

プロビット型確率的利用者均衡を適用したマルチモーダル配分による 公共交通評価手法に関する研究*

A Study on Public Transport Evaluation Method Using Multi-modal Traffic Assignment Applied Probit-Based SUE*

内田賢悦**・加賀屋誠一***

By Kenetsu UCHIDA**・Seiichi KAGAYA***

1. はじめに

日本全国の地方都市では、ほぼ例外なく、公共交通の利用促進が都市中心部の交通問題を解決する1つの策であると認識されながら、具体的な対策をとることができない現状にあると考えられる。また、公共交通はその性格から、運営主体からみた効率性としての収益性のみでその存廃を決定されるものではないことから、必要な路線に対しては補助金を投入しても維持する必要がある。ただ、どの路線が必要であるかについては、それを適切にかつ定量的に示す手法が確立されているとは言い難い状況にある。一方、自動車の旅行時間は公共交通であるバスの影響を受け、また、旅行者のバスへの転換は道路ネットワークの混雑緩和に寄与する。したがって、交通ネットワークを考える場合、公共交通の影響も考慮したマルチモーダルネットワークとして捉えるのが適切である。これを踏まえ、先述した公共交通の問題に対応するためには、その運行頻度を制御変数とし、さらにそれに伴う運行コストおよび旅行者の交通機関選択・経路選択の変化を同時に考慮した上で、社会的費用（たとえば、ネットワークの総旅行時間等）の最小化を行うNDP (Network Design Problem) として問題を捉えることが考えられる。

本研究では、プロビット型の確率的利用者均衡 (SUE) を適用した公共交通配分モデルを用い、公共交通に関する運行頻度の最適化問題をNDPとして定式化を行った。さらに、簡単なテストネットワークを対象にした計算例を示している。

2. 既存研究

マルチモーダル配分に関する研究は、1960年代後半から始まり、初期の研究は最小コスト経路探索アルゴリズムに関するものであった^{1)~3)}。こうしたアルゴリズムは、

公共交通のみを対象としているが、後のマルチモーダル配分に関する研究のベースとなっている。Chiriqui and Robillard⁴⁾ は、Attractive Lines (またはCommon Lines) という概念を初めて提案した。Attractive Linesとは、移動時間の期待値を最小化する路線の集合として定義され、線形計画問題を解くことによって得られる。Spiess⁵⁾、Spiess and Florian⁶⁾ は、旅行者の経路選択行動モデルとしてOptimal Strategyという概念を提案している。これはネットワーク表現法を改良した場合のCommon Linesの拡張概念と位置付けられる。

De Cea and Fernandez⁷⁾ は、乗車定員容量の不足に起因する待ち時間に関する遅れを導入し、混雑を表現した公共交通ネットワークを対象にSpiess and Florianが提案した概念の拡張を図っている。Wu et al.⁸⁾ は、公共交通ネットワークを対象に、経路選択行動に確定的利用者均衡 (DUE) を適用した。

交通量配分モデルの発展に伴い、DUEが公共交通配分においても経路選択行動を記述するために適用されるようになってきた。後に、経路選択行動を表現する上で、より現実的なSUEが提案され、次第に公共交通配分にも適用されるようになった。たとえば、Lam et al.⁹⁾ は、路線の乗車定員制約を公共交通配分に導入し、ロジット型SUEをベースとしたモデルを提案している。また、Nielsen¹⁰⁾ は、プロビット型SUEをベースとした公共交通配分のフレームワークを提示した。

こうした流れを踏まえ、自動車交通も統一的に考えるマルチモーダル配分に関する研究が行われるようになった。Fernandez et al.¹¹⁾ は、各交通機関の統合を図ったマルチモーダル配分を交通均衡問題として定式化した。Lo et al.¹²⁾ は、公共交通の乗り換えや運賃の非線形構造を対象とし、ロジット型SUEをベースにマルチモーダル配分を定式化している。

NDPは交通配分モデルから発展してきたが、DUEをベースとしたものが先駆けとなり、SUEへのモデル拡張が図られてきた。Connors et al.¹³⁾ は、DUEベースのNDPをプロビット型SUEへの拡張を図り、自動車の混雑税最適化問題を扱っている。マルチモーダル配分におけるNDPに関する研究として、Gao et al.¹⁴⁾ のDUEをベース

*キーワード 公共交通計画、交通手段選択、配分交通

**正会員 博 (工) 北海道大学大学院工学研究科都市環境工学専攻 (札幌市北区北13条西8丁目, Tel 011-706-6211, Fax 011-706-6211)

***フェロー会員 学博 北海道大学大学院工学研究科都市環境工学専攻 (札幌市北区北13条西8丁目, Tel 011-706-6210, Fax 011-706-6211)

とした公共交通の運行頻度の最適化を行った研究が挙げられる。DUE では、完全情報下での行動を前提とするため、マルチモーダル配分においても SUE への拡張が図られている。一般的に、マルチモーダル配分を考えた場合、自動車とバスは同じ道路スペースを利用することになる。したがって、両者の旅行時間には極めて高い正の相関があり、これが交通機関選択率に影響するため、これを無視することは適切とはいえない。こうした背景から、内田・加賀屋¹⁵⁾は、プロビット型マルチモーダル配分モデルを提案し、これを用いて凍結防止剤最適散布問題を NDP として定式化している。

本研究は、内田・加賀屋¹⁵⁾の研究をベースとし、公共交通の運行頻度設定問題を社会的費用最小化と収益最大化の両面から考えるものである。社会的費用の最小化は、公共の目的関数と捉えられ、収益の最大化は公共交通を運営する主体の目的関数と捉えることができる。本研究では、社会的費用の最小化は一般的に、公共からの補助金投入がなければ成立しないことを示す。また、プロビット型 SUE を対象とした経路選択に関するパラメータ値の推定法として、NDP の考え方を導入した方法を紹介する。

3. マルチモーダル配分モデル¹⁵⁾

(1) ネットワーク表現

交通ネットワークは、道路ネットワークに公共交通ネットワークを加えたハイパーネットワーク $G(N, S)$ で表現されることになる。ここで N, S は、それぞれネットワークを構成するノードとリンクの集合である。この

リンク集合 S には、以下の関係が成立する。

$$S = \bigcup_{m \in \{w, a, b, u\}} S_m$$

S_m : 交通モードが m となるリンクの集合。

m : 交通モードを示す記号 ($m=w$: 歩行, $m=a$: 自動車, $m=b$: バス, $m=u$: 地下鉄)。

本研究では、図-1 上に示すオリジナルネットワークを考えることにする。地下鉄路線 (Line 1) は、ノード $w'-D_2$ 間を直接結んでいる。バス路線 2 (Line 2) は、ノード O_2-y 間を結び、途中ノード x に停車する。バス路線 3 (Line 3) は、ノード O_2-D_2 間を結び、途中ノード x には停車するが、ノード y には停車しない。バス路線 4 (Line 4) は、ノード $x-D_2$ 間を結び、途中ノード y に停車する。このネットワークは、図-1 下に示すハイパーネットワークとして表現される。ハイパーネットワークにおいて公共交通は、Route Section (RS) によって表現される⁴⁾。各 RS には、いくつかの Attractive Lines (AL) が含まれる。ここで AL とは、公共交通を利用して RS 上を移動する際、旅行者が選択する路線の集合であり、移動時間の期待値を最小化する路線の集合として定義されることは前述した。以下では、(2)に示す仮定を設けることで、すべてを RS と解釈し、それらを単にリンクと呼ぶことにする。

(2) 仮定

ハイパーネットワークにおける全てのリンクは、何らかの AL を含んでいると考えることにする。すなわち、マルチモーダルネットワーク上に実在する路線数 (地下鉄、バス等) を L とした場合、自動車リンクと歩行リンクは $L+1$ 番目の仮想路線を含むリンクと考え、その運行頻度および乗車定員容量は無限大であると考え、このことにより、全てのリンクが運行頻度、乗車定員容量両方を持つ公共交通リンクであると仮定できる。自動車や歩行を表現するリンクを対象とした場合、この仮定によって、後述する公共交通の待ち時間や車内混雑に対する不快感の影響をなくすることができる。すなわち、一般性を失うことなく、リンクの交通機関を区別せずにリンク不効用関数を定義することができる。

(3) リンク不効用関数

a) 記号定義

リンク不効用関数の定式化に先立ち、以下にいくつかの記号の説明を示す。

A : $(S \times L + 1)$ 行列であり、その $s (= 1, \dots, S)$ 行 $l (= 1, \dots, L+1)$ 列の要素は a_{sl} で表現され、 a_{sl} はリンク s が路線 l を AL として含む場合 1、そうでない場合に 0 をとる変数である。

$\bar{A}^s$: リンク $s (= 1, \dots, S)$ に含まれる AL の集合。

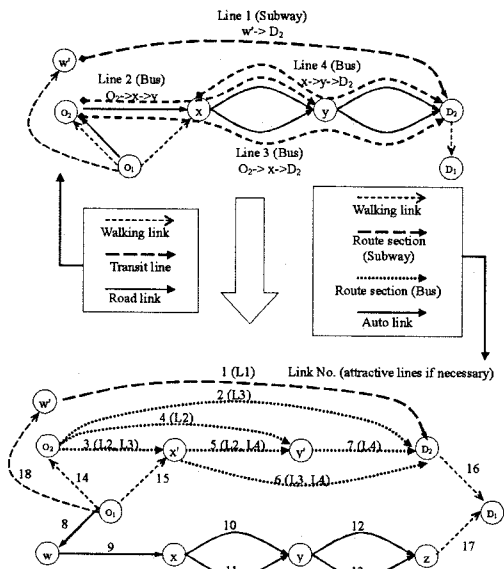


図-1 テストネットワーク

V: サイズが S の列ベクトルであり, その s 番目の要素は V^s で表現され, リンク s の旅行者数を表す.

v: $(S \times L + 1)$ 行列であり, その s 行 l 列の要素は v_l^s で表現され, リンク s 上の AL l を利用する旅行者数を表す ($V^s = \sum_{l \in \bar{A}^s} v_l^s$).

$\tilde{v}_l^s$: v_l^s と同乗する旅行者数であり, 既に路線 l に乗車している人数である.

$\tilde{V}^s$: V^s と同乗する旅行者数であり, $\forall l \in \bar{A}^s$ に既に乗車している人数である ($\tilde{V}^s = \sum_{l \in \bar{A}^s} \tilde{v}_l^s$).

f: サイズが $(L + 1)$ の列ベクトルであり, その l 番目の要素 (f_l) は, AL l の運行頻度 (services/hr) を表す.

κ : サイズが $(L + 1)$ の列ベクトルであり, その l 番目の要素は κ_l で表現され, AL l の 1 サービス当たりの乗車定員容量を表す.

t : サイズが S の列ベクトルであり, その s 番目の要素は t^s で表現され, t^s は $s \in S_b$, かつバスと自動車交通が同じ道路スペースを共有する場合 0, それ以外のとき $\bar{t}^s$ となる変数である. ここで, バス専用レーンがある場合は, 後述の地下鉄に対する考え方を適用すればよい. ただし, $\bar{t}^s$ はリンク s の実旅行時間であり, $s \in S_a$ の場合, 後述する BPR 関数より求められ, $s \in S_u \cup S_w$ の場合は所与の定数となる.

Ω : $(S \times S)$ 行列であり, s 行 s' 列の要素は $\omega_{ss'}$ で表現され, $\omega_{ss'}$ は, リンク s における旅行者の車内混雑度がリンク s' の旅行者数の影響を受ける場合 1, そうでない場合に 0 をとる変数である.

J: $(S \times L + 1)$ 行列であり, その s 行 l 列の要素は j_{sl} で表現され, j_{sl} はリンク s が AL l に関してダイレクトリンク (DL) である場合 1, そうでない場合に 0 をとる変数である. ここで, リンク s 上の AL l を利用する旅行者がその途中で下車できないとき, リンク s は AL l に関して DL であると定義する.

H: $(S \times L + 1)$ 行列であり, その s 行 l 列の要素は h_{sl} で表現され, 以下に示す値をとる変数である.

i) $s \in S_a$ & $l \neq L + 1$ の場合:

$h_{sl} = 1$ オリジナルネットワークにおいて, AL l がリンク s 上を通過するとき.

$h_{sl} = 0$ otherwise.

ii) $s \in S_a \cup S_w$ の場合: $h_{sl(=L+1)} = 1$

特に $s \in S_w$ の場合: $h_{sl(=L+1)} = 0$

iii) $s \in S_b$ の場合: $h_{sl} = 0 \quad \forall l$

iv) $s \in S_u$ の場合: $h_{sl} = a_{sl} \forall l$

E: $(S \times S)$ 行列であり, s 行 s' 列の要素は $e_{ss'}$ で表現され,

i) $s \notin S_b$ の場合:

$e_{ss'} = 1$ if $s = s'$

$e_{ss'} = 0$ otherwise

ii) $s \in S_b$ の場合, $e_{ss'}$ はリンク s の実旅行時間がリンク $s' \in S_a$ 上の旅行者数の影響を受ける場合 1, それ以外に 0 となる変数であり, オリジナルネットワークにおいてバスリンク s が道路リンク s' を共有する場合に 1 をとる.

$\mathbf{1}_S, \mathbf{1}_{L+1}$: それぞれサイズが S および $L + 1$ で全ての要素が 1 となる列ベクトル.

b) 車内混雑を考慮した旅行時間

はじめに, 各リンク上の AL を利用する旅行者数を示す $(S \times L + 1)$ 行列 $\mathbf{v}$ から考えて行くことにする. $\mathbf{v}$ は式 (3.1) で表される.

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{f})) \otimes (\mathbf{P} \mathbf{1}_{L+1}^T) \quad (3.1)$$

where,

$$\text{diag}(\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_{L+1} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \otimes \{ \mathbf{1} \div (\mathbf{A} \mathbf{f}) \} \\ = \begin{pmatrix} V^1 / (\sum_{l \in \bar{A}^1} f_l) \\ \vdots \\ V^S / (\sum_{l \in \bar{A}^S} f_l) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

したがって, $\mathbf{v}$ の s 行 l 列の要素 v_l^s は, リンク s 上の AL l を利用する旅行者数を示し, 式 (3.4) で表される.

$$v_l^s = V^s \left(f_l / \sum_{l' \in \bar{A}^s} f_{l'} \right) \quad (3.4)$$

ここで $\otimes$ は, 行列またはベクトルの乗算を意味し, T は行列またはベクトルの転置操作を意味する. たとえば, $\mathbf{M} \otimes \mathbf{N}$ は, $m_{ij} n_{ij}$ を i 行 j 列の要素とする行列となる. ここで m_{ij}, n_{ij} はそれぞれ, 行列 $\mathbf{M}$ と行列 $\mathbf{N}$ の i 行 j 列の要素を表している. また, $\div$ は行列またはベクトルの除算を表すことにする. たとえば, $\mathbf{M} \div \mathbf{N}$ は, m_{ij} / n_{ij} を i 行 j 列の要素とする行列となる. これらの演算では, $\mathbf{M}$ と $\mathbf{N}$ のサイズは同一か, またはどちらかがスカラーでなければならない.

リンク s 上の AL l の車内に乗車する旅行者数を表現するため, 式 (3.5) で定義される行列 $\mathbf{C}$ を考えよう.

$$\mathbf{C} = (\Omega \mathbf{v}) \otimes \mathbf{A} \quad (3.5)$$

ここで, $\mathbf{C}$ は $(S \times L + 1)$ 行列であり, その s 行 l 列の要素 c_{sl} は式 (3.6) で表され, リンク s 上の AL l の車内に乗車する旅行者数を表す.

$$c_{sl} = v_l^s + \tilde{v}_l^s \quad \forall s, \forall l \quad (3.6)$$

$\tilde{v}_i^s$ は、式(3.7)で表される。

$$\tilde{v}_i^s = \sum_{r \in S_{i(s)}^{L+}} v_r^s + \sum_{r \in S_{i(s)}^L} v_r^s \quad \forall s, \forall i \quad (3.7)$$

ここで、 $i(s), S_{i(s)}^{L+}, S_{i(s)}^L$ はそれぞれ、リンク s の始点ノード、ノード $i(s)$ を始点とし $AL \in \bar{A}^s$ を AL として含む s 以外のリンクの集合、 $l \in \bar{A}^s$ を AL として含み、かつノード $i(s)$ よりも手前のノードを始点、ノード $i(s)$ 以降のノードを終点とするリンクの集合である。次に、リンク s 上の AL に関する車内混雑を表現するため、行関数 $\mathbf{G}$ を式(3.8)で定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{G} \left[\mathbf{C} \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{K}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T \right] & \mid \beta_1 > 0, \gamma_1 > 0 \\ &= \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1L+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{S1} & \cdots & G_{SL+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta_1 (g_{11})^{\gamma_1} & \cdots & \beta_1 (g_{1L+1})^{\gamma_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1 (g_{S1})^{\gamma_1} & \cdots & \beta_1 (g_{SL+1})^{\gamma_1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.8)$$

g_{sl} は $\mathbf{C} \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{K}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T$ の s 行 l 列の要素であり、リンク s 上の AL に関する車内混雑度である (式(3.9))。

$$g_{sl} = (v_i^s + \tilde{v}_i^s) / (f_l \kappa_l) \quad (3.9)$$

次に、それぞれ式(3.10)、式(3.11)で定義される $(S \times L + 1)$ 行列を考えよう。

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{E}^T (\mathbf{G} \otimes \mathbf{J})\} \otimes \mathbf{H} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{E}^T \mathbf{J}) \otimes \mathbf{H} \quad (3.11)$$

ここで、 $\mathbf{Z}$ の s 行 l 列の要素を z_{sl} と表現すると、 z_{sl} は、 AL がリンク $s \in S_b$ の AL である場合 G_{sl} 、それ以外の場合 0 となる変数である。ただし、 $\{s', l'\}$ は、以下に示す 2 つの条件を同時に満たすリンクと AL の組である。

- 1) リンク $s \in S_b$ の実旅行時間はリンク $s' \in S_a$ の実旅行時間の影響を受け ($s' \in S_a$ の実旅行時間と同一または、 $s' \in S_a$ を含むいくつかの自動車リンクの実旅行時間の和となる)、かつ
- 2) リンク s' は、路線 l' に関して DL である。

すなわち z_{sl} は、リンク s 上の AL l に関する車内混雑を示す指数であり、歩行者リンクおよび自動車リンクに関しては、その定義より 0 となる。一方、 $\mathbf{X}$ の s 行 l 列の要素を x_{sl} と表現すると、 x_{sl} は、リンク $s \in S_b$ が路線 l に関して DL である場合 1、それ以外の場合 0 となる変数である。このとき、 $(S \times S)$ 行列 $\tilde{\mathbf{t}}$ を式(3.12)で定義すると、 $(S \times L + 1)$ 認知旅行時間行列 $\tilde{\mathbf{t}}$ は式(3.13)で表される。

$$\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{E} \text{diag}(\mathbf{t}^*) \quad (3.12)$$

$$\tilde{\mathbf{t}} = \{\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{X} + \mathbf{Z})\} \otimes \mathbf{A} \quad (3.13)$$

ここで、 $\tilde{\mathbf{t}}$ の s 行 l 列の要素を $\tilde{t}_l^s$ とすると、 $\tilde{t}_l^s$ はリンク s 上の AL l を利用した場合の認知旅行時間を表している (式(3.14))。

$$\begin{aligned} \tilde{t}_l^s &= \left(\sum_{s' \in \theta(s, l)} \tilde{t}_l^{s'} \right) (1 + z_{sl}) \\ &= \left(\sum_{s' \in \theta(s, l)} \tilde{t}_l^{s'} \right) \left\{ 1 + \beta_1 \left(\frac{v_i^s + \tilde{v}_i^s}{f_l \kappa_l} \right)^{\gamma_1} \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

ここで $\theta(s, l)$ は、リンク s 上の AL $l \in \bar{A}^s$ に含まれ、隣接する 2 つの乗換ノード間を結ぶ路線 l に関する DL の集合である。すなわち、認知旅行時間は実旅行時間に車内混雑による不快感の影響を採り入れた形式となっている^{10), 11)}。最終的に、リンクの認知旅行時間ベクトル $\hat{\mathbf{t}}$ は式(3.15)で表され、その s 番目の要素 ($\hat{t}^s$) がリンク s の認知旅行時間を示している (式(3.16))。

$$\hat{\mathbf{t}} = \{(\tilde{\mathbf{t}}\mathbf{f}) \otimes \{\mathbf{I} + (\mathbf{A}\mathbf{f})\}\}^T \quad (3.15)$$

$$\hat{t}^s = \left(\sum_{l \in \bar{A}^s} \tilde{t}_l^s f_l \right) / \sum_{l \in \bar{A}^s} f_l \quad (3.16)$$

一方、リンク $s \in S_a$ の実旅行時間は、BPR 型関数を想定すると式(3.17)で表される。

$$\tilde{t}^s = t^s \left[1 + \beta^s \left\{ \left(\sum_{l' \in \psi(s)} f_{l'} E_b + V_{pcu}^s \right) / K^s \right\}^{\gamma^s} \right] \quad (3.17)$$

where,

$$V_{pcu}^s = \frac{V^s}{O_a} E_a \quad \forall s \in S_a \quad (3.18)$$

t^s : リンク $s \in S_a$ の自由走行時間 (min).

K^s : リンク $s \in S_a$ の交通容量 (pcu/hr).

$\psi(s)$: オリジナルネットワークにおいて、リンク $s \in S_a$ 上を通過するバス路線の集合。

O_a : 自動車の平均乗車人数 (passengers / auto).

E_a : 自動車の乗用車換算係数。

E_b : バスの乗用車換算係数。

β^s, γ^s : パラメータ。

また、リンク $s \in S_u \cup S_w$ と $s \in S_b$ の実旅行時間はそれぞれ、所与の定数、対応する自動車リンク (経路) の実旅行時間として表現される。一方、自動車の旅行時間は、

バスの混入率だけでなく、バスがバス停に停車することによる遅れの影響を受けると考えられる。マクロ的に捉えると、リンク $s \in S_a$ に関する遅れを g^s は、自動車リンク $s \in S_a$ を通過するバス路線における運行頻度の和に関する増加関数として表現可能であり、式(3.17)に式(3.17a)に示す項を加えることで対応できる。

$$g^s = g \left(\sum_{l \in \psi(s)} f_l \right) \quad \forall s \in S_a \quad (3.17a)$$

ここで関数 $g(\cdot)$ は、その引数に関する増加関数である。

c) 期待待ち時間

公共交通のサービスに関する混雑を表現するため、サイズが S の列ベクトル関数 Q を式(3.19)で定義する。

$$\begin{aligned} & Q[(C1_{L+1}) \otimes \{1 + (\text{Adiag}(f) \kappa)\} | \beta_2, \gamma_2] \\ &= (Q^1 \quad \dots \quad Q^S)^T \\ &= (\beta_2 (q^1)^{\gamma_2} \quad \dots \quad \beta_2 (q^S)^{\gamma_2})^T \end{aligned} \quad (3.19)$$

ここで、 q^s はサイズが S の列ベクトル $(C1_{L+1}) \otimes \{1 + (\text{Adiag}(f) \kappa)\}$ の s 番目の要素であり、リンク s を構成するALのサービス混雑度を表し、式(3.20)で表される。

$$q^s = \frac{V^s + \tilde{V}^s}{\sum_{l \in A^s} f_l \kappa_l} \quad \forall s \quad (3.20)$$

このとき、待ち時間ベクトル w は式(3.21)で表され、その s 番目の要素は式(3.22)で表される。

$$w = 60 \otimes \{1 + (Af)\} + Q(\min) \quad (3.21)$$

$$w^s = \frac{60}{\sum_{l \in A^s} f_l} + \beta_2 \left(\frac{V^s + \tilde{V}^s}{\sum_{l \in A^s} f_l \kappa_l} \right)^{\gamma_2} \quad \forall s \quad (3.22)$$

式(3.22)右辺第一項は、旅行者の到着分布を一様分布、サービスの到着間隔を $1/\sum_{l \in A^s} f_l$ とした指数分布を仮定した場合の平均待ち時間を示している⁷⁾。リンク $s \in S_b \cup S_u$ を考えたとき、交通機関が到着しても満員である場合、次の到着を待つ必要がある。すなわち式(3.22)右辺第二項はこうしたサービス容量に起因する待ち時間を示し⁷⁾、歩行者リンクおよび自動車リンクに関しては、その定義より待ち時間は0となる。

d) リンク不効用

以上の準備のもと、リンク不効用ベクトル d は式(3.23)で表され、その s 番目の要素は、その交通モードを m とした場合、式(3.24)で表される。

$$d = \pi \otimes \hat{t} + \rho \otimes w + \tau \otimes p \quad (3.23)$$

$$d^s = \pi^m \hat{t}^s + \rho^m w^s + \tau^m p^s \quad \forall s \quad (3.24)$$

ここで p は料金ベクトルである。また π, ρ, τ はそれぞれ、認知旅行時間ベクトル、待ち時間ベクトル、料金ベクトルに関する係数ベクトルである。配分モデルでは、同乗旅行者数 v_i^s の関数となるリンク不効用によって、後述のインターモーダル経路に関する不効用が構成され、これとプロビット型SUEによって、交通機関選択、自動車交通については経路選択が同時に決定される。すなわち、交通機関選択を生内化したモデル構成となっている。

4. プロビット型マルチモーダル配分

(1) プロビット型モデル

3. (3)で示したリンク不効用を用いると、ODペア rs 間における k 番目の(インターモーダル)経路に関する不効用 du_k^{rs} は、式(4.1)で表される。

$$du_k^{rs} = \sum_{m \in \{w, a, b, u\}} \alpha^m \zeta_{s,k}^{rs} + \sum_{s \in S} d^s \delta_{s,k}^{rs} \quad \forall k, \forall rs \quad (4.1)$$

α^m : 交通モード m に特有の定数。

$\zeta_{s,k}^{rs}$: ODペア rs 間の k 番目の経路に交通モードが m となるリンク $s \in S$ が1本以上含まれていれば1、そうでなければ0をとる変数。

$\delta_{s,k}^{rs}$: ODペア rs 間の k 番目の経路にリンク $s \in S$ が含まれていれば1、そうでなければ0をとる変数。

このとき、プロビット型SUEは式(4.2)に示す不動点問題として定式化できる。

$$q_k^{rs} = \hat{q}_{rs} P_k^{rs}(du(q)) \quad \forall k, \forall rs \quad (4.2)$$

where,

$$P_k^{rs} = \Pr(du_k^{rs} + \varepsilon_k^{rs} \leq du_j^{rs} + \varepsilon_j^{rs} \quad \forall j \neq k) \quad \forall k, \forall rs \quad (4.3)$$

$$\sum_k q_k^{rs} = \hat{q}_{rs} \quad \forall rs \quad (4.4)$$

$\hat{q}_{rs}$: ODペア rs 間の需要交通量であり、旅行者数として表される。

q : 経路フローベクトル。

q_k^{rs} : ODペア rs 間の k 番目経路を利用する旅行者数。

$\Pr()$: 括弧内の条件を満たす確率を表す。

ここで ε_k^{rs} ($\forall k, \forall rs$) は、多項正規分布に従うランダム項である。ここで、経路フローとリンクフローには式(4.5)に示す関係が成立するため、式(4.2)は式(4.6)としても表現可能である。

$$V^s = \sum_{rs} \sum_k q_k^{rs} \delta_{s,k}^{rs} \quad \forall s \quad (4.5)$$

$$q_k^{rs} = \hat{q}_{rs} P_k^{rs} (\mathbf{du}(\mathbf{V} | \Delta^{rs})) \quad \forall k, \forall rs \quad (4.6)$$

ここで、 Δ^{rs} は、OD ペア rs に関する経路-リンクインシデント行列であり、 s 行 k 列の要素が $\delta_{s,k}^{rs}$ となる。

(2) 均衡解の一意性の検討

リンク不効用関数のヤコビアン行列が正定値行列であれば、均衡解は一意的である。ヤコビアン行列が正定値行列であるための十分条件は、式(4.7)で与えられる¹⁶⁾。

$$\frac{\partial d^s}{\partial V^s} > \frac{\partial d^s}{\partial V^{s'}} \quad \text{for } \forall s' (\neq s) \in S \quad (4.7)$$

3. (3) で示したリンク不効用関数を対象とした場合、式(4.7)に示した条件は一般的には満たさない。そのため、複数の均衡解が存在する可能性は否定できない。このことは、後述の NDP 問題に関しても複数の解が存在する可能性を意味する。

5. 公共交通運行頻度の最適化問題

(1) 定式化

マルチモーダルネットワークを対象とした NDP¹⁴⁾ を参考によると、公共交通の運行頻度最適化問題は、以下に示す Implicit Program¹³⁾ として表現できる。

$$\min Z_f^S = \mathbf{d}(\mathbf{V}^*(\mathbf{f}), \mathbf{f})^T \mathbf{V}^*(\mathbf{f}) + \theta \otimes \mathbf{F}^T \mathbf{f} \quad (5.1)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{f} \geq \mathbf{1} \quad (5.2)$$

$$\text{where } \mathbf{V}^*(\mathbf{f}) \equiv \Phi(\mathbf{f}). \quad (5.3)$$

θ : 運行頻度の設定に伴う費用を不効用に変換するパラメータ値。

$\mathbf{d}$: リンクに関する不効用ベクトル $(\dots, d^s, \dots)^T$ 。

$\mathbf{V}^*$: 均衡リンクフローベクトル $(\dots, V^{rs}, \dots)^T$ 。

$\mathbf{f}$: ALI の運行頻度を表すベクトル $(\dots, f_i, \dots)^T$ 。

$\mathbf{F}$: ALI の運行頻度を 1 単位増やすために必要となる費用を表すベクトル $(\dots, F_i, \dots)^T$ 。

Φ : 運行頻度ベクトルに対する実行可能なリンクフローを与える $\Re_+^{|I|} \rightarrow \Re_+^{|V|}$ の写像であり、式(4.2)に示した不動点問題と式(4.5)の関係から定義される。

上位問題としては、公共交通の運行頻度を制御変数としてネットワーク全体の不効用を最小化し、下位問題として、プロビット型 SUE を想定している。ここで、リンクフローベクトル $\mathbf{V}$ は、運行頻度ベクトル $\mathbf{f}$ の関数として表現されていることに注意が必要である。

一方、運営会社は収益を最大化する行動をとることが考えられる。その場合、式(5.1)に示した目的関数は、式(5.1a)で置き換えることができる。

$$\max Z_f^P = \exp\left\{\mu \cdot (\mathbf{V}^*(\mathbf{f})^T \mathbf{p} - \mathbf{F}^T \mathbf{f})\right\} \quad (5.1a)$$

s.t. (5.2) and (5.3).

μ : 正のスケールパラメータ。

ただし、式(5.1a)では次節に示すアルゴリズムを適用するため、目的関数は収益をスケール調整し、さらに指数変換したものを用いている。次節に示すアルゴリズムでは、均衡フローを運行頻度により線形近似した変数を用いた補助問題を後述の SQP に繰り返し解き、解を収束させる。式(5.1a)右辺の $\exp\{\}$ 内の関数を考えると、その補助問題は運行頻度の線形関数として表現され、SQP を適用できない。これが上述の変換を施した理由である。

(2) 解法

ここでは、Clark and Watling¹⁷⁾ によるプロビット型 SUE の感度分析法に基づいた解法を示す。はじめに、任意の運行頻度ベクトルを $\mathbf{f}$ で表すことにし、それを所与として得られる均衡フローベクトルを $\mathbf{V}^*(\mathbf{f})$ で表すことにする。このとき、式(5.4)に示す関係が成立する。

$$\mathbf{V}^*(\mathbf{f}) - \mathbf{p}(\mathbf{d}(\mathbf{V}^*(\mathbf{f}), \mathbf{f})) \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

ここで $\mathbf{p}$ はリンク選択確率行列 ($S \times rs$) であり、その rs 列目のベクトルを $\mathbf{p}_{rs}$ と表現すると、式(5.5)で表される。

$$\mathbf{p}_{rs} = \Delta^{rs} \mathbf{P}^{rs} \quad (5.5)$$

ここで $\mathbf{P}^{rs}$ は、OD ペア rs に関する経路選択確率列ベクトルである。ここで、式(5.6)で定義されるベクトル関数を考える。

$$\Psi(\mathbf{V}, \mathbf{f}) \equiv \mathbf{V} - \mathbf{p}(\mathbf{d}(\mathbf{V}, \mathbf{f})) \hat{\mathbf{q}} \quad (5.6)$$

関係する関数が（ここでは変数とみなされる） $\mathbf{f}$ に関して微分可能であることを仮定すると、 $(\mathbf{V}, \mathbf{f}) = (\mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0), \mathbf{f}_0)$ の近傍における $\Psi(\mathbf{V}, \mathbf{f})$ の一次のテーラー展開は式(5.7)で表される。

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{V}, \mathbf{f}) &\approx \Psi(\mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0), \mathbf{f}_0) + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{V}} \Big|_{(\mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0), \mathbf{f}_0)} (\mathbf{V} - \mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0)) \\ &\quad + \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{f}} \Big|_{(\mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0), \mathbf{f}_0)} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \end{aligned} \quad (5.7)$$

ここで 2 つの微分項はそれぞれ、 $(\mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0), \mathbf{f}_0)$ で評価される $\mathbf{V}$ と $\mathbf{f}$ に関する Ψ のヤコビアン行列であり、以下ではそれぞれ $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ で表現することにする。 $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ の具体的なフォームに関しては、Bell and Iida¹⁸⁾ を参照されたい。このとき $\mathbf{V}^*(\mathbf{f})$ は、式(5.8)で近似される。

$$\mathbf{V}^*(\mathbf{f}) \approx \mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0) - \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2 (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \quad (5.8)$$

したがって、式(5.9)に示す関係が成立する。

$$\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{f}} \approx \frac{\mathbf{V}^*(\mathbf{f}) - \mathbf{V}^*(\mathbf{f}_0)}{\mathbf{f} - \mathbf{f}_0} = -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2 \quad (5.9)$$

式(5.9)に示したヤコビアン行列 ($\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2$) を得るためには、経路選択確率のヤコビアン行列 ($\partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{du}$) を求める必要があるが、これに関しては Daganzo¹⁹⁾が提案する方法を適用すると求めることができる。

以上の準備のもと、式(5.1)で示される目的関数の $\mathbf{f}$ に関する勾配ベクトル ($S \times 1$) を計算すると、式(5.10)で表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial \mathbf{f}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{f}} \right)^T \mathbf{V}^* + \left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{f}} \right)^T \mathbf{d} + \theta \otimes \mathbf{F} \\ &= \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{f}} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{f}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{V}^*} \right) \right\} \mathbf{V}^* \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{V}^*}{\partial \mathbf{f}} \right)^T \mathbf{d} + \theta \otimes \mathbf{F} \end{aligned} \quad (5.10)$$

where,

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{f}} = \pi \otimes \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \mathbf{f}} + \rho \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{f}} \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{V}} = \pi \otimes \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \mathbf{V}} + \rho \otimes \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{V}} \quad (5.12)$$

これまで、行列を用いた定式化を行ってきたが、その理由は上記のヤコビアン行列計算を容易にするためである。行列計算を用いずに上記のヤコビアンベクトルを計算するためには、煩雑な作業が必要となることは容易に予想される（ヤコビアンの計算に必要な行列式の求め方を付録 A に示す）。こうして得られる目的関数の勾配情報を用いると、標準的な非線形最適化問題のアルゴリズムを適用して最適運行頻度を得ることができる¹³⁾。これに対し、以下では近似変数によって構成される補助問題を SQP (Sequential Quadratic Programming)¹³⁾ により繰り返し解くことによって、解を求めるアルゴリズムを示す。

Step 0: $k=0$ とし、任意の実行可能な運行頻度ベクトル ($\mathbf{f}_0$) を初期値として与える。この初期実行可能解の与え方によって、収束速度が変化すると考えられる。ここでは、現実的に許容できる範囲内で与えることが望ましい。たとえば、60[service/hr.]というような現実的に不可能であるような初期値は、最適値からの乖離が大きいと考えられるため、収束を考えると望ましくはない。

Step 1: 現在の運行頻度ベクトルベクトルに ($\mathbf{f}_k$) に対応する均衡フロー ($\mathbf{V}_k^*(\mathbf{f}_k)$) をマルチモーダル配分より求める。この均衡フローは MSA (Method of Successive Average)¹⁶⁾ を適用することで得られる。

Step 2: $k = k + 1$ として、式(5.8)で示される線形近似さ

れるリンクフローベクトルを式(5.1)に代入して得られる補助問題を解く。ここでは、SQP を適用すればよい。ここで得られる運行頻度ベクトルは $\mathbf{f}_k$ で表現される。

Step 3: $\max |\mathbf{f}_k - \mathbf{f}_{k-1}| \leq \varepsilon$ であれば終了。そうでなければ、Step 1 へ。ここで、 ε は収束半径を示す所与の定数である。

6. パラメータ推計

ここでは、経路選択に関係するパラメータ値の推計法として、NDP の考え方を適用した方法を示す。道路の旅行時間を示す BPR 関数に関係するパラメータ値は、道路区間の特性によって推計できる。また、式(3.23)で時間と費用の等価性を仮定して $\pi = 1$, $\rho = 1$ とした場合、運行頻度の設定に伴う費用を不効用に変換するパラメータ値 θ および料金ベクトルに関するパラメータベクトル τ については、時間価値の逆数と解釈され、これについても別途推計できると考えられる。したがって、それ以外のパラメータ値を推計する必要がある。

上述のパラメータベクトルを $\mathbf{n}$ と表現しよう。また、マルチモーダルネットワークにおける OD 交通量と各リンクの交通量は観測済みであると仮定する。このとき、パラメータベクトル $\mathbf{n}$ を推定する問題は、たとえば以下のように定式化できる。

$$\min Z_n = \sum_s (V_o^s - V^{*s})^2 \quad (6.1)$$

$$\text{s.t. } \mathbf{n} \geq 0 \quad (6.2)$$

$$\text{where } \mathbf{V}^*(\mathbf{n}) \equiv \Phi(\mathbf{n}). \quad (6.3)$$

V_o^s : リンク s の観測交通量。

上記は、観測交通量と推計交通量の差の二乗和を最小化するパラメータベクトル $\mathbf{n}$ を推計する問題であり、式(6.3)は、式(5.3)に示した $\mathbf{f}$ を $\mathbf{n}$ に置き換えた写像となる。

7. 計算例

ここでは、図-1 に示す仮想ネットワークを対象に行った計算例を示すことにする。表-1、表-2 にそれぞれネットワークのリンク特性、路線特性を示す。また、費用を不効用に変換するパラメータ値は $\theta = 1.0$ と仮定した。OD ペア O_1-D_1 間の旅行者 (1,000[人/時]) は、自動車を利用するか、地下鉄駅またはバス停まで歩行し、そこで公共交通を利用して目的地に到達することができる。一方、OD ペア O_2-D_2 間の旅行者 (5,000[人/時]) は、バスのみを利用可能であり、自動車を保有してなく、さらに地下鉄も利用できないものと仮定した。

図-2 は、地下鉄 (Line 1) とバス路線 3 (Line 3) の運行頻度 (services/hr) を変化させた場合の OD ペア O_1-D_1 間の旅行者を対象とした交通機関分担率を示している (OD

ペア O_2 - D_2 間の旅行者を対象とした場合、この旅行者はバス交通のみが利用可能と仮定しているため、バスの分担率は常に 100%となる。この図から、地下鉄の運行頻度を増やした場合、その平均待ち時間が短縮され、その結果、地下鉄の分担率が上昇したことがわかる。一方、バス路線 3 の運行頻度を増やしても、バスの分担率の向上はほとんどない。これは、バスネットワークは既に OD ペア O_2 - D_2 間の旅行者により混雑しているためである。

図-3 は、地下鉄 (Line1) とバス路線 3 (Line3) の運行頻度を变化させた場合の式(5.1)に示した目的関数の変化を示している。ここで、運行頻度変更に伴うコストベクトル F は、 $F = (50, 20, 40, 20, 0)^T \times 10^3$ と設定した。ここで、5 番目の要素は仮想路線に対するものであり、計算結果には影響しない。この図からわかるように、上位問題の目的関数は Line2 と Line4 を固定した場合に限り、その他の運行頻度に関して凸関数となっていると推測される。

図-4 は、式(5.1)に示した目的関数の等高線と解の探索過程を示している。この図から、繰り返し数が 3 回ほどで最適解が得られることがわかる。この場合、最適運行頻度は、 $(f_1, f_3) = (14.85, 11.66)$ となり、このときの目的関数の値は 2.2697×10^6 と算出された。また、OD ペア O_1 - D_1 間の旅行者における交通機関分担率は、地下鉄、バス、自動車それぞれ、50%、5%、45%となった。先述した理由から、バスの分担率は低い値となっている。

式(5.1)を対象に、4 つの路線すべての運行頻度の最適化を行った結果、最適運行頻度は、 $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (12.57, 16.37, 1.00, 20.11)$ と算出され、このときの目的関数の値は 2.2295×10^6 となった。また、OD ペア O_1 - D_1 間の旅行者における交通機関分担率は、地下鉄、バス、自動車それぞれ、47%、10%、43%となった。ただし、ここで得られた解は、4 章で示した理由から一意的である保証はない。しかしながら、ここで示した結果により、公共交通の運行頻度の設定に対して、交通機関選択・経路選択がどのように変化し、その結果どのような交通状況が生じ得るかについての検討が可能となる。こうした検討は、交通計画を立てる上での基礎となると考えられる。一方、バス路線 3 の運行頻度が 1.00 と計算されたことに注意されたい。これは、制約条件(5.2)で運行頻度の最小値 (1.00) を踏まえると、実質的にはネットワークの総不効用を最小化する上で必要がない路線と評価された結果といえる。

これは、運行頻度設定に伴う費用が他のバス路線より高く、バス路線 3 を廃止し、バス路線 2 と 4 を運行する方が社会的に効率であると判断されたことによる。

式(5.1a)に示した問題を対象に、上述の路線を用いて解いた場合、最適運行頻度はそれぞれ、 $(f_1, f_3) = (1.00, 1.00)$ 、 $(f_1, f_2, f_3, f_4) = (1.00, 1.00, 1.00, 3.50)$ と算出された。ただし、これらの結果は、旅行者が運行頻度によって交通行動の中止や、目的地変更を行わないと仮定して計算したものである。また、バスのみが利用可能な OD ペア O_2 - D_2 間の旅行者は、その運行頻度に関わらずバスを利用することは先述の通りである。すべての路線を考える場合、地下鉄路線 (路線 1) は利用者数に比べて運営費用が高く、またバス路線 2 および 3 に関しては、OD ペア O_2 - D_2 間の旅行者が主に利用するため、それらの運行頻度を増やすことは効率的ではない。したがって、主に OD ペア O_1 - D_1 間の旅行者に利用されるバス路線 4 のみの運行頻度が 1 より大きな値と計算された。

以上の分析結果は、公共交通の運営主体が自己の収益を最大化するように運行頻度を決定した場合、その結果として得られる交通状況は、社会的に最も望ましいと考えられる社会的費用 (総不効用) が最小化される状況と全く異なることを示している。そこで、社会的費用を最小化する施策の検討が必要となる。その 1 つとして、公共からの補助金投入が挙げられる。各公共交通リンクにおいて式(7.1)で表される Δp^i に相当する金額を公共側から運営主体に補助金として支払う場合、社会的費用が最小化されることになる。

表-1 ハイパーネットワークのリンク特性

リンク	モード	料金: p^i (円)	自由旅行時間: t^i (分)	道路容量: K^m (pcu/時)	パラメータ(自動車): β^{**}, γ^{**}
1	地下鉄	200	10		
2	バス	190	15		
3	バス	150	5		
4	バス	170	10		
5	バス	150	5		
6	バス	170	10		
7	バス	150	5		
8	自動車		5	1000	1, 2
9	自動車		5	1000	1, 2
10	自動車		5	1000	1, 2
11	自動車		5	1000	1, 2
12	自動車		5	1000	1, 2
13	自動車		5	1000	1, 2
14	歩行		3		
15	歩行		3		
16	歩行		3		
17	歩行		3		
18	歩行		3		

表-2 ハイパーネットワークの路線特性

路線	モード	運行頻度: f_i (サービス/時)	車両容量: κ_i (人/サービス)	モード定数: α^m	リンク不効用のパラメータ 値: π^m, ρ^m, τ^m	待ち時間に関するパラ メータ値: β_2, γ_2	車内混雑による不快に関す るパラメータ値: β_1, γ_1
1	地下鉄		100	10	1, 1, 0.02	2, 3	2, 3
2	バス	5	50	20	1, 1, 0.02	2, 3	2, 3
3	バス		50	20	1, 1, 0.02	2, 3	2, 3
4	バス	5	50	20	1, 1, 0.02	2, 3	2, 3
5	自動車	∞	∞	50	1, 1, 0.02		
5	歩行	∞	∞	5	1, 1, 0.02		

$$\Delta p^s = \frac{-\pi \hat{t}^s V^s - \rho w^s V^s + (1-\theta) \mathbf{F}^T \mathbf{f}}{V^s (1+\tau)} - p^s \quad \forall s \in S_b \cup S_u \quad (7.1)$$

このことは、式(7.1)右辺第一項を p^s とみなし、式(5.1a)に代入すると、式(5.1)と等価な目的関数が得られることから確認できる。

8. まとめ

本研究では、プロビット型 SUE によるマルチモーダル配分を適用し、公共交通の最適運行頻度設定問題を NDP として定式化した。また、仮想ネットワークを対象とした解析結果も示した。公共交通機関は運営主体の収益性のみでその存廃が議論されるべきものでなく、社会的に必要と判断される路線には補助金を投入しても維持する必要がある。本研究で示した方法は、不採算路線に対する補助金投入の妥当性検討において必要な 1 つの判断材料を提供できるものと考えられる。

ここでは、すべての路線が同じ主体によって運営されており、社会的最適性の観点から、運行頻度の最適化を行った。しかし、それぞれ主体が異なる場合、それぞれに採算性に関する異なる目的関数（利得関数）を持ち、運行頻度や運賃の設定を戦略とした、ゲーム問題として記述されることになる。こういった分析を今後行っていく必要がある。また、各種パラメータ値の測定および実ネットワークを対象とした配分計算も行う所存である。

ネットワーク特性の微小変化（たとえば、工事による道路区間の一時的閉塞等）が交通均衡の状態を変化させ、その微小変化の解消後に発現する交通状況が元の状況と異なることがある。この例は、現実には交通均衡が複数個存在する可能性を示すものである。したがって、解の一意性が保証されない交通モデル自体に問題があると考えるのは適切ではない。交通均衡が複数存在するような場合、ネットワーク変数の変化のさせ方によって、より望ましい状況へ誘導できる可能性がある。本研究で示した NDP の考え方は、こうした検討を可能とするものと考えられ、これについても今後行っていきたい。

付録 A

式(5.11)の $\partial \hat{\mathbf{t}} / \partial \mathbf{f}$ は、 $(S \times L + 1)$ の行列であり、その l ($l \neq L + 1$) 列目のベクトルは、(A.1)で表される。ただし、 $L + 1$ 列目のベクトルは、全ての要素が 0 となる。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{f}_l} = \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{f}_l} \mathbf{f} + \hat{\mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{f}_l} \right) \otimes \{ \mathbf{1} + (\mathbf{A} \mathbf{f}) \} + (\hat{\mathbf{t}} \mathbf{f}) \otimes \frac{\partial \{ \mathbf{1} + (\mathbf{A} \mathbf{f}) \}}{\partial \mathbf{f}_l} \quad (\text{A.1})$$

ここで、以下の関係が成立する。

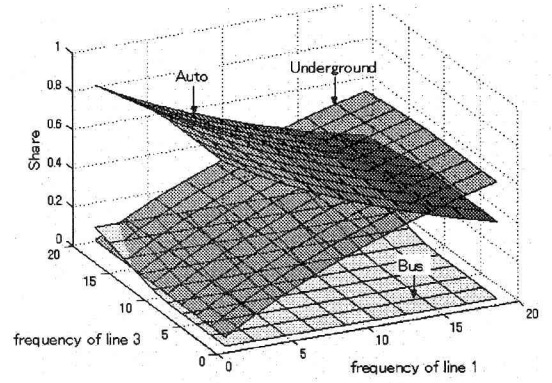


図-2 交通機関分担率の変化

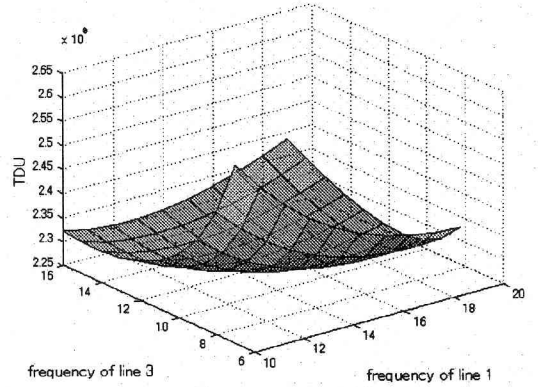


図-3 上位問題の目的関数

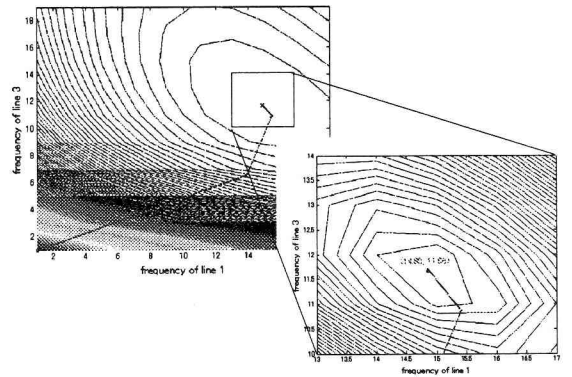


図-4 解の探索過程

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{f}_l} = \left\{ \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{f}_l} (\mathbf{Z} + \mathbf{X}) \right\} \otimes \mathbf{A} + \left(\hat{\mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{f}_l} \right) \otimes \mathbf{A} \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \{ \mathbf{1} + (\mathbf{A} \mathbf{f}) \}}{\partial \mathbf{f}_l} = \mathbf{A}(:, l) \otimes [-1 + \{ (\mathbf{A} \mathbf{f}) \otimes (\mathbf{A} \mathbf{f}) \}] \quad (\text{A.3})$$

$\mathbf{A}(:, l)$ は行列 $\mathbf{A}$ の l 列目となるベクトルである。一方、 $\partial \hat{\mathbf{t}} / \partial \mathbf{f}_l$ はサイズが $L + 1$ の列ベクトルであり、 l 番目の要素が 1、それ以外の要素は 0 をとる。式(A.2)内の $\partial \hat{\mathbf{t}} / \partial \mathbf{f}_l$ は、式(A.4)で表される。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial f_i} = \mathbf{E} \frac{\partial \{\text{diag}(\mathbf{t}^*)\}}{\partial f_i} \quad (\text{A.4})$$

ここで、 $\partial \{\text{diag}(\mathbf{t}^*)\} / \partial f_i$ は、 $(S \times L + 1)$ の行列であり、その s 行 l ($l \neq L + 1$) 列目の要素は、式(A.5)で表される。ここで、 s 行 $L + 1$ 列目の要素はすべて 0 である。

$$\frac{\partial \bar{t}^s}{\partial f_i} = h_{sl} t^s \beta^s \gamma^s \left(\frac{E_b}{K^s} \right) \left(\frac{V_{pcu}^s}{K^s} \right)^{\gamma^s - 1} \quad (\text{A.5})$$

また、式(A.2)内の $\partial \mathbf{Z} / \partial f_i$ は、式(A.6)で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial f_i} = \left\{ \mathbf{E}^T \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial f_i} \otimes \mathbf{J} \right) \right\} \otimes \mathbf{H} \quad (\text{A.6})$$

ここで、以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial f_i} = & \mathbf{G} \left[\mathbf{C} \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{\kappa}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T \mid \beta_1 \gamma_1, \gamma_1 - 1 \right] \\ & \otimes \left\langle \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial f_i} \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{\kappa}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T \right. \\ & \left. + \mathbf{C} \otimes \frac{\partial \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{\kappa}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T}{\partial f_i} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

式(A.7)内の $\partial \mathbf{C} / \partial f_i$ は、式(A.8)で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial f_i} = \left\langle \begin{aligned} & \Omega \left[\left\{ \text{Adiag} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial f_i} \right) \right\} \otimes (\mathbf{P} \mathbf{1}_{L+1}^T) \right] \\ & + \Omega \left[\left\{ \text{Adiag}(\mathbf{f}) \right\} \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial f_i} \mathbf{1}_{L+1}^T \right) \right] \end{aligned} \right\rangle \otimes \mathbf{A} \quad (\text{A.8})$$

ここで、以下の関係が成立する。

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial f_i} = \mathbf{V} \otimes \frac{\partial \{\mathbf{I} + (\mathbf{A}\mathbf{f})\}}{\partial f_i} \quad (\text{A.9})$$

一方、式(A.7)内の $\partial \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{\kappa}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T / \partial f_i$ は、式(A.10)で表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{\kappa}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T}{\partial f_i} \\ & = \mathbf{A}_l \otimes \left\langle -\mathbf{I} + \left\{ \mathbf{\kappa} \otimes \mathbf{f} \otimes \mathbf{f} \right\} \mathbf{1}_s^T \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

ここで $\mathbf{A}_l$ は $(S \times L + 1)$ の行列であり、 l 列目が $\mathbf{A}(:, l)$ となり、それ以外の列が 0 である。

次に式(5.12)の $\partial \bar{\mathbf{t}} / \partial \mathbf{V}$ は、 $(S \times S)$ の行列であり、その s 列目のベクトルは、式(A.11)で表される。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{V}^s} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{V}^s} \mathbf{f} \right) \otimes \{\mathbf{I} + (\mathbf{A}\mathbf{f})\} \quad (\text{A.11})$$

ここで、以下の関係が成立する。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{V}^s} = \left\{ \frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{V}^s} (\mathbf{Z} + \mathbf{X}) + \bar{\mathbf{t}} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{V}^s} \right\} \otimes \mathbf{A} \quad (\text{A.12})$$

式(A.12)内の $\partial \bar{\mathbf{t}} / \partial \mathbf{V}^s$ は、式(A.13)で表される。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{t}}}{\partial \mathbf{V}^s} = \mathbf{E} \frac{\partial \{\text{diag}(\mathbf{t}^*)\}}{\partial \mathbf{V}^s} \quad (\text{A.13})$$

ここで、 $\partial \{\text{diag}(\mathbf{t}^*)\} / \partial \mathbf{V}^s$ は、 $(S \times S)$ の行列であり、 s 行 s' 列目の要素は式(A.14)で表される。

$$\frac{\partial \bar{t}^s}{\partial \mathbf{V}^{s'}} = \begin{cases} t^s \beta^s \gamma^s \left(\frac{E_a}{O_a} \right) \left(\frac{V_{pcu}^s}{K^s} \right)^{\gamma^s - 1} & \text{if } s \in S_a \text{ and } s = s' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

また、式(A.12)内の $\partial \mathbf{Z} / \partial \mathbf{V}^s$ は、式(A.15)で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{V}^s} = \left\{ \mathbf{E}^T \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}^s} \otimes \mathbf{J} \right) \right\} \otimes \mathbf{H} \quad (\text{A.15})$$

ここで、以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{V}^s} = & \mathbf{G} \left[\mathbf{C} \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{\kappa}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T \mid \beta_1 \gamma_1, \gamma_1 - 1 \right] \\ & \otimes \left\langle \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{V}^s} \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\mathbf{f} \otimes \mathbf{\kappa}) \mathbf{1}_s^T \right\}^T \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

式(A.16)内の $\partial \mathbf{C} / \partial \mathbf{V}^s$ は、式(A.17)で表される。

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{V}^s} = \left[\Omega \left\{ \left(\text{Adiag}(\mathbf{f}) \right) \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}^s} \mathbf{1}_{L+1}^T \right) \right\} \right] \otimes \mathbf{A} \quad (\text{A.17})$$

ここで、以下の関係が成立する。

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{V}^s} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{V}^s} \otimes \{\mathbf{I} + (\mathbf{A}\mathbf{f})\} \quad (\text{A.18})$$

$\partial \mathbf{V} / \partial \mathbf{V}^s$ は、サイズが S の列ベクトルであり、 s 番目の要素が 1、それ以外の要素は 0 をとる。

一方、式(5.11)の $\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{f}$ は $(S \times L + 1)$ の行列であり、その l ($l \neq L + 1$) 列目のベクトルは、式(A.19)で表される。ただし、 $L + 1$ 列目のベクトルは、全ての要素が 0 となる。

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial f_i} = 60 \otimes \frac{\partial \{\mathbf{I} + (\mathbf{A}\mathbf{f})\}}{\partial f_i} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial f_i} \quad (\text{A.19})$$

ここで、以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial f_i} = & \mathbf{Q} \left[(\mathbf{C} \mathbf{1}_{L+1}) \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\text{Adiag}(\mathbf{f}) \mathbf{\kappa}) \right\} \mid \beta_2 \gamma_2, \gamma_2 - 1 \right] \\ & \otimes \left[\left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial f_i} \mathbf{1}_{L+1} \right) \otimes \left\{ \mathbf{I} + (\text{Adiag}(\mathbf{f}) \mathbf{\kappa}) \right\} \right. \\ & \left. + (\mathbf{C} \mathbf{1}_{L+1}) \otimes \frac{\partial \{\mathbf{I} + (\text{Adiag}(\mathbf{f}) \mathbf{\kappa})\}}{\partial f_i} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

式(A.20)内 $\partial \{\mathbf{I} + (\text{Adiag}(\mathbf{f}) \mathbf{\kappa})\} / \partial f_i$ は式(A.21)で表される。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \{\mathbf{I} + (\text{Adiag}(\mathbf{f}) \mathbf{\kappa})\}}{\partial f_i} \\ & = \mathbf{A}(:, l) \otimes [-\mathbf{\kappa}_l + \{\text{Adiag}(\mathbf{f}) \mathbf{\kappa}\} \otimes \{\text{Adiag}(\mathbf{f}) \mathbf{\kappa}\}] \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

最後に、式(5.12)の $\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{V}$ は $(S \times S)$ の行列であり、その s 列目のベクトルは、式(A.22)で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial V^s} &= \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial V^s} \\ &= \mathbf{Q}[(\mathbf{C1}_{L+1}) \otimes \{1 \div (\text{Adiag}(\mathbf{f})\mathbf{K})\} | \beta_2 \gamma_2, \gamma_2 - 1] \\ &\quad \otimes \left[\left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial V^s} \mathbf{1}_{L+1} \right) \otimes \{1 \div (\text{Adiag}(\mathbf{f})\mathbf{K})\} \right] \quad (\text{A.22}) \end{aligned}$$

参考文献

- 1) Dial, R.B.: Transit pathfinder algorithm, *Highway Research Record* 205, pp.67-85, 1967.
- 2) Fearnside, K. and Draper, D. P.: Public transport assignment-A new approach, *Traffic Engineering Control*, pp.298-299, 1967.
- 3) Rapp, M. H., Mattenberger, P., Piguet S., and Robert-Grandpierre, A.: Interactive graphic system for transit route optimization, *Transportation Research Record* 619, 1976.
- 4) Chiriqui, C. and Robillard, P.: Common bus lines, *Transportation Science* 9, pp.115-121, 1975.
- 5) Spiess, H.: On optimal route choice strategies in transit networks. Pub.286, *Centre de Recherche sur les Transports*, Université de Montreal, 1983.
- 6) Spiess, H. and Florian, M.: Optimal strategies. A new assignment model for transit networks, *Transportation Research* 23B, pp.83-102, 1989.
- 7) De Cea, J. and Fernandez, E.: Transit assignment for congested public transport system: An equilibrium Model, *Transportation Science* 27, pp.133-147, 1993.
- 8) Wu, J. H., Florian, M., and Marcotte, P.: Transit equilibrium assignment: A model and solution algorithms, *Transportation Science* 28, pp.193-203, 1994.
- 9) Lam, W. H. K., Gao, Z. Y., Chan, K. S., and Yang, H.: A stochastic user equilibrium assignment model for congested transit networks, *Transportation Research* 33B, pp.351-368, 1999.
- 10) Nielsen, O. A.: A stochastic transit assignment model considering differences in passenger utility functions, *Transportation Research* 34B, pp.377-402, 2000.
- 11) Fernandez, E., De Cea, E., Florian, M., and Cabrera, E.: Network equilibrium models with combined modes. *Transportation Science* 28, pp.182-192, 1994.
- 12) Lo, H. K., Yip, C. W., and Wan, K. H.: Modeling transfer and non-linear fare structure in multi-modal network. *Transportation Research* 37B, pp.149-170, 2003.
- 13) Connors, R. D., Sumalee, A. and Watling, D.P.: Variable demand probit-based network design problem: Implicit programming approach, *10th world conference on transport research (CD-ROM)*, 2004.
- 14) Gao, Z. Y., Sun, H., and Shan, L. L.: A continuous equilibrium network design model and algorithm for transit systems. *Transportation Research* 38B, pp.235-250, 2004.
- 15) 内田賢悦, 加賀屋誠一: 積雪寒冷地における凍結防止剤の最適散布量決定に関する基礎的研究, 土木学会論文集第IV部門投稿中.
- 16) Sheffi, Y.: *Urban Transportation Networks*, Prentice-Hall, New Jersey, 1985.
- 17) Clark, S. D. and Watling, D. P.: Sensitivity analysis of the probit-based stochastic user equilibrium assignment model. *Transportation Research* 36B, pp.617-635, 2002.
- 18) Bell, M. and Iida, Y.: *Transportation Network Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, UK., 1997.
- 19) Daganzo, C.: Multinomial Probit: The theory and Its Application to Demand Forecasting, Academic Press Inc, New York, 1979.

プロビット型確率的利用者均衡を適用したマルチモーダル配分による公共交通評価手法に関する研究

内田賢悦, 加賀屋誠一

本研究では、公共交通および公共交通へのアクセスとなる歩行も表現した、一般化ネットワークを対象としたプロビット型利用者均衡配分モデルの構築を行った。具体的には、自家用車、バス、軌道系公共交通および徒歩を同時に考慮したモデル化を行っている。また、ネットワークデザイン問題として、バス、軌道系公共交通の運行頻度の最適化を行った。一般的に、バス、軌道系公共交通の運行頻度を増やすと、自家用車利用者からの転換が図られ、道路ネットワークの総旅行時間が減少する。一方、運行頻度の増加には、コストがかかるため、増やし過ぎることが効率的とはいえない。これらの関係を踏まえ、運行頻度の最適化を行っている。

A Study on Public Transport Evaluation Method Using Multi-modal Traffic Assignment Applied Probit-Based SUE

By Ken-etsu UCHIDA and Seiichi KAGAYA

In this study, a probit-based public transport assignment model is developed. Three transport modes, i.e. railway system, bus and auto, are considered simultaneously in the model. Because there are interactions between the transport modes, e.g., the number of autos in a network heavily influences travel time of bus system, it is natural to consider these modes jointly. Public transport network design problem is also dealt with in this study. In the network design problem, the frequencies of public transport systems are optimized to minimize total disutility in the network.