【土木計画学研究・論文集 No. 23 no. 4 2006 年 9 月】

交通需要の不確実性を考慮したネットワークの動的有料道路料金更新問題*1

Dynamic Revenue Management of Toll Road Projects in Networks under OD Demand Uncertainty*1

長江 剛志*2
By Takeshi NAGAE*2

1 はじめに

近年，有料道路事業の民営化や PFI (Private Finance Initiative) 化が注目されている．こうした事業を行なう民間企業の目的は，事業価値，すなわち，当該事業から発生するキャッシュ・フロー流列 (通常，料金収入，維持管理費，操業費用などから構成される) の期待現在正味価値 (ENPV: Expected Net Present Value) の最大化にある．一般に，これらの事業収益は，当該有料道路上の交通需要の変化に応じて，大きく変動する．ここでの交通需要の変化とは，日々の変動や，季節変動，さらには経済成長や少子化などを反映した長期的変動などを指す．こうした交通需要の変動にあわせたフィードバック的かつ動的な意思決定は，長期に渡る有料道路事業の採算性などを議論する際には重要かつ不可欠である．例えば，東京湾アクアラインや本州四国連絡橋などでは，膨大な建設コストの回収を目指して設定された高額かつ硬直的な料金が交通需要を抑制し，低い需要が建設コストの回収をさらに困難にしている．こうした状況下では，交通需要の回復 (およびそれを支える周辺地域の経済の発展) を目指して料金を引き下げ，需要が回復した後に改めて料金を引き上げるといった動的な料金変更は，十分に検討する価値があるだろう．

従来，交通需要の動学的不確実性を明示的に考慮した有料道路の動的料金更新問題の考え方および必要性については漠然と議論されてきたが，その具体的な方法論を扱った研究は筆者の知る限り殆ど存在しない．棟方ら [1] および Nagae and Akamatsu[2] は，交通需要を確率過程として表現し，動的料金問題を確率インパルス制御問題として定式化した上で，料金制御則を定量的に求めるための解法を開発した．しかし，これらの研究は，いずれも，ネットワークを捨象しており，経路選択や混雑といった交通特有の現象を明示的に考慮していない．

そこで，本研究では，Nagae and Akamatsu[2] の枠組を，一般道も含めたネットワークへと拡張し，有料道路事業の利潤を最大化させる料金制御則を導く．より具体的には，有料道路と一般道路からなるネットワークにおいて，交通需要の確率的変動を考慮した有料道路の動的料金更新問題の記述・分析のための枠組を提案する．そして，OD 需要が低ければ有料道路料金を引き下げて有料道路 (ひいてはネットワーク全体への) 需要を喚起し，需要が回復した後は，料金を引き上げて収益性を高めるといった料金制御則を導く．

本稿は以下のように構成される：まず，続く第 2 章で本研究の枠組を示し，最適料金更新問題を確率的インパルス制御問題として定式化する．第 3 章では，こうして定式化された問題の最適性条件が無限次元の一般化相補性問題 (GLCP: Generalized Linear Complementarity Problem) として記述できることを明らかにする．第 4 章では，この分析結果を活用した問題の効率的解法を開発する．具体的には，まず，適当な離散的枠組の下で，最適性条件を有限次元 GLCP として再定式化し，数理計画分野における最近の研究成果を活用した効率的解法を示す．第 5 章では，このアルゴリズムが適切に動作していることを確認し，提案手法の判り易い適用例を示す．最後に，第 6 章ではまとめと今後の課題を議論する．

2 問題の枠組と定式化

(1) 問題の枠組

図 1 に示すような，1 つの起終点 (OD) ペアを 1 本の有料道路および 1 本の一般道路が結ぶネットワークを考える．ある計画期間 $[0, T]$ 中の時刻において

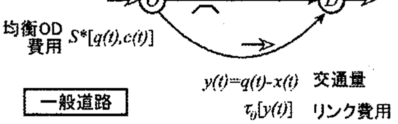

図 1 問題の枠組

*1 キーワーズ：交通制御，交通網計画，確率的制御
*2 正会員，博士（情報科学）神戸大学大学院自然科学研究科
(〒657-8501 神戸市灘区六甲台町 1-1)

この起終点間に発生する単位時間あたりの交通需要(以下，OD 交通需要) を $q(t)$ で記述する．有料道路の管理者は，時刻 t において予め与えられた料金集合 $C \equiv \{c_1, c_2, \cdots, c_m, \cdots, c_M\}$ の中から料金を決定できるとし，時刻 t において選択される有料道路料金を $c(t) \in C$ と記述する．任意の時刻 $t \in [0, T]$ において，OD 需要が $q(t) = q$ であり，料金が $c(t) = c_m$ であるとき，このネットワーク上ではこれらを与件とした利用者均衡が達成されると仮定する．そして，その均衡状態における有料道路上の交通量および OD 間一般化費用を，それぞれ，$x^*[q, c_m]$ および $S^*[q, c_m]$ と記述する．

この有料道路事業からは，毎時刻，当該時刻における料金と，有料道路上の均衡交通量に応じた料金収入が発生する．有料道路の管理者は，計画期間 $[0, T]$ に渡って得られる料金収入流列の期待現在正味価値 (ENPV: Expected Net Present Value) を最大化するように料金戦略を決定する．

(2) モデルの定式化

■OD 需要のダイナミクス 本研究では，OD 需要 $q(t)$ のダイナミクスを，均衡 OD 間費用 $S^*[q(t), c(t)]$(後述) を用いた以下の確率微分方程式：

$$dq(t) = \mu(q(t), S^*[q(t), c(t)])\,dt + \sigma(q(t))\,dZ_t, \quad q_0 = \text{given}. \tag{1}$$

で記述する．ここで，μ, σ は，それぞれ，OD 交通量のトレンドおよび変化量の分散を表している．Z_t は適切な確率空間 $(\Omega, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ 上で定義される標準 Brown 運動であり，その微小時間 dt における増分 $dZ(t)$ が，平均 0，分散 dt の標準正規分布に従う．

本モデルでは，OD 交通需要のトレンド，季節変動や，新料金の提示 (および，それに起因する均衡 OD 費用の変化) に対する利用者の選択行動の変化などを，式 (1) の右辺第 1 項で表現する．例えば，新料金提示に対する利用者選択行動のタイム・ラグを表現する場合を考えよう．まず，変動需要型利用者均衡モデルを考え，時刻 t における OD 間の (潜在的な) 交通需要を，当該時刻の均衡 OD 費用の減少関数 $q^*(t) = D(S^*[q(t), c(t)])$ で表す．次に，以下の自然な仮定を考えよう：現在の OD 需要が潜在的 OD 需要より小さい (i.e., $q(t) < q^*(t)$) ならば $q(t)$ は時間と共に増加し，逆に現在の需要が潜在的な需要より大きい ($q(t) > q^*(t)$) ならば $q(t)$ は時間と共に減少する．この仮定は，式 (1) において，$\mu(\cdot)$ を，潜在需要と現在の需要とのギャップの単調増加関数，例えば，$\mu(\cdot) \equiv \lambda\{D(S^*[q(t), c(t)]) - q(t)\}$ と定義することで表現できる．ただし，λ は正のパラメータで，潜在的需要への回帰速度を表す．

■利用者均衡状態 時刻 t における有料道路の単位時間あたり交通量を $x(t)$ で表し，このときの有料道路の一般化費用を以下の式で定義する．

$$\tau_1[x(t), c(t)] \equiv c(t) + s_1[x(t)], \quad c(t) \in C, \tag{2}$$

ここで，$s_1[x(t)]$ は有料道路のリンク・コスト関数である．同様に，一般道路の交通量を $y(t) \equiv q(t) - x(t)$ で記述し，その一般化費用を，一般道リンク・コスト関数を用いて $\tau_0[y(t)] \equiv s_0[y(t)]$ で表す．$s_0, s_1 : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}_{++}$ は，それぞれ，交通量に関する単調増加凸関数であるとする．以下では，均衡状態を容易に求めるために，$0 < \tau_1[0, c] < \tau_0(0), \forall c \in C$ とする．

上記の仮定より，有料道路の均衡交通量は

$$x^*[q(t), c(t)] = \begin{cases} q(t) & \text{if } \tau_1[q(t), c(t)] \le \tau_0(0) \\ f[q(t), c(t)] & \text{if } \tau_1[q(t), c(t)] > \tau_0(0) \end{cases}$$

で表され，OD 間の均衡一般化費用は

$$S^*[q(t), c(t)] \equiv \tau[x^*[q(t), c(t)], c(t)] \tag{3}$$

で表される．ここで，$f[q(t), c(t)]$ は，以下の等時間原則

$$\tau_1[x, c(t)] = \tau_0[q(t) - x] \tag{4}$$

を，x について解いて求められる．

■有料道路事業の利潤および定式化 時刻 t において管理者が単位時間に得る料金収入は，当該時刻における均衡リンク交通量と有料道路料金の積として，

$$\pi[q(t), c(t)] \equiv c(t) x^*[q(t), c(t)] \tag{5}$$

と定義される．有料道路の事業主体は計画期間 $[0, T]$ の間に獲得する料金収入流列の期待現在正味価値を最大とするように，料金戦略を決定する．具体的には，毎時刻 $t \in [0, T]$ において，OD 交通量 $q(t)$ と，直前までに選択されている料金 $c(t_-) \equiv \lim_{\delta \to +0} c(t + \delta)$ に応じて，当該時刻の料金 $c(t)$ を決定する．この料金変更には，一定のメニュー・コストがサンクすると仮定し，料金を c_m から c_n へ変更するのに必要なメニュー・コストを $I_{m,n}$ で表す．ここで，OD 交通量 $q(t)$ と直前の料金 $c(t_-)$ は，いずれも，意思決定を行なう時刻 t までは観測されない (未知である) ことに注意されたい．このことは，料金戦略が，時刻 t，交通量 $q(t) = q$，および料金 $c(t_-) = c$ の関数となることを意味している．以下では，料金戦略を $c(\cdot) \equiv \{c(t, q, c) | (t, q, c) \in [0, T] \times \mathcal{R}_+ \times C\}$ と記述する．

上述の枠組の下で，管理者の行動は，

$$[\mathrm{P}] \quad \max_{c(\cdot)} \mathbb{E}\Big[\mathcal{J}(0,T,c(\cdot))|(0,q_0,c_0)\Big], \ \text{s.t. (1)},$$

と定式化される．ここで，$\mathbb{E}\Big[\cdot|(t,q,c)\Big]$ は，時刻 t に観測された情報集合 $[q(t),c(t_-)]=(q,c)$ の下での条件付き期待値演算を表わす．q_0 および c_0 は，それぞれ，時刻 $t=0$ における OD 交通量および有料道路料金を表わす所与の定数である．$\mathcal{J}(t,T,c(\cdot))$ は，残存計画期間 $[t,T]$ に料金戦略 $c(\cdot)$ の下で発生する利潤流列の時刻 t での ENPV であり，以下の式で定義される．

$$\mathcal{J}(t,T,c(\cdot)) \equiv \int_t^T e^{-\rho(s-t)} \left\{\pi[q(s),c(s)] - \sum_{m,n} \delta_{m,n}(s) I_{m,n}\right\} \mathrm{d}s. \quad (6)$$

式 (6) において，ρ は割引率であり，所与の定数とする．$\delta_{m,n}(t)$ はデルタ関数であり，時刻 t に料金が c_m から c_n へ変更される時にのみ $1/\mathrm{d}t$，それ以外では 0 の値を取る．

3　最適性条件の導出

本章では，問題 [P] の最適性条件が無限次元の GLCP(Generalized Linear Complementarity Problem; 一般化相補性問題) として記述できることを明らかにする．まず，時刻 t において OD 需要 $q(t)=q$ であり，有料道路料金 $c(t)=c_m$ が選択されているときの問題 [P] の最適値関数を以下の式で定義する．

$$V(t,q,c_m) \equiv \max_{c(\cdot)} \mathbb{E}\left[\mathcal{J}(t,T,c(\cdot))|(t,q,c_m)\right], \forall c_m \in C, \quad (7)$$

この最適値関数 $V(t,q,c_m)$ は，時刻 t に料金 c_m が選択されているときの有料道路事業の価値を，当該時刻の OD 交通量 $q(t)=q$ の関数として表現したものと解釈できる．表記の簡便のため，以降では，$V(t,c_m) \equiv \{V(t,q,c_m)|\forall q \in \mathcal{R}_{++}\}$ および $V(t) \equiv [V(t,c_1),\cdots,V(t,c_{\mathrm{M}})]'$ なる表現を用いる．

最適値関数 (7) に DP(Dynamic Programming) 原理を適用すれば，任意時刻 $t \in [0,T]$ の状況 $(q(t),c(t))=(q,c_m)$ における管理者の行動は，以下の 2 つのいずれかを離散的に選択する問題に帰着する：i) 微小時間 Δ だけ現在の料金 c_m を継続する；あるいは ii) 料金を c_m から他の値に変更する．以下では，それぞれが選択される場合に最適値関数が満たすべき条件を導こう．まず，管理者が現在の料金 c_m をある期間 Δ だけ継続する場合，最適値関数は，

$$V(t,q,c_m) \geq \int_t^{t+\Delta} e^{-\rho(s-t)}\pi[q(s),c_m]\,\mathrm{d}s + e^{-\rho\Delta}\mathbb{E}\Big[V(t+\Delta,q(t+\Delta),c_m)|(t,q,c_m)\Big]. \quad (8)$$

を満たす．$\Delta \to 0$ として伊藤の補題を適用すれば，この条件式は，

$$F_{m,m}(q;V(t,c_m)) \equiv -\mathcal{L}_m V(t,q,c_m) - \pi(q,c_m) \geq 0 \quad (9)$$

と書き直せる．ここで，$\mathcal{L}_m$ は OD 需要プロセス (1) から決定される偏微分演算子で，以下の式で定義される．

$$\mathcal{L}_m \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mu(q,S^*[q,c_m])\frac{\partial}{\partial q} + \frac{1}{2}\sigma^2(q)\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \rho. \quad (10)$$

次に，管理者が料金を c_m から他の値 c_n に変更する場合，最適値関数は

$$V(t,q,c_m) \geq V(t,q,c_n) - I_{m,n} \quad (11)$$

を満たす．左辺より右辺を引けば，この式は

$$F_{m,n}(q;V(t)) \equiv V(t,q,c_m) - V(t,q,c_n) + I_{m,n} \geq 0 \quad (12)$$

と書き直せる．この不等式が c_m 以外の全ての料金の値 $c_n \neq c_m$ に対して成り立つため，管理者が料金を変更するときに最適値関数が満たす条件は，

$$\min_{n\in M\backslash m} \{F_{m,n}(q;V(t))\} \geq 0 \quad (13)$$

で表される．ここで，$M\backslash m \equiv \{1,2,\cdots,m-1,m+1,\cdots,\mathrm{M}\}$ である．

時刻 t における任意の OD 需要 $q(t) \in \mathcal{R}_+$ について，上記のいずれ一方のみが選択される．従って，条件式 (9) および (13) のいずれか一方のみ等号が成立する．これは，以下の一般化相補性条件として記述できる．

$$\min.\{F_{m,1}(q;V(t)),\cdots,F_{m,\mathrm{M}}(q;V(t))\} = 0, \quad \forall q \in \mathcal{R}_{++}. \quad (14)$$

ここで，管理者は料金の変更を任意回数行えることに注意されたい．これは，ある時点における各料金に対応する最適値関数 $V(t,q,c_m),\cdots,V(t,q,c_{\mathrm{M}})$ を，後方帰納法 (backward induction) を用いて逐次的に求められないことを意味している．そのため，全ての料金に対応する最適値関数 $V(t)$ を以下の GLCP の解として"同時に"求める必要がある．

[GLCP$^\infty$]　Find $\{V(t) | t \in [0, T]\}$ such that

$$\begin{cases} \min.\{F_{1,1}(q; V(t)), \cdots, F_{1,\mathrm{M}}(q; V(t))\} = 0 \\ \vdots \\ \min.\{F_{\mathrm{M},1}(q; V(t)), \cdots, F_{\mathrm{M},\mathrm{M}}(q; V(t))\} = 0 \\ \qquad\qquad \forall (t, q) \in [0, T] \times \mathcal{R}_+. \end{cases}$$

問題 [GCLP$^\infty$] の計画期間の満期での終端条件は，以下の式で表わされる．

$$V(T, q(T), c_m) = 0, \quad \forall q(T) \in \mathcal{R}_+, \forall c_m \in C. \qquad (15)$$

4　数値的解法

前章までで，動的料金更新問題が無限次元の一般化相補性問題 [GLCP$^\infty$] として表現できることを示した．この問題は解析解を持たないため，本章では，適当な離散的枠組の下で近似解を数値的に求める方法を示す．具体的には，まず，(1) で動的料金更新問題 [GCLP$^\infty$] を離散的枠組の下で表現し直す．次に，(2) では，こうして離散表現された問題が，時間について分解できることを示す．これにより，動的料金更新問題を，各時点で成立する小規模なサブ問題を逐次的に解く問題に帰着させられる．最後に，(3) では，このサブ問題を解く方法として，平滑化アプローチを用いた効率的解法を示す．

(1)　問題の離散的表現

非負領域 $\mathcal{R}_{++}$ 上に十分に大きい領域 $[q_{\min}, q_{\max}] \in \mathcal{R}_{++}$ を考え，時刻と状態変数の空間 $[0, T] \times [q_{\min}, q_{\max}]$ 上の任意の点を $(\mathrm{I}+1) \times (\mathrm{J}+2)$ の離散格子上で

$$t \to t^i \equiv i\Delta t, i = 0, 1, \cdots, \mathrm{I},$$
$$q \to q^j \equiv j\Delta q + q_{\min}, j = 0, 1, \cdots, \mathrm{J}, \mathrm{J}+1.$$

と離散表現し，時間と状態に関するインデックス集合を，それぞれ，$I \equiv \{0, 1, \cdots, \mathrm{I}-1\}, J \equiv \{1, \cdots, \mathrm{J}\}$ とする．ただし，格子間隔 $\Delta t, \Delta q$ は，$t^{\mathrm{I}} = T, q^{\mathrm{J}+1} = q_{\max}$ となるように選ぶものとする．この離散格子の点 (i, j) における最適値関数および利潤関数を，それぞれ，$V_m^{i,j} \equiv V(t^i, q^j, c_m), \pi_m^j \equiv \pi(q^j, c_m)$ と表現し，$\boldsymbol{V}_m^i \equiv \left[V_m^{i,1}, \cdots, V_m^{i,\mathrm{J}}\right]'$ および $\boldsymbol{\pi}_m \equiv \left[\pi_m^1, \cdots, \pi_m^{\mathrm{J}}\right]'$ とベクトル表記する．以下では，時点 i における各料金毎の最適値関数 $\boldsymbol{V}_m^i$ を縦に並べた JM 次元列ベクトルを $\boldsymbol{V}^i$ で表す．

この離散的枠組下で，問題 [GLCP$^\infty$] は

[GLCP]　Find $\{\boldsymbol{V}^i | i = 0, 1, \cdots, \mathrm{I}-1\}$ such that

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}) = \boldsymbol{0}, \quad \forall i = 0, 1, \cdots, \mathrm{I}-1.$$

と離散表現される．ただし，

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}) \equiv \min.\{\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}), \cdots, \boldsymbol{F}_{\mathrm{M}}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1})\}$$

$$\boldsymbol{F}_n(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}) \equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_{1,n}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{M},n}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{F}_{m,n}(\boldsymbol{V}^i, \boldsymbol{V}^{i+1}) \equiv \begin{cases} -\boldsymbol{L}_m \boldsymbol{V}_m^i - \boldsymbol{M}_m \boldsymbol{V}_m^{i+1} - \boldsymbol{\pi}_m & m = n \\ \boldsymbol{V}_m^i - \boldsymbol{V}_n^i + \boldsymbol{1} I_{m,n} & m \neq n. \end{cases}$$

ここで，$\boldsymbol{Z} \equiv \min.\{\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_{\mathrm{M}}\}$ は，その第 j 番目要素が $Z^j \equiv \min.\left\{F_1^j, \cdots, F_{\mathrm{M}}^j\right\}$ となるようなベクトル演算子である．$\boldsymbol{1}$ は全ての要素が 1 であるような J 次元列ベクトルである．$\boldsymbol{L}_m, \boldsymbol{M}_m$ は，OD 交通需要プロセス (1) から一意に決まる $\mathrm{J} \times \mathrm{J}$ 正方行列である．問題 [GCLP] の終端条件は，以下の式で表わされる．

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{0}. \qquad (16)$$

(2)　時間についての分解

問題 [GLCP] は，それ自身，$(\mathrm{I}-1)\mathrm{J}$ 次元の未知変数 $\{\boldsymbol{V}^i | i = 0, 1, \cdots, \mathrm{I}-1\}$ を持つ非常に大規模な問題である．しかし，時点 i で成立する最適性条件は，時点 $i+1$ での最適値関数 $\boldsymbol{V}^{i+1}$ が既知であれば，$\boldsymbol{V}^i \in \mathcal{R}^{\mathrm{J}}$ だけを独立に求める下記の有限次元 GLCP

[GLCP^i]　Find $\boldsymbol{V}^i \in \mathcal{R}^{\mathrm{J}}$ such that

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{V}^i, \overline{\boldsymbol{V}}^{i+1}) = \boldsymbol{0}.$$

として定式化される．ただし，与件であることを明示するために上線付きの表現 $\overline{\boldsymbol{V}}^{i+1}$ を用いた．これを利用すれば，問題 [GLCP] の全ての時点の未知変数 $\{\boldsymbol{V}^i\}$ は，以下の手続きに従ってサブ問題 [GLCP^i] を逐次的に解くことで求められる．

[Alg-GLCP]

Step 0　終端条件 (16) より $\boldsymbol{V}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{0}$．$i := \mathrm{I}-1$．

Step 1　時点 $i+1$ での最適値関数 $\overline{\boldsymbol{V}}^{i+1}$ を与件としてサブ問題 [GLCP^i] を解き，時点 i での最適値関数 $\boldsymbol{V}^i$ を求める．

Step 2　$i = 0$ なら終了．そうでなければ，$i := i-1$ として Step 1 へ．

(3) サブ問題の求解アルゴリズム

問題 [GLCP^i] のような有限次元 GLCP に対しては，近年，多くの数値解法が提案されている (例えば，Ferris and Pang[3], Peng and Lin[4])．本稿では，最近の相補性問題研究の進展に伴って現れた平滑化 (smoothing) アプローチ[4] を用いた解法を示す．以下では，時点 $i+1$ での最適値関数 V^{i+1} が与えられた下での時点 i のサブ問題 [GLCP^i] の解法を議論することが自明であるため，時点に関する表記を省略する．

平滑化アプローチでは，区分的に滑らかな非線形方程式：

$$\mathcal{H}(V) \equiv \min.\{F_1, \cdots, F_{\mathrm{M}}\} = 0 \tag{17}$$

の微分不可能性による問題を克服するために，これを平滑化した関数 $H(V,\xi)$ を用いる．ここで，平滑化関数は，$\lim_{\xi\to 0} H(V,\xi) = \mathcal{H}$ なる性質を持つ V について連続微分可能な関数であり，ξ は平滑化パラメタと呼ばれる．本稿では，こうした平滑化関数として，以下の Peng and Lin[4] 型関数を採用する．

$$[H(V,\xi)]^j \equiv -\xi \ln\left\{e^{-\frac{F_1^j(V)}{\xi}} + \cdots + e^{-\frac{F_{\mathrm{M}}^j(V)}{\xi}}\right\} \tag{18}$$

この平滑化関数を用いて問題 [GLCP^i] を解く最も簡単なアルゴリズムは，以下のようにまとめられる[4]．

Step 0.　$\xi^{(1)} \in \mathcal{R}_+$ を選び，$k := 1$;
Step 1.　$\mathcal{H}(V^{(k)}) = 0$ ならば停止 ($V^{(k)}$ が解);
Step 2.　平滑化方程式 $H(V^{(k)}, \xi^{(k)}) = 0$ を解く；
Step 3.　次のパラメタ $\xi^{(k+1)} \in [0, \xi^{(k)})$ を選ぶ;
Step 4.　$k := k+1$ とし，Step1 へ.

このアルゴリズムは，以下の 2 つの特徴を持つ．第 1 に，Step 3. で平滑化パラメタが $\xi^{(k+1)} < \xi^{(k)}$ を満足するように選ばれるため，このアルゴリズムが生成する平滑化経路 $\{(V^{(k)}, \xi^{(k)})\}$ は明らかに GLCP の解 $(V^*, +0)$ に収束する．第 2 に，Step 2. の平滑化方程式は連続微分可能であるため，その解を Newton 法などを用いて計算できる．特に，Peng and Lin[4] は，Step 2. の計算に打ち切り Newton 法を用いることで局所的な収束速度を高めている．その詳細および大域的収束性や効率性の議論については Peng and Lin[4] を参照されたい．

5　数値計算例

本章では，提案手法の判り易い例を示し，前章で示したアルゴリズムが正しく動作することを確認しよう．まず，一般道路および有料道路のリンク・コスト関数 s_0, s_1 を，以下の BPR 関数を用いて表現する

$$s_k(x) \equiv t_k\left\{1 + \alpha\,(x/\eta_k)^{\beta}\right\}, \forall k \in 0,1 \tag{19}$$

ここで，t_k, η_k は，それぞれ，リンク k の自由走行時間および容量であり，$t_0 > t_1$ かつ $\eta_0 > \eta_1$ とする．α, β はパラメタである．次に，管理者が設定できる料金集合を，c_L(低料金) と c_H(高料金) の 2 つのみとする．最後に，ネットワーク全体に対する需要プロセスを以下の中心回帰過程で表現する．

$$\mathrm{d}q(t) = \lambda\{D(S^*[q(t), c(t)]) - q(t)\}\,\mathrm{d}t + \sigma q(t)\,\mathrm{d}Z_t. \tag{20}$$

ここで，$D : \mathcal{R}_+ \to \mathcal{R}$ は，(潜在的な) OD 交通需要関数であり，均衡 OD 交通費用 S^* の関数として以下のように定義される

$$D(S^*) = \max.[D_0 - \gamma S^*, 0]. \tag{21}$$

γ は定数である．また，λ, σ は所与の定数で，それぞれ，OD 交通需要の (潜在的需要への) 回帰速度，交通需要のボラティリティを表わす．

このような条件を想定し，以下のパラメタをベース・ケースとした数値計算を行った．まず，計画満期，割引率，交通需要の回帰速度およびボラティリティとして，

$$T = 10, \quad \rho = 4\%, \quad \mu = 0.02, \quad \sigma = 20\% \tag{22}$$

を用いた．次に，一般道路および有料道路の自由走行時間および容量として，それぞれ

$$t_0 = 60, \quad \eta_0 = 5, \quad t_1 = 10, \quad \eta_1 = 1 \tag{23}$$

を，BPR 関数のパラメタとして $\alpha = 0.26, \beta = 5$，定常状態を想定したときの OD 交通需要関数の切片および傾きとして，$D_0 = 300, \gamma = 30$ を用いた．最後に，各料金の値と料金変更費用として，以下を用いた．

$$c_L = 2, \quad c_H = 5, \quad I_{L,H} = 10, \quad I_{H,L} = 5. \tag{24}$$

(1) 有料道路事業の価値

まず，管理開始時刻 $t = 0$ において，各料金 c_L, c_H に対応する最適値関数を図 2 に示そう．この図は，横軸に初期交通量 q_0 を，縦軸に $V_L(q_0) \equiv V(t_0, q_0, c_L), V_H(q_0) \equiv V(t_0, q_0, c_H)$ を，それぞれプロットしたものである．ここで，時刻 $t = 0$ における最適値関数は，最適戦略の下で計画期間 $[0, T]$ に

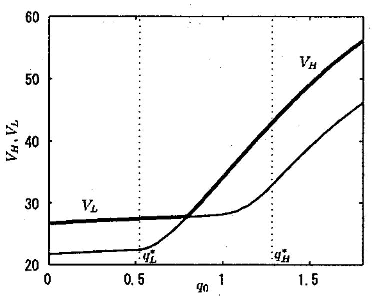

図 2　初期 OD 交通需要 q_0 と事業価値

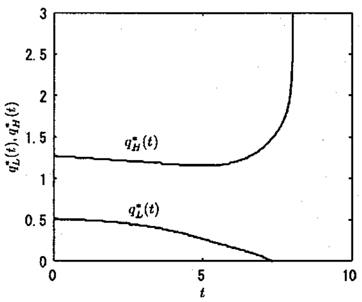

図 3　最適料金更新ルール

獲得するキャッシュフロー流列の期待正味現在価値であったことを想起されたい．これは，V_L, V_H が，それぞれ，初期時点で当該料金を選択したときの有料道路事業の価値を表わすことを意味している．このため，初期料金を自由に選択できる状況では，当該事業の価値は

$$V \equiv \max.\{V_L, V_H\} \tag{25}$$

となる (図 2 の太線).

(2)　最適料金更新ルール

図 2 の q_L^*, q_H^* は，それぞれ，料金の引き下げ／引き上げを行なう OD 交通需要の閾値 (後述) を表わしている．この閾値 q_L^*, q_H^* は，それぞれ，時間に依存して変化する．図 3 は，横軸に時間を取り，縦軸に閾値 $q_L^*(t), q_H^*(t)$ を，それぞれ，プロットしたものであり，最適料金更新ルールを表わしている．具体的には，有料道路管理者は，各時刻において OD 交通量 $q(t)$ を観測し，料金が c_H のときに OD 交通需要が q_L^* を下回っている場合は料金を引き下げ，料金が c_L のときに OD 需要が q_H^* を上回っている場合料金を引き上げることが最適となる．そして，$q_L^* < q(t) < q_H^*$ の場合には，現在の料金を維持することが最適となる．

一般に，本モデルのように，料金更新などの意思決定がサンク・コストを伴う場合，q_L^* と q_H^* は一致しないことが知られている (例えば Dixit[5])．すなわち，高料金のために交通需要が減少し，ひとたび q_L^* を下回って料金が引き下げられた場合，その後に需要が q_L^* 以上まで回復したとしても (更なるサンク・コストを支払って) 料金を再度引き上げるには不十分で，需要が q_H^* となるまで料金引き上げを待たねばならない．

図 3 より，管理期間満期の近く ($t > 8$) では，交通量によらず料金を変更しないことが最適となることが判る．これは，満期が近い場合，料金変更が OD 需要 (ひいては料金収入) に及ぼす効果よりもメニュー・コストの方が大きいことを意味している．

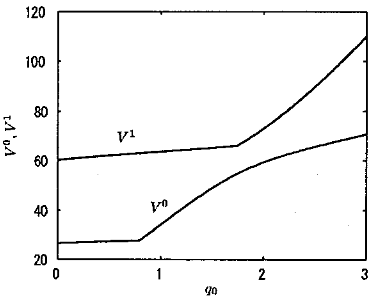

図 4　容量拡張前後の事業価値

(3)　容量拡張投資の効果分析

本手法の利用方法の一つとして，有料道路の容量拡張に対する投資効果分析が挙げられる．例えば，有料道路の容量を，ベース・ケースとして用いた $\eta_1 = 1$ から $\eta_1 = 2$ へ倍増させた場合を考えよう．この時の有料道路事業の価値の変化を図 4 に示す．この図は，横軸に初期時刻での OD 交通需要を，縦軸に容量拡張前の事業価値 V^0 および拡張後の事業価値 V^1 を，それぞれ，プロットしたものである．ただし，ここでの事業価値は，式 (25) で定義されるものである．また，図 5 は横軸に OD 交通量 q_0 を，縦軸に容量拡張による事業価値の増加率 $\frac{V^1-V^0}{V^0}$ をプロットしたものである．図 4, 5 より，有料道路の容量を拡張することで必ず事業価値は増加するが，その増加率は初期 OD 交通需要 q_0 の値によって異なることが判る．特に，ここでは，事業価値の増加率は q_0 について単調ではなく，q_0 が十分に小さい ($q_0 < 0.8$) 場合に増加率が最も高い (120% 前後) ことが判る．これは，有料道路の容量を拡張することで，それまで (混雑のため) 一般道路に迂回していた交通需要を有料道路に誘導し，より多くの料金収入を得られるようになることを意味している．

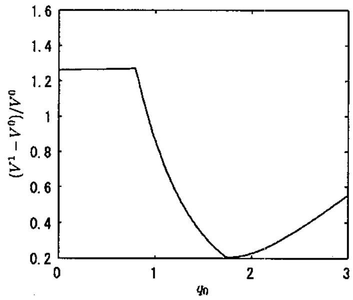

図5　容量拡張による事業価値の変化率

6　おわりに

本研究では，有料道路と一般道路からなるネットワークにおいて，OD 交通需要の (長期的な視点から見たときの) 確率的変動と，各瞬間での利用者均衡状態を明示的に考慮した有料道路料金更新問題を扱うための枠組を示した．具体的には，まず，料金更新問題を確率インパルス制御問題として定式化し，その最適性条件が一般化相補性問題として表現できることを明らかにした．そして，離散的な枠組の下で，この問題がより小規模なサブ問題の解を逐次的に解く問題に帰着することを示し，それを活用した効率的数値計算方法を開発した．

本枠組の拡張方向として，有料道路のみならず一般道路も含めたネットワーク全体の効率性最大化問題が挙げられる．本手法は，有料道路事業の財務的利潤の最大化のみを目的としていたため，高すぎる料金を避けて利用者が一般道へ迂回し混雑が発生することや，その外部不経済を考慮していない．そのため，利潤最大化を目的とした料金制御則は，一般に，ネットワーク全体の効率性を損なう．これは道路公団の民営化や公共事業の PFI 化を議論する上では不可避の問題であり，このような状況下では，政府には，適切な規制を設けることで社会的により望ましい状態 (次善の社会的最適状態) を達成することが望まれる．提案手法は，キャッシュ・フロー流列を表現するのに任意の関数を用いることができるため，こうした社会的最適化問題および最適規制設計問題に対しても応用可能である．ただし，こうした議論を理論的に厳密に扱うためには，動学的枠組における社会便益や消費者余剰についての議論が必要不可欠であり，今後の理論進展が待たれる．

参考文献

1) 棟方章晴, 大嶋孝史, 赤松隆：確率的インパルス制御アプローチによる有料道路料金変更法, 土木計画学研究・講演集, Vol. 26, 2002, CD-ROM.
2) Nagae, T. and Akamatsu, T.: Dynamic revenue management of a toll road project under transportation demand uncertainty, *Networks and Spatial Economics*, forthcoming.
3) Ferris, M. C. and Pang, J.-S. eds.: *Complementarity and Variational Problems: State of the Art*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
4) Peng, J.-M. and Lin, Z.: A non-interior continuation method for generalized linear complementarity problem, *Mathematical Programming*, Vol. 86, pp. 533–563, 1999.
5) Dixit, A. K.: Investment and hysteresis, *Journal of Economic Perspective*, Vol. 6, pp. 107–132, 1992.

交通需要の不確実性を考慮したネットワークの動的有料道路料金更新問題*1

長江剛志*2

本研究では，有料道路と一般道路からなるネットワークにおいて，交通需要の (長期的な計画視野での) 動学不確実性と利用者の混雑回避行動を明示的に考慮した有料道路の料金更新問題に対する分析の枠組を提案する．具体的には，まず，各瞬間において，OD 交通需要を与件とした利用者均衡状態が成立すると仮定する．この枠組下で，有料道路の動的料金更新を確率インパルス制御問題として定式化し，その数理特性—適当な離散的枠組の下で，この問題が一般化相補性問題として記述されるサブ問題を逐次的に解く問題に帰着する—を明らかにする．これを活用した効率的解法を開発し，数値計算例を用いて最適料金戦略の性質を分析する．

Dynamic Revenue Management of Toll Road Projects in Networks under OD Demand Uncertainty*1

Takeshi NAGAE*2

This article proposes a framework for analyzing a dynamic revenue management problem of a toll road project in a network, taking into account total transportation demand uncertainty. In our framework, the toll is switched between several discrete levels depending on the observed transportation demand at each moment, in order to maximize the expected net present value of total revenues from the toll road. We formulate this as a stochastic impulse control problem. We then reveal that this problem reduces to a set of generalized linear complementarity problem in an appropriate discrete framework. This enables us to develop an efficient algorithm.