t)$ の不確実な変動に依存する確率制御問題となる。したがって、期待利潤を最大化するように投資タイミング T^* を決定する問題は、対応する状態変数の閾値 $P^*(t), r^*(t)$ を決定する問題へと帰着する。

3. 最適制御条件の導出

前章で定式化した最適投資タイミング選択問題の最適性条件を導出するために、まず、状況 (t, P, r) が観測された場合の最適値関数を、次式で定義する：

$$V(t, P, r) \equiv E_t^Q [E_t[P(T^*) - I | P(t)] e^{\int_t^{T^*} -r(s)ds} | r(t)]. (13)$$

$[t, t+dt]$ の間に、事業主体が投資を延期する場合、最適値関数は次式を満たす。

$$V(t, P, r) = e^{-rdt} E_t[V(t+dt, P+dP, r+dr)]. (14)$$

$$V(t, P, r) > P - I. (15)$$

式(13)において、最適値関数の積分区間 $[t, T^*]$ を $[t, t+dt]$ と $[t+dt, T^*]$ に分解し、DP 原理および伊藤の補題を用いて整理すると、以下の偏微分方程式を得る：

$$\mathcal{L}V(t, P, r) = 0. (16)$$

なお、 $\mathcal{L}$ は、以下で定義される微分演算子である：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \equiv & \frac{\partial}{\partial t} + \mu_P P \frac{\partial}{\partial P} + (\phi - ar) \frac{\partial}{\partial r} \\ & + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 \frac{\partial^2}{\partial P^2} + \frac{1}{2} \sigma_r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r. \end{aligned} (17)$$

一方、事業主体が投資を行う場合、最適値関数は次式を満たす。

表－1 感度分析を行うパラメータ

	固定する場合	変化させる場合
σ_P	0.2	0～0.1, 0.02 刻み 0.1～0.4, 0.05 刻み
σ_r	0.005	0～0.03, 0.005 刻み
a	0.1	0.02～0.1, 0.02 刻み, 0.2, 0.4
r_0	0.05	0.01～0.2, 0.01 刻み

$$V(t, P, r) = P - I, \mathcal{L}V(t, P, r) < 0. (18)$$

以上より、最適制御条件は、以下に示す線形相補性問題として表される。

$$\begin{cases} \mathcal{L}V \cdot (V - (P - I)) = 0, \\ -\mathcal{L}V \geq 0, V - (P - I) \geq 0. \end{cases} (19)$$

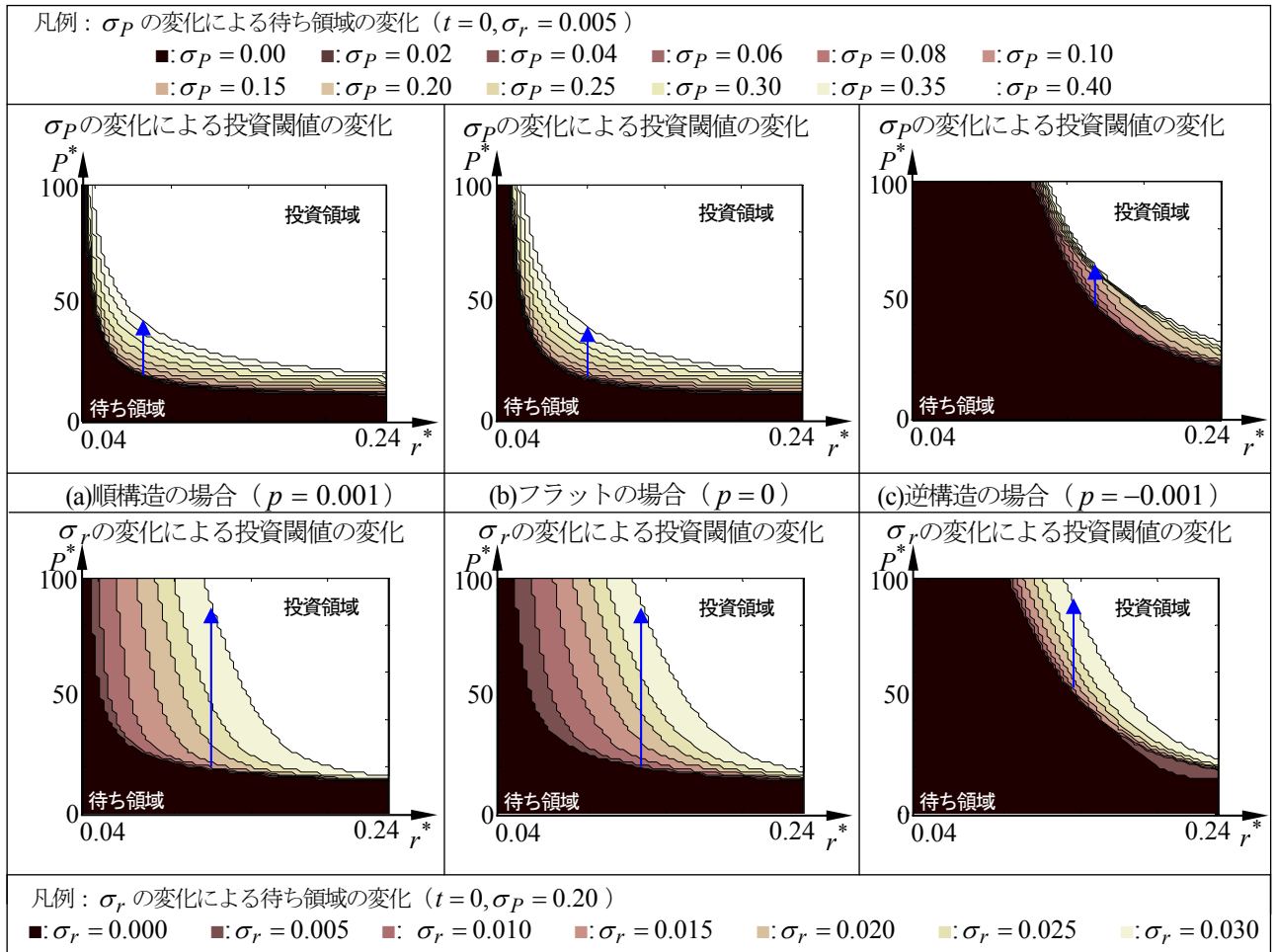
線形相補性問題を解くための数値計算アルゴリズムとしては、射影 SOR 法などが挙げられる¹¹⁾。本研究では、射影 SOR 法を用いて、解析的には求めることができない投資閾値 $P^*(t), r^*(t)$ およびオプション価値 $V^*(t)$ を、数値実験で求める。なお、詳しい数値実験手法については、付録2で示す。

4. 数値実験

本数値実験では、金利の不確実性および金利期間構造の違いが、投資閾値 $P^*(t), r^*(t)$ およびオプション価値 $V^*(t)$ に与える影響を調べる。まず、(1)で実験に用いるパラメータを示す。次に(2)では、本実験より得られた定性的な性質を示す。具体的には、a)パラメータに対する投資閾値 $P^*(t), r^*(t)$ の感度分析、b)金利期間構造形状の違い（順構造：金利が将来上昇すると見込まれる場合、フラット：将来も不変であると見込まれる場合、逆構造：金利が将来下降すると見込まれる場合）による投資閾値 $P^*(t), r^*(t)$ の比較、そして c)時間変化による投資閾値 $P^*(t), r^*(t)$ およびオプション価値 $V^*(t)$ の比較を行う。最後に(3)では、本実験より得られた定量的に有意義な性質を示す。具体的には、金利が確定的な従来のリアル・オプション問題と、金利が不確実で初期金利期間構造がフラットな場合の a)投資閾値 P_D^*, P_S^* および b)オプション価値 V_D^*, V_S^* を比較する。

(1) パラメータの設定

本実験では、以後特に断り書きがない限り、プロジェクト成長率 $\mu_P = 0.04$ 、埋没費用 $I = 10$ 、満期 $T = 50$ 、時点 $t = 0$ と設定する。プロジェクト収入リスク σ_P 、金利変動リスク σ_r 、平均回帰率 a 、初期金利水準 r_0 については、固定する場合および変化させる場合の値を表



図－1 パラメータを増加させた場合の投資閾値の変化

－1のように設定する．これらの数値は，市場において観察されるデータや現実の実物投資事業の値を参考に，現実的な範囲で設定している（例えば Constantinides et.al.¹²⁾を参考にせよ）．これは以下の全ての数値実験も同様である．

また，本実験では，回帰レベル・パラメータ $\phi(t)$ を用い，初期金利期間構造を外生的に与える．初期金利期間構造形状としては，実験を通して線形の場合を考え，初期イールド $R(0, t)$ を式(20)のように設定する．

$$R(0, t) = pt + r_0. \quad (20)$$

ただし， r_0 は初期金利水準， p は初期金利期間構造の傾きを表す．さらに，(2)－b)では，convex/ concave な初期金利構造形状を考え，初期イールド $R(0, t)$ を式(20)に加え式(21)のように設定する．ただし， l は曲率， q は超長期金利を表す．

$$R(0, t) = (r_0 - q)e^{-lt} + q. \quad (21)$$

具体的には，以下の6つの初期金利構造を与え，この初期金利期間構造の違いによる投資閾値 $P^*(t)$ ， $r^*(t)$ の比較を行う．

$$\phi(t) = \begin{cases} -0.05e^{-0.16t} + 0.10 \cdots [Y1] \\ -0.05e^{-0.08t} + 0.005 \cdots [Y2] \\ 0.001t + 0.05 \cdots [Y3] \\ 0.0009t + 0.05 \cdots [Y4] \\ 0.045e^{-0.08t} + 0.005 \cdots [Y5] \\ 0.045e^{-0.16t} + 0.005 \cdots [Y6] \end{cases} \quad (22)$$

(2) 定性的な結果

a) パラメータ σ_P, σ_r に対する投資閾値の感度分析

図－1に示すように，初期金利期間構造が順構造・フラット構造・逆構造のいずれの場合でも，パラメータ σ_P を増加させると，任意のスポット・レート r での投資閾値 $P^*(0)$ ，任意のプロジェクト価値 P での投資閾値 $r^*(0)$ は増加する．なおこれは，従来のリアル・オプション問題と同様の結果であり，プロジェクト価値が変動することにより発生する待ちオプション価値が増加し，投資閾値 $P^*(0)$ が増加するためである．また，パラメータ σ_r を増加させる場合でも同様の結果を得る．これは，金利が変動することにより発生する待ちオプション価値が増加し，投資閾値 $P^*(0)$ が増加するためである．さらに，図－1(a), (b)および(c)を比較すると， σ_P, σ_r が

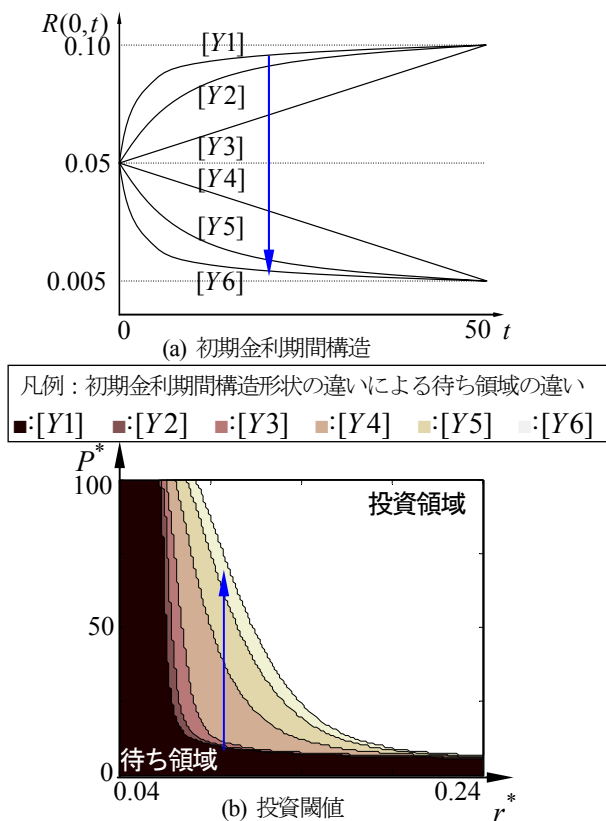


図-2 初期金利期間構造形状の違いによる比較

いずれの値でも、順構造よりもフラット、フラットよりも逆構造の方が投資閾値は大きいことがわかる。この金利期間構造と投資閾値の関係については、より詳しく次小節で考察する。

b) 初期金利期間構造の違いによる投資閾値の比較

図-2(a)に示す初期金利期間構造形状を与え、この形状の違いにより、投資閾値 $P^*(0)$ がどのように変化するかを確認する。図-2(b)に示すように、[Y1]から[Y6]へ、順構造から逆構造へと金利期間構造が変化するにつれ、投資閾値 $P^*(0)$ が増加する。

これは、以下のようなメカニズムにより生起すると考えられる。順構造の場合は金利の長期平均がフラットな場合と比較して高く、将来まで待って投資すると将来の高い金利により将来価値が大きく割引かれてしまう。一方、逆構造の場合は逆に長期金利が低く、将来価値が大きく割引かれることは少ないため、その間のプロジェクト価値の成長を期待し待つという選択が最良となるため、投資閾値 $P^*(0)$ は増大する。ただし、現在の金利が比較的高い場合（例えば図-2(b) $r = 0.24$ 周辺）には、将来の金利が下がる逆構造の場合であっても投資を待っている間の将来価値の割引が大きくなるため、金利の期間構造の違いによる投資閾値 $P^*(0)$ の大きさの差は小さくなる。

この結果より、金利が低い場合には、金利期間構造の違いが投資の意思決定に大きな差をもたらすと考えられ、

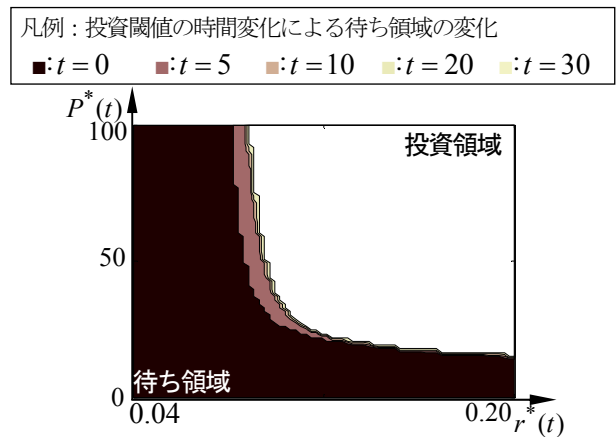


図-3 投資閾値の時間変化($\sigma_P = 0.2, \sigma_r = 0.01$)

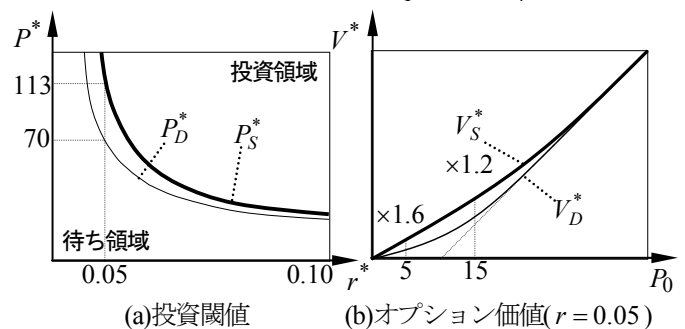


図-4 金利が確定的な場合と不確実な場合との比較
($t = 0, \sigma_P = 0.20, \sigma_r = 0.005$)

投資を行う際には、十分金利の期間構造を考慮する必要があるといえる。

c) 時間変化による投資閾値・オプション価値の比較

金利期間構造は時刻 t の関数であるため、投資閾値 $P^*(t)$ は時刻 t によって変化する。通常、満期を持つオプションは、満期に近づくにつれてその価値が減少する。これは、オプション行使を待つことができる期間が満期に近づくにつれ短くなり、行使を待つ間のオプション価値の成長も小さくなるからである。

しかし、初期金利期間構造が曲率の大きい順構造の場合（例えば[Y1]）、通常とは異なり、時間の経過により投資閾値およびオプション価値がともに増加する傾向がみられる。

一例として、 $l = 0.16$ 、 $\sigma_P = 0.20$ 、 $\sigma_r = 0.010$ における投資閾値 $P^*(t)$ の時間変化の図を図-3に示す。この図より、時刻 $t = 5, 10, 20$ における投資閾値 P^* は、時刻 $t = 0$ における投資閾値 $P^*(0)$ に対してより大きい値を示すことがわかる。ただし、 $t = 5 \sim 20$ の間の投資閾値の増加はわずかであり、逆に $t = 30$ では $t = 20$ に対し減少している。このため、金利期間構造を考慮した場合についても、満期を持つオプションは、満期に近づくにつれてその価値が減少するという点は概ね変わらないと言える。

(3) 定量的な結果

a) 投資閾値の比較

ここでは、金利が確定的な従来のリアル・オプション問題での投資閾値と、金利が不確実で、初期金利期間構造がフラットな場合の投資閾値を定量的に比較する。任意のスポット・レート r において、金利が不確実な場合の投資閾値 P_S^* は、金利が確定的な場合の投資閾値 P_D^* に比べて大きい値を示す。

一例として、 $\sigma_P = 0.20, \sigma_r = 0.005$ での投資閾値を図-4(a)に示す。ここで、太線は金利が不確実な場合の投資閾値 P_S^* を、細線は金利が確定的な場合の投資閾値 P_D^* を表す。この図より、 $r_0 = 0.05$ では $P_S^* / P_D^* = 1.6$ となる。

パラメータ $\sigma_P, \sigma_r, r_0, P_0$ が市場や現実の投資プロジェクトにおいて観察される値の範囲、 $(0.1 < \sigma_P < 0.4, 0.005 < \sigma_r < 0.015, 0.05 < r_0 < 0.10, 0.5 < P_0 / I < 1.5)$ では、 P_S^* / P_D^* は表-2 のようになる。例えば、金利が不確実な場合の投資閾値 P_S^* は、金利が確定的な場合の投資閾値 P_D^* に対し、 $\sigma_P = 0.1, \sigma_r = 0.015, r_0 = 0.05, P_0 / I = 0.5$ の場合で 5.2 倍大きい。つまり、プロジェクト収入リスクが小さく、金利リスクが大きく、金利が低く、なおかつプロジェクトの初期価値が相対的に低い場合には投資閾値の変化が大きいことがわかる。

これは、プロジェクトの収入自体は比較的確実であるが、現在のプロジェクト価値が低く、現在の金利も低く、かつ金利の変動が大きいことが見込まれる場合は、従来の金利を確定的として考えた場合では、誤った投資判断を下すこととなる。

b) オプション価値の比較

ここでは、金利が確定的な従来のリアル・オプション問題でのオプション価値と、金利が不確実で、初期金利期間構造がフラットな場合のオプション価値を定量的に比較する。金利が不確実な場合のオプション価値 V_S^* は、金利が確定的な場合のオプション価値 V_D^* に比べて大きい値を示す。

一例として、 $\sigma_P = 0.20, \sigma_r = 0.005$ でのオプション価値変化を図-4(b)に示す。ここで、太線は金利が不確実な場合のオプション価値 V_S^* を、細線は金利が確定的な場合のオプション価値 V_D^* を表す。この図より、 $P/I = 0.5$ で $V_S^* / V_D^* = 1.6$ 、 $P/I = 1.5$ で $V_S^* / V_D^* = 1.2$ となる。

パラメータ $\sigma_P, \sigma_r, r_0, P_0$ が市場や現実の投資プロジェクトにおいて観察される値の範囲、 $(0.1 < \sigma_P < 0.4, 0.005 < \sigma_r < 0.015, 0.05 < r_0 < 0.10, 0.5 < P_0 / I < 1.5)$ では、 V_S^* / V_D^* は表-3 のようになる。例えば、金利が不確実な場合の投資閾値 P_S^* は、金利が確定的な場合の投資閾値 P_D^* に対し、 $\sigma_P = 0.1$ 、

表-2 投資閾値の比較 (P_S^* / P_D^*) ($t=0$)

$\sigma_P \backslash \sigma_r$	0.005	0.010	0.015
0.1	1.1~2.1	1.4~3.8	2.7~5.2
0.2	1.1~1.6	1.2~2.9	1.9~4.1
0.3	1.1~1.3	1.2~2.1	1.5~3.0
0.4	1.1~1.2	1.2~1.7	1.3~2.2

表-3 オプション価値の比較 (V_S^* / V_D^*) ($t=0$)

$\sigma_P \backslash \sigma_r$	0.005	0.010	0.015
0.1	1.0~2.5	1.1~2.8	1.7~3.8
0.2	1.0~1.8	1.1~2.0	1.5~2.6
0.3	1.0~1.5	1.1~1.6	1.3~1.9
0.4	1.0~1.4	1.1~1.4	1.2~1.6

$\sigma_r = 0.015, r_0 = 0.05, P_0 / I = 0.5$ の場合で 3.8 倍大きい。

これは、投資閾値と同様に、プロジェクトの収入自体は比較的確実であるが、現在のプロジェクト価値が低く、現在の金利も低く、かつ金利の変動が大きいことが見込まれる場合は、従来の金利を確定的として考えた場合では、誤った事業価値の計量を行っていることとなる。

5. おわりに

本研究では、代表的なリアル・オプション問題である最適投資タイミング選択問題に対し、金利の不確実性および金利期間構造を導入した。その結果、パラメータが現実的な範囲 ($0.1 < \sigma_P < 0.4, 0.005 < \sigma_r < 0.015, 0.05 < r < 0.10, 0.5 < P/I < 1.5$) では、従来の金利が確定的な場合の結果と比べ、投資閾値およびオプション価値は最大で約 4~5 倍の値を示した。さらに、初期金利期間構造形状の変化により、投資閾値も大きく変化することが明らかになった。

以上より、社会基盤整備への投資問題を考える際には、従来の金利を確定的として考えた場合では、誤った投資判断を下すこととなる。特に、プロジェクトの収入自体は比較的確実であるが、現在のプロジェクト価値が低く、現在の金利も低く、かつ金利の変動が大きいことが見込まれる場合は、従来の金利を確定的として考えた場合には、その投資判断、事業価値の誤差が大きい。このような環境下で社会基盤整備事業を行う場合には、金利の不確実性及び金利の期間構造を考慮して財務的事業評価を行い、正しい投資判断を下すべきである。

金利の不確実性を考慮することにより、金利が確定的な場合に比べ投資閾値およびオプション価値が増大するという結果は、不確実性が増大すると投資閾値およびオプション価値が増大するという従来のリアル・オプション問題の結果を保持するものである。

これは、本モデルにおいてプロジェクト価値と金利の不確実性を独立と仮定したためであると考えられる。もし、この間に何らかの関連があると仮定したら、新たな結果が得られる可能性がある。ただし、この場合には、プロジェクト価値と金利の不確実性の間に直接の相関を仮定すると、完備リスク、不完備リスクが明示的ではなくなるため、市場で取引されるある資産、例えば事業者の株式、とそれぞれが相関があるとするのが望ましい。

また、今回はベンチマークとして、プロジェクト収入を投資後すぐに一括して受け取るというモデル構造になっている。これについては、より現実の社会資本整備事業のキャッシュ・フロー構造や制約を反映させるのが望ましく、これについては今後の課題とさせていただきます。

付録1 割引債価格の導出

ここでは、式(4)、(6)で表される割引債価格の導出について詳しく説明をする。

債券の相対価格をマルチンゲールにするような確率測度 $\mathbf{Q}$ のもとで、割引債の価格 $v(t, T)$ は、

$$v(t, T) = E_t^{\mathbf{Q}}[e^{\int_t^T -r(s)ds} | r(t)], \quad 0 \leq t \leq T \quad (23)$$

と表される。この割引債価格は無裁定条件より、以下の Black-Scholes-Morton 方程式を満たす必要がある：

$$rv(t, T) = \frac{\partial v}{\partial t} + \mu^*(r, t) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\sigma^2(r, t)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (24)$$

ここで μ^* は確率測度 $\mathbf{Q}$ のもとでの瞬間スポット・レートドリフトである。瞬間スポット・レートは式(2)の確率微分方程式で表されるため、式(24)は以下のように書き直すことができる。

$$rv(t, T) = \frac{\partial v}{\partial t} + (\phi(t) - ar) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\sigma_r^2}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (25)$$

ここで、割引債価格が、ある関数 $\alpha(t), \beta(t)$ により、

$$v(t, T) = e^{\alpha(t) + \beta(t)r} \quad 0 \leq t \leq T \quad (26)$$

と書けると仮定しよう。ここで、満期 T における割引債価格 $v(T, T) = 1$ より、

$$\alpha(T) = 0, \beta(T) = 0 \quad (27)$$

が得られる。ここで、各偏微分を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(t, T)}{\partial t} &= \left\{ \frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{d\beta(t)}{dt} r \right\} v(t, T), \\ \frac{\partial v(t, T)}{\partial r} &= \beta(t) v(t, T), \\ \frac{\partial^2 v(t, T)}{\partial r^2} &= \beta^2(t) v(t, T) \end{aligned} \quad (28)$$

となり、これらを式(24)に代入することにより、以下の式が得られる：

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d\beta(t)}{dt} - a\beta(t) - 1 \right\} r \\ &+ \left\{ \frac{d\alpha(t)}{dt} + \phi(t)\beta(t) + \frac{\sigma_r^2}{2} \beta^2(t) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

従って、式(24)の偏微分方程式が成立するためには、境界条件式(26)の下で $\alpha(t), \beta(t)$ を連立方程式：

$$\begin{cases} \frac{d\beta(t)}{dt} = a\beta(t) + 1 \\ \frac{d\alpha(t)}{dt} = -\phi(t)\beta(t) - \frac{\sigma_r^2}{2} \beta^2(t) \end{cases} \quad (30)$$

を満たすように定める必要がある。したがって、まず $\beta(t)$ を解き次に $\alpha(t)$ を解くことにより、割引債の価格式(4)、(6)を得る：

$$v(t, T) = e^{\alpha(t) + \beta(t)r} = A(t, T) e^{-B(t, T)r(t)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A(t, T) &= e^{\alpha(t)} \\ &= \exp \left\{ \frac{\sigma_r^2}{2} \int_t^T \beta^2(u) du + \int_t^T \phi(u) \beta(u) du \right\} \\ &= \exp \left\{ \frac{\sigma_r^2}{2} \int_t^T B^2(u, T) du - \int_t^T \phi(u) B(u, T) du \right\} \quad (6) \\ B(t, T) &= -\beta(t) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \end{aligned}$$

付録2 数値実験手法の詳細

本研究では、線形相補性問題を解くために、射影SOR法を用いる。以下に具体的な数値計算方法を示す。

(1) 終端条件および境界条件

数値計算を行う上では、5つの境界条件を与える必要がある。以下、満期 $T (= t^I)$ での終端条件および状態変数 r, P の最小値、最大値における境界条件を示す。

a) 終端条件

満期でのペイオフを終端条件として与えることができる。終端条件は次式で与えられる。

$$V_T(P(T), r(T)) = \max\{P(T) - I, 0\} \quad (31)$$

b) 境界条件

ここでは、時刻 t における状態変数 r, P の境界条件 (i) ~ (iv) を求める。

プロジェクトから得られるキャッシュ・フローが大きい場合、事業主体は投資することになる。またスポット・レートの値が大きい場合、将来の価値は大きく割り

引かれるため P が比較的小さい場合は投資を待つことが予想される。境界条件 (i) ~ (iv) を以下に示す。

(i) $P \rightarrow 0$ の場合

プロジェクト・キャッシュ・フローが極めて小さい場合、この事業からは利潤が発生しない。

$$\lim_{P \rightarrow 0} V_t(P, r) = 0 \quad (32)$$

(ii) $P \rightarrow \infty$ の場合

プロジェクト・キャッシュ・フローが極めて大きい場合、この事業に投資を行う。

$$\lim_{P \rightarrow \infty} V_t(P, r) = P - I = \infty \quad (33)$$

(iii) $r \rightarrow 0$ の場合

時刻 t 前後におけるスポット・レートによる影響が無くなるため、 P のみを変数とする以下の偏微分方程式 [PDE2] が得られる：

$$[PDE2] \quad V_t + \mu_P P V_P + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 V_{PP} = 0. \quad (34)$$

[PDE2] より得られる解を $V_t^{[PDE2]}$ とするとき、最適値関数は次のアメリカン・オプション問題を解くことで得られる。

$$V(t, P(t), r(t)) = \max. \{P(t) - I, V_t^{[PDE2]}, 0\} \quad (35)$$

(iv) $r \rightarrow \infty$ の場合

時刻 t 前後におけるスポット・レートが限りなく大きくなるため、将来の価値は大きく割引かれるため P が比較的小さい場合は投資を待つ。しかし得られるキャッシュ・フロー P が大きくなると投資するので、自由境界が存在する。従って、以下の偏微分方程式 [PDE3] が得られる：

$$[PDE3] \quad V_t + \mu_P P V_P + \frac{1}{2} \sigma_P^2 P^2 V_{PP} - rV = 0. \quad (36)$$

[PDE3] より得られる解を $V_t^{[PDE3]}$ とするとき、最適値関数は次の問題を解くことで得られる。

$$V(t, P(t), r(t)) = \max. \{P(t) - I, V_t^{[PDE3]}, 0\} \quad (37)$$

以上、境界条件 (i) ~ (iv) より、自由境界は図-5のように右肩上がりの曲線を描くことが予想される。

(2) 最適制御条件の差分近似

a) 状態空間の離散化

時間 t を I 個の区間に、また状態変数 P , r をそれぞれ J , K 個の区間に離散化する。

$$\begin{aligned} t &\rightarrow t^i \equiv i\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, I \\ P &\rightarrow P^j \equiv j\Delta P, \quad j = 0, 1, \dots, J \\ r &\rightarrow r^k \equiv k\Delta r, \quad k = 0, 1, \dots, K \end{aligned} \quad (38)$$

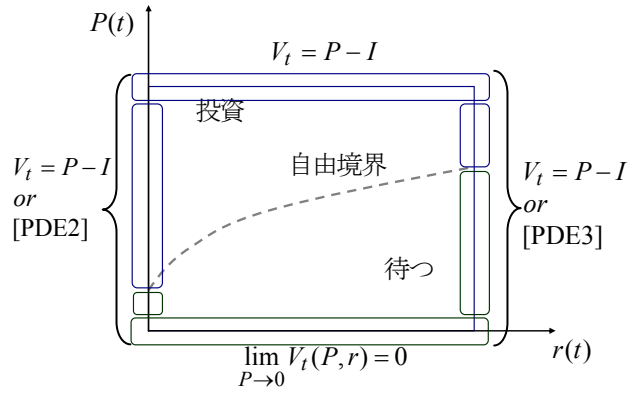


図-5 境界条件および自由境界

b) 最適値関数の離散化

状態空間の離散化に伴い、最適値関数を次のように対応させて離散化する。

$$V(t, P, r) = V_t(P, r) \rightarrow V^{i,j,k} \equiv V_{t^i}(P^j, r^k) \quad (39)$$

c) 最適制御条件の差分近似

式(19)で表される相補性問題は、2 変数の偏微分方程式 [PDE1] で示される。

$$[PDE1] \quad \begin{cases} \mathcal{L}V \cdot (V - (P - I)) = 0, \\ -\mathcal{L}V \geq 0, \quad V - (P - I) \geq 0. \end{cases} \quad (19')$$

この偏微分方程式について有限差分法 (Crank-Nicolson 法) を用いて差分近似を行う。差分近似の詳細については、スペースの都合で割愛させていただく。

d) 境界条件の差分近似

境界条件 [PDE2], [PDE3] についても最適制御条件と [PDE1] と同様に有限差分法を用いて差分近似を行う。

(3) 射影 SOR 法

境界条件 [PDE2], [PDE3] を射影 SOR 法で解き、境界条件を得る。ここで得られた境界条件より [PDE1] を射影 SOR 法で解くことにより全ての解を得ることができる。

参考文献

- 1) Dixit, A.K. and Pindyck, R.S. : *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press, 1994.
- 2) 横松宗太, 織田澤利守, 小林潔司 : プロジェクトの実施遅延がもたらす経済損失評価, 都市計画論文集, Vol. 36, pp.937-942, 2001.
- 3) 小林潔司, 横松宗太, 織田澤利守 : サンクコストと治水経済評価 : リアルオプションアプローチ, 河川技術に関する論文集, 第7巻, pp. 417-422, 2001.
- 4) Hull, J.C. and White, A.: Pricing Interest-rate-derivative Securities, *Review of Financial Studies*, Vol.3, 573-592, 1990.
- 5) Cox, J.C., Ingersoll, J. E. and Ross, S. A. : A theory of the term structure of interest rates, *Econometrica*, vol.53, pp.363-384, 1985.
- 6) Heath, D., Jarrow, R. and Morton, A. : Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates : A New Methodology for Contingent Claims Valuation., *Econometrica*, Vol.60, pp.77-105, 1992.
- 7) Vasicek, O.A. and Fong, H.G. : Term structure modeling using exponential splines, *Journal of Finance*, Vol.37, pp.339-348, 1982.
- 8) Brennan, M.J. and Schwartz, E. S. : A continuous-time approach to the pricing of bonds, *Journal of Banking and Finance*, Vol.7, pp.127-155, 1979.
- 9) Hull, J. C. and White, A.: A note on the models of Hull and White for pricing options on the term structure: Response, *Journal of Fixed Income*, pp.97-102, 1995.
- 10) Kijima M. and Nagayama I.: Efficient numerical procedures for the Hull-White extended Vasicek model, *Journal of Financial Engineering*, Vol.3, pp.317-337, 1994.
- 11) Wilmott, P.: *Paul Wilmott on Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, 2000.
- 12) Constantinides G.M., Harris M., Stulz R.M. eds.: *Handbook of the Economics of Finance*, North-Holland, 2003.

金利リスクを考慮したリアル・オプション問題に関する研究*

高橋 啓**・赤松 隆***・水谷 剛****

本論文では、金利の不確実性および期間構造を考慮した、リアル・オプション問題を分析した。数値実験の結果、従来の確定的な金利を用いたモデルでは、プロジェクト・キャッシュ・フローの閾値とオプション価値を過少に評価していることが分かった。典型的な例においては、プロジェクト・キャッシュ・フローの閾値は従来のモデルと比較し、約5倍の値となり、同様にオプション価値についても約4倍の値となった。従って、実物投資問題を考える際には、金利の不確実性および金利期間構造を考慮する必要がある。

Real Option Problems with Stochastic Interest Rates *

By Kei TAKAHASHI**・Takashi AKAMATSU***・Go MIZUTANI****

This paper studies real option problems with stochastic interest rates and the term structure of interest rates. Numerical experiments reveal that both threshold value of the project cashflow and option value show wrong value in the conventional methods with deterministic interest rates. For a typical example, threshold value of the project cashflow is about 5 times larger than that in the conventional methods, and the option value is about 4 times larger than that in the conventional model. We conclude that we need considering stochastic interest rates and the term structure of interest rates, when we deal with real estate investment problems.
