【土木計画学研究・論文集 Vol.21 no.4 2004年9月】

出発時刻選択問題における総スケジュールコスト最小化と均衡状態との等価性*

Equivalence between minimization of total schedule cost and equilibrium in departure time choice problems*

井料隆雅**・吉井稔雄***・朝倉康夫****

By Takamasa IRYO**, Toshio YOSHII***, and Yasuo ASAKURA****

1. はじめに

道路利用車両の道路利用時刻を調整することによって渋滞を解消する方法は「時間分散政策」と呼ばれる. これは時間的な偏りを持つ需要交通を時間的に分散させることで, 集中してある時間帯にボトルネックに押し寄せることがないように車両の出発時刻を調整しよう, というものである. すでにいくつかの研究[1)2)3)4)]によって, この方法が経路変更による空間的分散と比較して大きな渋滞緩和効果があることが確認されている. この方法では理論的には道路を通過する車両の総数を変化させることなく渋滞を解消させることが可能である. このことは, どの道路利用者についても道路の利用を断念させることなく, 渋滞を解消または緩和させることが可能であることを示唆しているといえる.

時間分散政策を行う際には, 各車両が出発地を出発する時刻を変更しなくてはならないが, その際には出発時刻の変更による利用者の負担を出来るだけ少なくするように配慮しなくてはならない. 例えば, 昼間に道路を利用する車両の大部分を深夜帯に移動させることによって渋滞を緩和させることは渋滞解消や渋滞緩和に大きな力となるが, このような方法では深夜体に移動する利用者の負担が極めて大きくなり, あまり実用的な方法とはいえない.

これまで研究されてきた時間分散政策では, 道路を利用する車両の利用時刻ができるだけ変動しないように, 道路利用時刻の変動量について何らかの指標をあらかじめ決め, それを最小化したまま渋滞を解消させることを目指していた[1)]. 例えば吉井らの研究[2)]では出発時刻を所与とし, 全ての車両の出発時刻変更時間の総和を最小化する戦略を採用している. 一方で, 例えば井料らの研究[3)]では到着時刻の変更量を最小化する戦略を採用している.

しかし, 上記のような戦略では「利用者が政策実施前に選んでいた時刻がその利用者の希望している道路利用時刻である」という前提をおいている. この前提には問題が残る. なぜなら, 利用者の中には「希望時刻ではないが道路の混雑のため仕方なく別の時刻を選択している」という人がいる可能性があるからである. 例えば, 朝の渋滞を避けるために渋滞開始前の早朝時に道路を利用するような利用者や, 観光地から帰宅する際に渋滞が激しくなる前に帰宅するような利用者などがこのような人に該当する.

利用者の中に「希望時刻ではないが道路の混雑のため仕方なく別の時刻を選択している」人がいる可能性について考慮している一連の研究として「出発時刻選択問題」がある[5)]. 「出発時刻選択問題」は, どの車両も「希望道路利用時刻（一般には希望目的地到着時刻として示される）」を持つが, すべての車両が希望する時刻に道路を利用しているわけではない, という前提の下に組まれた道路利用者の出発時刻選択に関する理論解析である. 出発時刻選択問題の枠内で達成される均衡状態では, 少なくとも一部の車両が希望通りの時刻に道路を利用していないことが示されており, 現実の渋滞においても, 「道路混雑のため, 希望する道路利用時刻ではなく, 別の時刻を選択する道路利用者が存在する」ことを示唆するものとなっている.

出発時刻選択問題では, 車両の一般化交通費用は道路渋滞による遅れ時間によって発生する費用と希望時刻に道路を利用できなかったときに受ける費用（以下ではスケジュールコストと呼ぶ）の和で示すのが一般的である.

*キーワーズ：TDM, 時間分散, 出発時刻選択問題

**正員,博士(工学), 神戸大学工学部建設学科助手
(神戸市灘区六甲台町 1-1 TEL:078-803-6360,
E-mail:iryo@kobe-u.ac.jp)
***正員,博士（工学）,京都大学大学院工学研究科助教授
****正員,工博,神戸大学大学院自然科学研究科教授

そして，どの利用者も自分の一般化交通費用をそれ以上下げることが出来ない状態（均衡状態）が達成されるという仮定の下に解析を行うのが一般的である．この状態は利用者均衡状態（以下では UE 状態と呼ぶ）と呼ばれる．一方，全利用者の一般化交通費用の和が最小化される状態はシステム最適状態（以下では SO 状態と呼ぶ）と呼ばれ，通常はこれが社会的に望ましい状態と考えられる．これまでの時間分散政策では，SO 状態を考える際に，渋滞による総遅れ時間の最小化と一般化交通費用の最小化との違いについては考慮されず，もっぱら総遅れ時間が最小化することを SO 状態としていた．しかし，出発時刻選択問題の枠組みを考える場合には，スケジュールコストを考えないこの方法は適切とはいえない．

出発時刻選択問題の枠組みにおける UE 状態と SO 状態の関係についてはすでにいくつかの研究が存在する．例えば Arnott らは，利用者の費用関数に個人差が存在するような出発時刻問題の解法を示した論文[6]において，UE 状態における利用者の時刻選択行動と SO 状態の関係について言及している．一方，この研究ではスケジュールコストを決定する関数は特定のものを使用しており，一般的な状況における証明にはなっていなかった．

本研究では，各個人のスケジュールコストを決定する関数に依存することなく，出発時刻選択問題の枠組みの下で達成される UE 状態では，全利用者のスケジュールコストの総和が最小となっていることを証明する．この結果を用いて，ボトルネック流出時刻を不変とする時間分散政策によって渋滞が解消させせることにより，SO 状態を達成できることを証明する．

2．考慮する系の定式化

本章では，この研究の枠組みについて整理する．本研究で扱う道路ネットワークは，図1に示すように1つの出発地領域と1つの目的地領域とそれらを結ぶ1本の道路から構成される．道路上には，1つの容量一定 のボトルネックが存在し，容量を超えた車両が流入することによりボトルネック上にポイントキューが発生する．この道路における旅行時間は，ボトルネックでの遅れ時間を除いて一定であるものとする．次に利用者の行動に関する定式化を行う．なお，ここでは1台の車両には1人しか乗車していないと考え（この乗員を利用者と呼ぶ）

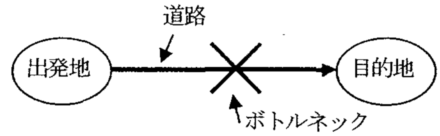

図1　考慮するネットワーク

「利用者」と「車両」を同一視することにする．すべての道路利用者は出発地からボトルネックの存在する道路を経由して目的地へ向かうとする．どの利用者も道路の利用を中止することはなく，道路利用者の総人数は一定であるとする．利用者は各人に固有の費用関数（後ほど式(1)により $\pi_i(t)$ として定義される）により計算される一般化交通費用を最小化するように目的地到着時刻を選択するものとし，これ以外の選択肢は持たないものとする．なお，ボトルネックから目的地までの旅行時間はつねに一定であるので，

「ボトルネック流出時刻」　＋　「ボトルネックから目的地までの自由流旅行時間」
＝　「目的地到着時刻」

の関係により，目的地到着時刻を選択することとボトルネック流出時刻を選択することは同等の意味を持つ．そこで，以下では利用者はボトルネック流出時刻を選択するものとする．

各利用者の一般化交通費用は「時間」の単位で算出することとし，利用者に番号 $i=1\dots N$ を付けたとき，利用者 i の一般化交通費用を

$$\pi_i\left(t_d\right)=w\left(t_d\right)+p_i\left(t_d\right) \tag{1}$$

t_d　ボトルネック出発時刻

$\pi_i\left(t_d\right)$　利用者 i がボトルネック出発時刻 t_d を選択したときの一般化交通費用

$w\left(t_d\right)$　時刻 t_d にボトルネックを流出した利用者がこうむった遅れ時間

$p_i\left(t_d\right)$　利用者 i が時刻 t_d にボトルネックを流出した際のスケジュールコスト

とする．なおここでは，スケジュールコストは利用者がボトルネックを流出した時刻に従って決定するとしてい

る．言い換えると，目的地到着時刻によって決定される，ということを意味している．なお，本稿の解析の枠組みでは，スケジュールコストの関数形に具体的な制約はおかない．各利用者の希望到着時刻の情報はスケジュールコストを示す関数 $p_i\left(t_d\right)$ の形状で示される．すなわち，$p_i\left(t_d\right)$ が最小値をとる時刻 t_d が利用者 i の希望到着時刻に相当する．

3．スケジュールコストを最小化する時刻選択

（1）証明すべき命題の提示

この論文では，出発時刻選択問題の UE 状態では，スケジュールコストの総和が最小化されていることを証明する．すなわち以下の命題の証明を行う．

<u>命題</u>

UE 状態で利用者 $i=1 \ldots N$ のボトルネック流出時刻を $t_d^*(i)$ とする．いま，これらの利用者のボトルネック流出時刻を $t_d^*(i)$ から $t_d(i)$ に変更しても，その変更がボトルネックの容量制約条件を守っている限り，利用者のスケジュールコストの総和（総スケジュールコスト）が低下することはない．すなわち

$$\sum_{i=1}^{N} p_i\left(t_d(i)\right) \geq \sum_{i=1}^{N} p_i\left(t_d^*(i)\right) \tag{2}$$

となる．なお，式(2)の左辺は変更後のスケジュールコストの総和，右辺は均衡状態におけるスケジュールコストの総和である．

ただし，UE 状態とは「現行の遅れ時間パターンの下では，どの利用者も自分の費用をそれ以上下げることが出来ない状態」，すなわち任意の利用者 i について

$$w^*\left(t_d\right)+p_i\left(t_d\right) \geq w^*\left(t_d^*(i)\right)+p_i\left(t_d^*(i)\right) \tag{3}$$

ただし　t_d　は任意の時刻

　　　$w^*\left(t_d\right)$ 均衡状態における遅れ時間

が成り立つ状態，と定義される．

この命題は，「UE 状態においては，総スケジュールコスト最小化が実現されている」ということを示す命題である．本研究ではスケジュールコストはボトルネック流出時刻にのみ依存するとしている．そのため，この命題は「均衡状態におけるボトルネック出発時刻が保存されていれば，ボトルネックの容量制約条件を守ったまま，総スケジュールコストを最小化できている」ことを意味している．

（2）命題の証明

本節では先の命題の証明を行う．均衡状態の定義を示す式(3)はすべての t_d とすべての利用者について成立する式なので，均衡状態では，式(3)の左辺の t_d を $t_d(i)$ にして，さらに両辺について全利用者 $i=1 \ldots N$ について和をとった式

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\left\{w^*\left(t_d(i)\right)+p_i\left(t_d(i)\right)\right\} \geq \\ &\qquad \sum_{i=1}^{N}\left\{w^*\left(t_d^*(i)\right)+p_i\left(t_d^*(i)\right)\right\}\end{aligned} \tag{4}$$

も成立する．この式の右辺は均衡状態における全利用者の費用の和を意味するが，左辺は式(3)の左辺を形式的に足しわせただけのものであり，特に何らかの意味を持つものではないことに注意する必要がある．以降ではこの式(4)を変形して関係式(2)を数学的に導出する．

まず，この命題の中に入っている「容量制約条件」を数学的に記述することを考える．ここで，t_d はボトルネックの「流出」時刻を示していることに注意したい．ボトルネックの容量に上限があるため，ある一定の時間帯にボトルネックを流出できる利用者数には上限がある．このため，ある時間帯に含まれる t_d を選べる利用者の数は限られることになる．いま，ボトルネックにおいて遅れ時間をこうむる時間帯の集合 T_c を，

$$T_c=\left\{t_d \mid w^*\left(t_d\right)>0\right\} \tag{5}$$

と定義する．また，均衡状態において集合 T_c に含まれる時刻を選択している利用者の番号 i の集合を N_c と定義する．すなわち

$$N_c = \left\{ i \,\middle|\, t_d^*(i) \in T_c \right\} \quad (6)$$

とする．均衡状態においては，渋滞している時間帯（時間帯T_c）ではボトルネックの容量はすでに使い切られている．このことは，ボトルネックの容量制約を守ったまま，時間帯T_cの中に新たな利用者を追加することは不可能なことを意味している．よって，時刻変更後に利用者に時間帯T_cに属するボトルネック出発時刻を割り当てる場合には，変更前に時間帯T_cにおいて各利用者に割り当てられていたボトルネック出発時刻をあらためて別の利用者に配分しなおすしか方法はない．このことは，

$$t_d(i) = t_d^*(a_i) \ \text{ if } \ t_d(i) \in T_c \ , \quad \text{where} \ \ a_i \in N_c \ \text{ and } \ a_i \neq a_j \ \text{ if } \ i \neq j \quad (7)$$

というルールに従って新しいボトルネック出発時刻である$t_d(i)$を決定する必要があることを意味している．なお，以下では集合M_cを，時刻変更後に時間帯T_cに動いた利用者の集合，すなわち

$$M_c = \left\{ i \middle| t_d(i) \in T_c \right\} \quad (8)$$

と定義する．

ここで，式(4)の左辺第１項を式(7)に従って置き換え，$t_d \notin T_c$では$w^*(t_d) = 0$と定義されていることを考えると，

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in M_C} w^*\left(t_d^*(a_i)\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i\left(t_d(i)\right) \\ &\quad \geq \sum_{i \in N_c} w^*\left(t_d^*(i)\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i\left(t_d^*(i)\right) \end{aligned} \quad (9)$$

を得る．式(9)の左辺第１項は，利用者の集合A_cを

$$A_c = \left\{ i \mid t_d^*(i) = t_d(j) \ \text{ for any } j \in M_c \right\} \quad (10)$$

すなわち時刻変更後に時間帯T_cに移動した利用者が選択した時刻を均衡状態で選択していた利用者の集合と定義すれば，

$$\sum_{i \in M_C} w^*\left(t_d^*(a_i)\right) = \sum_{i \in A_c} w^*\left(t_d^*(i)\right) \quad (11)$$

と計算できるので，式(9)は

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in A_C} w^*\left(t_d^*(i)\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i\left(t_d(i)\right) \\ &\quad \geq \sum_{i \in N_c} w^*\left(t_d^*(i)\right) + \sum_{i=1}^{N} p_i\left(t_d^*(i)\right) \end{aligned} \quad (12)$$

と書き直せる．いま，式(10)のA_cの定義から，A_cには均衡状態に渋滞している時間帯を利用している利用者しか含まれていないことがわかるので，

$$A_c \subseteq N_c \quad (13)$$

の関係が導ける．これと$w^*(t_d)$は負にはならないことを考えると，式(9)の左辺第１項と右辺第１項の大小関係は，必ず

$$\sum_{i \in A_C} w^*\left(t_d^*(i)\right) \leq \sum_{i \in N_c} w^*\left(t_d^*(i)\right) \quad (14)$$

となる．この関係を図で示したのが図２である．右辺は均衡状態における総遅れ時間を示している．すなわち図２の横軸と$w^*(t_d)$の曲線で囲まれた面積になる．この総遅れ時間から，集合N_cに含まれて集合A_cに含まれない利用者のこうむっていた待ち時間を削除したものが左辺になる（図２の点描部の面積）．

この式(14)より，式(12)の左辺第１項と右辺第１項を同時に消去しても式(12)の不等号はくずれないことがわかる．式(12)から左辺第１項と右辺第１項を消去すると式(2)を得るので，これにより式(2)が成立することが証明された．

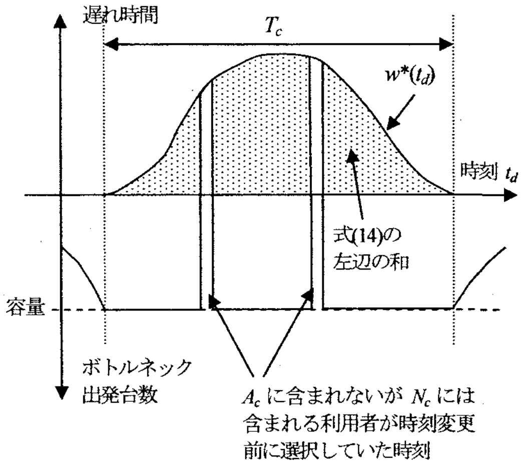

図2　式(14)の関係を示した図

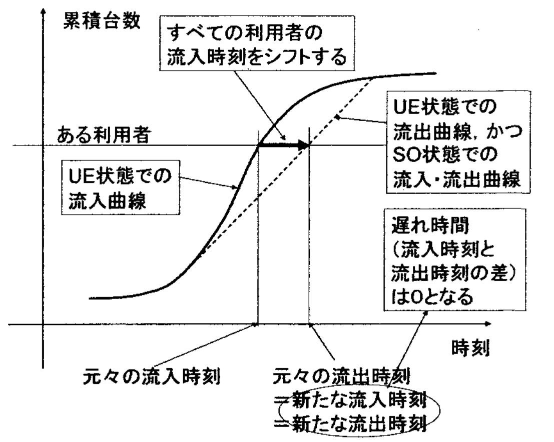

図3　総遅れ時間を0にする需要分散政策の例

4．総費用を最小化する需要分散政策

前章で示した命題を用いると，

「すべての利用者のボトルネック流入時刻を，UE 状態におけるボトルネック流出時刻に一致させる」

という方法による需要分散政策が，利用者の総費用を最小化することがわかる．このことを以下で説明する．

この方法は渋滞を完全に消去し，それによって総遅れ時間を0にする．このことは累積図によって知ることが可能である．図3に累積図の例を示す．いま，UE 状態におけるボトルネック流出曲線はボトルネックの容量制約を守っている．そのため，全利用者のボトルネック流入時刻をコントロールすることによってボトルネック流入曲線をボトルネック流出曲線に一致させた場合，ボトルネックでは遅れ時間は一切発生しない．

また，この方法によって，スケジュールコストの総和は最小になる．この方法では各利用者のボトルネック流出時刻は均衡状態におけるボトルネック流出時刻と同じになる．そのため，前章で証明した定理1により，この方法以外の方法によって，スケジュールコストの総和をより小さくすることはできない．

以上のことにより，この方法によって全利用者の一般化交通費用の総額を最小化し，SO 状態を実現できることがわかる．なぜなら，一般化交通費用は遅れ時間による項とスケジュールコストによる項の和として定義されており，それらが個別に最小化されればその和も最小化されるからである．

5．おわりに

本研究では，到着地におけるスケジュール制約を持つ単一ボトルネックにおける出発時刻選択問題では，スケジュールコスト関数の形状にかかわらず

- UE 状態においては，利用者のスケジュールコストの総和が最小化されている．
- すべての利用者のボトルネック流入時刻を，均衡状態におけるボトルネック流出時刻に一致させることにより，一般化交通費用の総和を最小化できる．すなわち SO 状態を達成できる．

ということを証明した．前者を用いることにより，「均衡状態では，ボトルネックからの流出時刻は最適化されている」ということを言うことができる．なお，このときボトルネックへの流入時刻は最適化されておらず，それが渋滞を発生させ，UE 状態を SO 状態と異なるものにしていることに注意したい．需要分散政策はこのことを利用し，流入時刻のみを調整して SO 状態を達成させる方法であるといえる．また，後者により，到着地に時刻制約を持つ出発時刻選択問題を前提とした需要分散政策を考える際には，各利用者のボトルネック流出時刻を

変更することのない施策の実施が望まれるということを示している．

本研究における主な問題点は

- 出発地に時刻制約を持つ利用者を考慮していない
- 各車両の時間価値を均一のものとして総費用を算出している（利用者と車両の同一視も含む）
- 対象とするネットワークが限られている

の３点である．

今後は，これらの点を考慮しながら，一般化交通費用を削減する効率的な施策の提案に向けてさらなる解析を行う予定である．

参考文献

1) 清宮正好,桑原雅夫,赤羽弘和:高速道路の予約制に関する基礎的研究,土木学会第５１回年次学術講演会講演概要集 第４部,pp.392-393,土木学会,1996.9

2) T. Yoshii, S. Ajisawa and M. Kuwahara.: impacts on traffic congestion by switching routes and shifting departure time of trips, 5th World Congress on Intelligent Transport Systems Proceedings, Oct. 1998

3) T. Iryo and M. Kuwahara.: simulation analyses of traffic congestion alleviation by demand spreading over time, Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies, Vol.4,No.4, pp. 161-174, Oct. 2001

4) 小根山裕之, 井料隆雅, 桑原雅夫: 東京２３区を対象とした需要の時間分散施策の効果評価, 第２４回土木計画学研究・講演集, 土木学会, 2001.11

5) 桑原雅夫: 道路交通における出発時刻選択に関する研究解説, 土木学会論文集, No.604/IV-41, pp73-84, 土木学会, 1998.1

6) Richard Arnott, Andre de Palma, and Robin Lindsey: schedule delay and departure time decisions with heterogeneous commuters, Transportation Research Record, 1197, pp.56-67, 1989.

出発時刻選択問題における総スケジュールコスト最小化と均衡状態との等価性*

井料隆雅**・吉井稔雄***・朝倉康夫****

本研究では，到着地に時刻制約を持つ出発時刻選択問題を取り上げ，その均衡状態において総スケジュールコストが最小化されていることを示している．道路利用者の道路利用時刻を調整することによって渋滞を解消・緩和させる研究は「需要分散政策」として知られているが，これまでの需要分散政策では利用者の道路利用希望時刻の存在を明示的には考慮していなかった．このため政策が本当に社会的に最適かどうかの評価に問題が残っていた．この問題の解決を助けるため，本研究では出発時刻選択問題を用いて道路利用希望時刻の存在を考慮した解析を行い，その結果「均衡状態においては総スケジュールコストが最小化されている」という定理を証明した．

Equivalence between minimization of total schedule cost and equilibrium in departure time choice problems*

By Takamasa IRYO**, Toshio YOSHII***, and Yasuo ASAKURA****

This study shows that the total schedule cost is minimized in the equilibrium condition of a departure time choice problem with schedule constraint on travelers' arrival time. "Demand spreading policy" is well known as the method of congestion al leviation by spreading traveler's demand over time. But, travelers' desired arrival times at destinations are not considered expli citly and it has not been revealed yet whether the policy is socially suitable or not. This study makes an analysis of a depart ure time choice problem and solves the theorem, "the minimized total schedule cost can be obtained in the equilibrium".