【土木計画学研究・論文集 Vol.21 no.1 2004年9月】

# 評価値一斉法の提案*
# A Proposal of Concurrent Convergence Method of Evaluation Value*

杉浦伸**・木下栄蔵***
By Shin SUGIURA**・Eizo KINOSHITA***

## 1. はじめに

AHP[1]では各評価基準のウェイトを「重み」とし，各評価基準に関して各代替案のウェイトを「評価値」として表現している．従来のAHPは総合目的から代替案まで一方向的な流れで決定がなされる．また，評価値を正規化することにより全体として1にしていることも大きな特徴であり，またそれは代替案全体を均等に見渡す民主主義的な意思決定法である．

それに対し，木下・中西[2]によって提案された支配代替案法は支配代替案というある一つの代替案に着目する視点によって各代替案の差別的個性を明確にしている．支配代替案法では，演算の中で新たな支配代替案による新しい評価値を導出するが，複数出現する評価値は，正規化すると唯一の解となり理想的な推移状態を保ち，互換性が成り立っている．

また，木下・中西[3]は支配代替案を変えることや何らかの追加情報によって，それが意思決定者に影響を与え，その評価基準の重みが異なる場合に重みを収束させる手法として一斉法を提案している．ところで，この場合の支配代替案法や一斉法では出現する評価値は安定しており，不安定であるのは支配代替案ごとの評価基準の重みだけである．そこで，この従来の一斉法を本稿において新たに「重み一斉法」と名付ける．

さて，一対比較や個々の大小関係によって得られた評価値が一種類の時はこの重み一斉法を用いれば良いが，現実の問題として，評価基準のみが不安定である以前に複数の意思決定者やあいまいさなどの要因によって評価値そのものにずれが生じ評価値が複数出現した場合，重み一斉法が適用できないため，複数の評価値を収束させる必要がでてくる．そのため，重み一斉法とは別に，ずれによって出現した複数の評価値を補正し，一つに収束させる一斉法を「評価値一斉法」として提案する．

*キーワーズ：計画基礎論，計画手法論
**学生員，名城大学都市情報学部都市情報学科
（岐阜県可児市虹ヶ丘四丁目三番地の三，
TEL:0574-69-0100, E-mail: a7001085@urban.meijo-u.ac.jp）
***正員，工博，名城大学都市情報学部都市情報学科
（岐阜県可児市虹ヶ丘四丁目三番地の三，
TEL:0574-69-0100, E-mail: kinoshit@urban.meijo-u.ac.jp）

## 2. 支配代替案の数学的構造[4]

まず，重み一斉法と評価値一斉法の基礎となる支配代替案法について説明する．

支配代替案の数学的構造を評価基準が2つ(Ⅰ，Ⅱ)，代替案が3つ(1，2，3)で，支配代替案を1とした場合で説明する．まず，支配代替案1からみた評価基準の重みベクトル$b^1$を$b^1=\begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix}$として，評価マトリックスAを

$$A=\begin{array}{c} \\ 代替案1 \\ 代替案2 \\ 代替案3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 評価基準Ⅰ & 評価基準Ⅱ \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \end{array}$$

とする(図-1参照)．

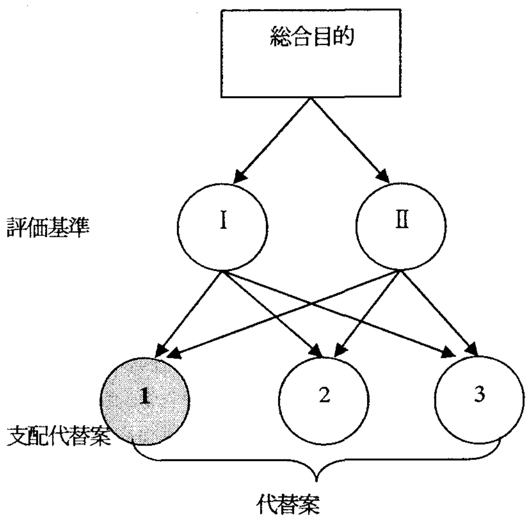



**図-1 階層図**

このとき，総合評価値ベクトル$E$の導出は次のようになる．

$$E=\begin{bmatrix} 代替案1の総合評価値 \\ 代替案2の総合評価値 \\ 代替案3の総合評価値 \end{bmatrix}=Ab^1$$

すなわち，ベクトル$E$は評価マトリックス$A$と重みベクトル$b^1$にのみ依存する．

また，ベクトル$E$は次のように表現できる．

$$E \equiv Ab^1 = AA_1^{-1}A_1A_1^{-1}b^1$$

ただし，$A_1$とは，支配代替案1の評価値$(a_{1\mathrm{I}}, a_{1\mathrm{II}})$を対角要素に有するマトリックスとする．すなわち，

$$\mathrm{A}_1 \equiv \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり，単位行列となる．また，

$\mathrm{A}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ も単位行列である．

次に，支配代替案以外のすべての代替案からみた評価基準の重みベクトルを評価マトリックスの推定ルールから説明する．このとき，$A_i$は，

$$A_i \equiv \begin{bmatrix} a_{i\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{i\mathrm{II}} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,3)$$

とする．ところで，支配型AHPに関するルールは次の2つである．

ルール1

| |
|---|
| $A_iA_1^{-1}b^1$ ：代替案$i(i \neq 1)$)からみた評価基準の重みベクトルの推定原理 |

ルール2

| |
|---|
| $AA_i^{-1}$ ：代替案$i$からみた評価マトリックスの推定原理 |

まずルール1の推定原理は次のように表現できる（これを評価単価比一定の法則と名付ける）．

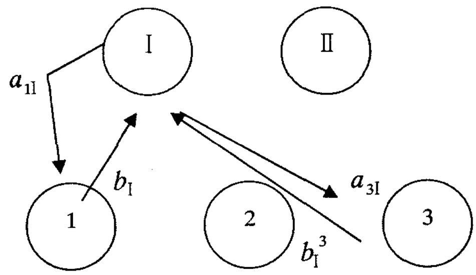
| |
|---|
| $b_j^i$ (代替案$i$からみた評価基準jの重み)と$b_j$ (支配代替案1からみた評価基準jの重み)の比は，$a_{ij}$ (評価基準jからみた代替案$i$の評価値)と$a_{1j}$ (代替案jからみた支配代替案1の評価値)の比に一致する． |

上記の内容を式で証明すると(i=3の場合)，次のように表せる．

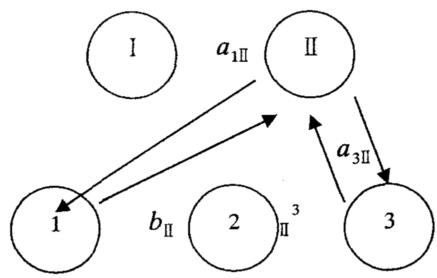
$$b^3 = \begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}}^3 \\ b_{\mathrm{II}}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{1\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & 1/a_{1\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{\mathrm{I}} \\ b_{\mathrm{II}} \end{bmatrix} = A_3A_1^{-1}b^1$$

これは，以下の比例式から導かれる（図-2参照）．

$$\frac{b_{\mathrm{I}}^3}{b_{\mathrm{I}}} = \frac{a_{3\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{I}}}, \frac{b_{\mathrm{II}}^3}{b_{\mathrm{II}}} = \frac{a_{3\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}}$$




$$\frac{b_{\mathrm{I}}}{a_{1\mathrm{II}}} = \frac{b_{\mathrm{I}}^3}{a_{3\mathrm{I}}}$$




$$\frac{b_{\mathrm{II}}}{a_{1\mathrm{II}}} = \frac{b_{\mathrm{II}}^3}{a_{3\mathrm{II}}}$$

**図-2　視点変更の模式図**

次に，ルール2の推定原理は次のように表現できる．

| |
|---|
| すべての評価基準jに対して，代替案kに対する代替案iの相対評価は次のように示すことができる．<br>$\frac{\text{代替案 } i \text{の評価値}}{\text{代替案 } k \text{の評価値}} = \frac{\text{代替案 } i \text{の評価値}}{\text{代替案 1の評価値}} \times \frac{\text{代替案 1の評価値}}{\text{代替案 } k \text{の評価値}}$<br>$= a_{ij} \times \frac{1}{a_{kj}}$ |

たとえば，代替案3からみた評価マトリックスは，

$$A^3 = \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \\ a_{3\mathrm{I}}/a_{3\mathrm{I}} & a_{3\mathrm{II}}/a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1\mathrm{I}} & a_{1\mathrm{II}} \\ a_{2\mathrm{I}} & a_{2\mathrm{II}} \\ a_{31} & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{3\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & a_{3\mathrm{II}} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= AA_3^{-1}$$

となる.

最後に，代替案$i(i \neq 1)$からみた総合評価値ベクトルは,

$$AA_i^{-1}b^i = \underbrace{(AA_i^{-1})}_{\text{ルール2}}\underbrace{(A_iA_1^{-1}b^1)}_{\text{ルール1}}$$

となる．このことより，次の定理を導くことができる.

| |
|---|
| 定理：ルール 1，2 の下では，支配代替案からみた総合評価値ベクトルは，他の代替案から見た総合評価値ベクトルと一致する．つまり，各評価値の値は違っていても正規化すると同一の評価値が導出できる. |

代替案 1 が支配代替案のときは,

$$Ab^1 = AA_1^{-1}b^1 = AA_i^{-1}A_iA_1^{-1}b^1$$

$$= \underbrace{(AA_i^{-1})}_{\text{ルール2}}\underbrace{(A_iA_1^{-1}b^1)}_{\text{ルール1}}$$

となる．以上の定理のもと，次章で重み一斉法を説明する.

## 3．重み一斉法

従来の一斉法，つまり重み一斉法は一種類の評価値からなり，評価基準の重みのみが不安定である．そして各代替案が支配代替案になるとき，その評価値を 1 にするような評価マトリックスを代替案の数だけ用意し，それを評価単価比一定の法則により収束させている．そして，重み一斉法では収束した各評価基準の重みと支配代替案の評価値の積をとる．その値は支配代替案の数だけ存在するが，それらは正規化するとどれも同一の値となる．簡潔に述べれば，これが重み一斉法である.

そのため，重み一斉法では計算の手続きで出現するのは評価基準の重みのみであり，最終的な全体の重みである総合評価値は最後にしか得られない．また，計算が複雑であり，また収束した重みが最初に下した配分比率と異なって出現するといった問題点などが現在のところ指摘されている．しかし，評価基準の不安定な重みを安定した評価値によって，評価単価比一定の法則に基づき，収束させる点で，有効な手法である.

重み一斉法についてはすでにいくつかの一般式が提案されている[3) 4) 5) 6)]．まずその一般式を説明する．評価基準A，Bとし，代替案をX，Y，Zとする.

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{bmatrix}$$ ；代替案の評価値

$$W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \end{bmatrix}$$ ；代替案ごとの評価基準の重み

$$\hat{w}_{ij}(k) = \frac{u_{ji}}{u_{ki}} \cdot w_{ik}$$ ；重みの導出計算法…（*）

$$(k = 1,2,3; i = 1,2; j(\neq k) = 1,2,3)$$

（*）で導出された重みは正規化されていないため，ある代替案についての評価基準の重みを全体で 1 にしなければならない．そのため,

$$\hat{w}_{1j}(1) = \frac{u_{j1}}{u_{11}} \cdot w_{11}, \quad \hat{w}_{2j}(1) = \frac{u_{j2}}{u_{12}} \cdot w_{21}$$

として重みを導出し,

$$\hat{\hat{w}}_{1j}(1) = \frac{u_{j1}}{u_{11}} \cdot w_{11} / (\frac{u_{j1}}{u_{11}} w_{11} + \frac{u_{j2}}{u_{12}} w_{21})$$

$$\hat{\hat{w}}_{2j}(1) = \frac{u_{j2}}{u_{12}} \cdot w_{21} / (\frac{u_{j1}}{u_{11}} w_{11} + \frac{u_{j2}}{u_{12}} w_{21})$$

として，全体で正規化しなければならない．以上のことから重み一斉法は

<ステップ 1>まず評価基準（A，B）に対する重要度の$w_{1j}$，$w_{2j}$を初期値とする.

<ステップ 2>代替案 X を支配代替案とした場合の服従代替案 Y，Z の評価基準（A，B）に対する評価値の重みを（*）にしたがって求め，正規化する.

<ステップ 3>次に代替案 Y を支配代替案とした場合の服従代替案 Z，X の評価基準（A，B）に対する評価値の重みを（*）にしたがって求め，正規化する.

<ステップ 4>同様に代替案 Z を支配代替案とした場合の服従代替案 X，Y の評価基準（A，B）に対する評価値の重みを（*）にしたがって求め，正規化する.

<ステップ 5>各支配代替案の本来の重みと他の代替案を支配代替案にしたときに導出された，それぞれの代替案の重みを合計し，導出された評価基準を列に関して算術平均した値を新たな重みとして得る.

$$w'_{11} = \frac{w_{11} + \hat{\hat{w}}_{11}(2) + \hat{\hat{w}}_{11}(3)}{3} \quad w'_{21} = \frac{w_{21} + \hat{\hat{w}}_{21}(2) + \hat{\hat{w}}_{21}(3)}{3}$$

$$w'_{12}=\frac{w_{12}+\hat{w}_{12}(1)+\hat{w}_{12}(3)}{3}\quad w'_{22}=\frac{w_{22}+\hat{w}_{22}(1)+\hat{w}_{22}(3)}{3}$$

$$w'_{13}=\frac{w_{13}+\hat{w}_{13}(1)+\hat{w}_{13}(2)}{3}\quad w'_{23}=\frac{w_{23}+\hat{w}_{23}(1)+\hat{w}_{23}(2)}{3}$$

ステップ1からステップ5までの同一の手順を繰り返し，この列において平均した重みが一つ前の手順で導出した重みと一致したときにステップを終了する．上に挙げた式により導出した値を実際に計算した場合にその流れを示したのが下の表である．

**表-1　重み一斉法の流れ**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $w_{11}$ | $w_{21}$ | $w_{12}$ | $w_{22}$ | $w_{13}$ | $w_{23}$ |
| | | | $\hat{w}_{12}(1)$ | $\hat{w}_{22}(1)$ | $\hat{w}_{13}(1)$ | $\hat{w}_{23}(1)$ |
| step | $\hat{w}_{11}(2)$ | $\hat{w}_{21}(2)$ | | | $\hat{w}_{13}(2)$ | $\hat{w}_{23}(2)$ |
| ↓ | $\hat{w}_{11}(3)$ | $\hat{w}_{21}(3)$ | $\hat{w}_{12}(3)$ | $\hat{w}_{22}(3)$ | | |
| | $w'_{11}$ | $w'_{21}$ | $w'_{21}$ | $w'_{22}$ | $w'_{13}$ | $w'_{23}$ |
| | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

つまり，各列は下に向かって導出されていき，行の区切りで上の列の平均をして新たなstepの値を導出している．ここで，支配代替案ごとの評価基準の重みは，重み一斉法における$w_{11}, w_{21}$とXを支配代替案として導出されたY，Zの重み$\hat{w}_{12}(1)$，$\hat{w}_{22}(1)$，$\hat{w}_{13}(1)$，$\hat{w}_{23}(1)$の値となり，つまり支配代替案法は重み一斉法の中で，ある一つの支配代替案からの重み推定値の最初のステップである．ただ一つの支配代替案からの重みが服従代替案の評価基準の重みを表現しているという点で，支配代替案法は重み一斉法に内包されているのである．

さて，重み一斉法において最も重要なことは，収束した評価基準の値そのものでなく，支配代替案とした代替案の評価値を1とした評価値と収束した評価基準の重みをかけたものを正規化すると一致するという点である．

つまり，ある評価値$U$と重み$W$が

$$U=\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\\ u_{31} & u_{32}\end{bmatrix}\quad W=\begin{bmatrix}w_{11} & w_{12} & w_{13}\\ w_{21} & w_{22} & w_{23}\end{bmatrix}$$

であり，これが重み一斉法によって，

$\overline{W}=\begin{bmatrix}\overline{w}_{11} & \overline{w}_{12} & \overline{w}_{13}\\ \overline{w}_{21} & \overline{w}_{22} & \overline{w}_{23}\end{bmatrix}$ と収束したとすると，

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ u_{21}/u_{11} & u_{22}/u_{12}\\ u_{31}/u_{11} & u_{32}/u_{12}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\overline{w}_{11}\\ \overline{w}_{21}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_{11}/u_{21} & u_{12}/u_{22}\\ 1 & 1\\ u_{31}/u_{21} & u_{32}/u_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\overline{w}_{12}\\ \overline{w}_{22}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}u_{11}/u_{31} & u_{12}/u_{32}\\ u_{21}/u_{31} & u_{22}/u_{32}\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\overline{w}_{13}\\ \overline{w}_{23}\end{bmatrix}$$

は正規化すると全て同一の値となり，最終的な総合評価値は一定であるということである．

## 4．重み一斉法の例

次に，3章で説明した一般式に当てはめて重み一斉法の例を挙げる．

$$U=\begin{bmatrix}1/6 & 0.6\\ 1/3 & 0.3\\ 1/2 & 0.1\end{bmatrix},\ W=\begin{bmatrix}0.4 & 0.7 & 0.2\\ 0.6 & 0.3 & 0.8\end{bmatrix}$$

であるとする．

まずXを支配代替案としたときの代替案Y，Zの評価基準（A，B）の重みはそれぞれ，

$$\hat{w}_{12}(1)=0.4\cdot\frac{1/3}{1/6}(0.4\cdot\frac{1/3}{1/6}+0.6\cdot\frac{0.3}{0.6})=0.727$$

$$\hat{w}_{22}(1)=0.6\cdot\frac{0.3}{0.6}(0.4\cdot\frac{1/3}{1/6}+0.6\cdot\frac{0.3}{0.6})=0.273$$

$$\hat{w}_{13}(1)=0.4\cdot\frac{1/2}{1/6}(0.4\cdot\frac{1/2}{1/6}+0.6\cdot\frac{0.1}{0.6})=0.923$$

$$\hat{w}_{23}(1)=0.6\cdot\frac{0.1}{0.6}(0.4\cdot\frac{1/2}{1/6}+0.6\cdot\frac{0.1}{0.6})=0.077$$

となる．

次にYを支配代替案としたときの代替案X，Zの評価基準（A，B）の重みはそれぞれ

$$\hat{w}_{11}(2)=0.7\cdot\frac{1/6}{1/3}(0.7\cdot\frac{1/6}{1/3}+0.3\cdot\frac{0.6}{0.3})=0.368$$

$$\hat{w}_{21}(2)=0.3\cdot\frac{0.6}{0.3}(0.7\cdot\frac{1/6}{1/3}+0.3\cdot\frac{0.6}{0.3})=0.632$$

$$\hat{w}_{13}(2) = 0.7 \cdot \frac{1/2}{1/3}(0.7 \cdot \frac{1/2}{1/3} + 0.3 \cdot \frac{0.1}{0.3}) = 0.913$$

$$\hat{w}_{23}(2) = 0.3 \cdot \frac{0.1}{0.3}(0.7 \cdot \frac{1/2}{1/3} + 0.3 \cdot \frac{0.1}{0.3}) = 0.087$$

となる．

同様に，今度は Z を支配代替案としたときの代替案 X，Y の評価基準（A，B）の重みはそれぞれ

$$\hat{w}_{11}(3) = 0.2 \cdot \frac{1/6}{1/2}(0.2 \cdot \frac{1/6}{1/2} + 0.8 \cdot \frac{0.6}{0.1}) = 0.014$$

$$\hat{w}_{21}(3) = 0.8 \cdot \frac{0.6}{0.1}(0.2 \cdot \frac{1/6}{1/2} + 0.8 \cdot \frac{0.6}{0.1}) = 0.986$$

$$\hat{w}_{12}(3) = 0.2 \cdot \frac{1/3}{1/2}(0.2 \cdot \frac{1/3}{1/2} + 0.8 \cdot \frac{0.3}{0.1}) = 0.053$$

$$\hat{w}_{22}(3) = 0.8 \cdot \frac{0.3}{0.1}(0.2 \cdot \frac{1/3}{1/2} + 0.8 \cdot \frac{0.3}{0.1}) = 0.947$$

となる．以上の計算結果を，ステップを繰り返し最終的な収束までの流れを表したのが次の表である．

**表-2　重み一斉の例**

| | $W_{11}$ | $W_{21}$ | $W_{12}$ | $W_{22}$ | $W_{13}$ | $W_{23}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *step*1 | 0.4 | 0.6 | 0.7 | 0.3 | 0.2 | 0.8 |
| | | | .727 | .273 | .923 | .077 |
| | .368 | .632 | | | .913 | .087 |
| | .014 | .986 | .053 | .947 | | |
| *step*2 | .261 | .739 | .493 | .507 | .679 | .321 |
| | | | .586 | .414 | .864 | .136 |
| | .196 | .804 | | | .814 | .186 |
| | .105 | .895 | .32 | .68 | | |
| *step*3 | .187 | .813 | .466 | .534 | .786 | .214 |
| | | | .479 | .521 | .805 | .195 |
| | .179 | .821 | | | .797 | .203 |
| | .169 | .831 | .45 | .55 | | |
| *step*4 | .178 | .822 | .465 | .535 | .796 | .204 |
| | | | .464 | .536 | .796 | .204 |
| | .179 | .821 | | | .797 | .203 |
| | .179 | .821 | .465 | .535 | | |
| *step*5 | .178 | .822 | .465 | .535 | .796 | .204 |
| | $\overline{W}_{11}$ | $\overline{W}_{21}$ | $\overline{W}_{12}$ | $\overline{W}_{22}$ | $\overline{W}_{13}$ | $\overline{W}_{23}$ |

そして，ある支配代替案ごとの評価値を 1 とした評価値と収束した重みの積は，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & 0.167 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.178 \\ 0.822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.767 \\ 0.671 \end{bmatrix}$$ ；代替案 X を支配代替案とした評価値と，収束した重みの積

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1.5 & 0.333 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.465 \\ 0.535 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.303 \\ 1 \\ 0.876 \end{bmatrix}$$ ；代替案 Y を支配代替案とした評価値と，収束した重みの積

$$\begin{bmatrix} 0.333 & 6 \\ 0.667 & 3 \\ 1 & 01 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.796 \\ 0.204 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.489 \\ 1.143 \\ 1 \end{bmatrix}$$ ；代替案 Z を支配代替案とした評価値と，収束した重みの積

となり，これらは正規化するといずれも，$\begin{bmatrix} 0.41 \\ 0.315 \\ 0.275 \end{bmatrix}$ となる．なお，重み一斉法の数学的構造と収束証明は参考文献 7）を参照願いたい．

## 5．評価値一斉法

特に，集団合意形成などの場面における複数の意思決定者や，新たな追加情報による状況の変化などによって評価値が複数出現した場合について，出現した複数の評価値を一つに統一する必要がある．その手法として評価値一斉法を提案する．なお，評価値一斉法に関しては評価基準の重みは一定（安定している）である．

まず評価値一斉法の一般式を記述する．評価基準 2 つ，代替案 3 つの場合とし，評価基準を A，B，代替案を X，Y，Z とすると，異なる三種類の評価値を次のように表現できる．

$$U(i) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ U_{21}(i) & U_{22}(i) \\ U_{31}(i) & U_{32}(i) \end{bmatrix}$$ ；代替案 X を視点とした評価値

$$U(j) = \begin{bmatrix} U_{11}(j) & U_{12}(j) \\ 1 & 1 \\ U_{31}(j) & U_{32}(j) \end{bmatrix}$$ ；代替案 Y を視点とした評価値

$$U(k)=\begin{bmatrix} U_{11}(k) & U_{12}(k) \\ U_{21}(k) & U_{22}(k) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$ ；代替案 Z を視点とした評価値

次に，支配代替案法の基本的なルールに基づき，ある評価値から，新たに次に支配代替案にしたい行の値の逆数を対角要素とし，逆対角要素を 0 にした行列をかけることによって評価値の支配代替案の変更をする演算を行う．つまり，各評価値から別の代替案を視点とする評価値をえる計算法方法はこの場合次のようになる．

① $U(i)\cdot\begin{bmatrix} 1/U_{21}(i) & 0 \\ 0 & 1/U_{22}(i) \end{bmatrix}=U'(i)$ ；視点 X の評価値からの代替案 Y を支配代替案とする変換式

② $U(i)\cdot\begin{bmatrix} 1/U_{31}(i) & 0 \\ 0 & 1/U_{32}(i) \end{bmatrix}=U''(i)$ ；視点 X の評価値からの代替案 Z を支配代替案とする変換式

③ $U(j)\cdot\begin{bmatrix} 1/U_{11}(j) & 0 \\ 0 & 1/U_{12}(j) \end{bmatrix}=U'(j)$ ；視点 Y の評価値からの代替案 X を支配代替案とする変換式

④ $U(j)\cdot\begin{bmatrix} 1/U_{31}(j) & 0 \\ 0 & 1/U_{32}(j) \end{bmatrix}=U''(j)$ ；視点 Y の評価値からの代替案 Z を支配代替案とする変換式

⑤ $U(k)\cdot\begin{bmatrix} 1/U_{11}(k) & 0 \\ 0 & 1/U_{12}(k) \end{bmatrix}=U'(k)$ ；視点 Z の評価値からの代替案 X を支配代替案とする変換式

⑥ $U(k)\cdot\begin{bmatrix} 1/U_{21}(k) & 0 \\ 0 & 1/U_{22}(k) \end{bmatrix}=U''(k)$ ；視点 Z の評価値からの代替案 Y を支配代替案とする変換式

そして，ここで重み一斉法と同様の導出方法を行う（図-3 参照）．

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $U(i)$ | $U(j)$ | $U(k)$ |
| | | $U'(i)$ | $U''(i)$ |
| stepの流れ↓ | $U'(j)$ | | $U''(j)$ |
| | $U'(k)$ | $U''(k)$ | |

**図-3　評価値一斉法の流れ**

つまり，重み一斉法と同様にステップ 1 からステップ 2 は列の平均であり，

$$\frac{U(i)+U'(j)+U'(k)}{3}=U(i+1)$$

$$\frac{U(j)+U'(i)+U''(k)}{3}=U(j+1)$$

$$\frac{U(k)+U''(i)+U''(j)}{3}=U(k+1)$$

となり，

$$U(i+1)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ U_{21}(i+1) & U_{22}(i+1) \\ U_{31}(i+1) & U_{32}(i+1) \end{bmatrix}$$

$$U(j+1)=\begin{bmatrix} U_{11}(j+1) & U_{12}(j+1) \\ 1 & 1 \\ U_{31}(j+1) & U_{32}(j+1) \end{bmatrix}$$

$$U(k+1)=\begin{bmatrix} U_{11}(k+1) & U_{12}(k+1) \\ U_{21}(k+1) & U_{22}(k+1) \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

と導出できる．

これらのステップを重み一斉法同様に数回繰り返し，評価値が収束すると，

$$U(i)=U(i+1),U(j)=U(j+1),U(k)=U(k+1)$$

となり，これら $U(i+1),U(j+1),U(k+1)$ はすべて

$$\begin{bmatrix} \dfrac{1}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \dfrac{1}{1+U_{22}(i+1)+U_{32}(i+1)} \\ \dfrac{U_{21}(i+1)}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \dfrac{U_{22}(i+1)}{1+U_{22}(i+1)+U_{32}(i+1)} \\ \dfrac{U_{31}(i+1)}{1+U_{21}(i+1)+U_{31}(i+1)} & \dfrac{U_{32}(i+1)}{1+U_{32}(i+1)+U_{32}(i+1)} \end{bmatrix}$$

＝

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{U_{11}(j+1)}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \dfrac{U_{12}(j+1)}{U_{12}(j+1)1+U_{32}(j+1)} \\
\dfrac{1}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \dfrac{1}{U_{12}(j+1)+1+U_{32}(j+1)} \\
\dfrac{U_{31}(j+1)}{U_{11}(j+1)+1+U_{31}(j+1)} & \dfrac{U_{32}(j+1)}{U_{12}(j+1)+1+U_{32}(j+1)}
\end{bmatrix}
$$

$$
=
\begin{bmatrix}
\dfrac{U_{11}(k+1)}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \dfrac{U_{12}(k+1)}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1} \\
\dfrac{U_{21}(k+1)}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \dfrac{U_{22}(k+1)}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1} \\
\dfrac{1}{U_{11}(k+1)+U_{21}(k+1)+1} & \dfrac{1}{U_{12}(k+1)+U_{22}(k+1)+1}
\end{bmatrix}
$$

となり，全体を正規化すると同一の値となる．以上が，複数の評価値を一つに収束させる，評価値一斉法である．

## 6．評価値一斉法の例

ここでは，5章の一般式に当てはめた，評価値一斉法の例を示す．評価基準2，代替案3における異なる評価値群を

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & 0.17 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.3 & 1.5 \\ 1 & 1 \\ 1.8 & 0.6 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.1 & 4 \\ 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

とする．上の評価値は，それぞれ比の異なる別の評価値である．そして，これら複数の評価値群の評価値一斉法は，下に示すとおりである．

ステップ1

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \\ 3 & 0.17 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.3 & 1.5 \\ 1 & 1 \\ 1.8 & 0.6 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.1 & 4 \\ 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1.5 & 0.34 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.333 & 5.88 \\ 0.667 & 2.94 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.333 & 0.667 \\ 6 & 0.4 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.167 & 2.5 \\ 0.556 & 1.667 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0.5 \\ 10 & 0.25 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}
$$

ステップ2

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.443 & 0.556 \\ 6.333 & 0.273 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.333 & 1.833 \\ 1 & 1 \\ 1.767 & 0.48 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.2 & 4.127 \\ 0.574 & 2.202 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.29 & 1.799 \\ 1 & 1 \\ 1.839 & 0.491 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.158 & 3.663 \\ 0.544 & 2.037 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0.546 \\ 5.3 & 0.262 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.188 & 3.819 \\ 0.566 & 2.083 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.87 & 0.534 \\ 5 & 0.242 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.348 & 1.874 \\ 1 & 1 \\ 1.742 & 1.454 \end{bmatrix}
$$

ステップ3

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.1 & 0.545 \\ 5.544 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.783 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.182 & 3.87 \\ 0.561 & 2.107 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.323 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.788 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.180 & 3.861 \\ 0.559 & 2.104 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.086 & 0.545 \\ 5.503 & 0.259 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.182 & 3.861 \\ 0.559 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.082 & 0.544 \\ 5.495 & 0.258 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.837 \\ 1 & 1 \\ 1.782 & 0.475 \end{bmatrix}
$$

ステップ4

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.089 & 0.545 \\ 5.514 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.836 \\ 1 & 1 \\ 1.784 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.181 & 3.865 \\ 0.560 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.835 \\ 1 & 1 \\ 1.785 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.181 & 3.861 \\ 0.560 & 2.104 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.086 & 0.545 \\ 5.506 & 0.259 \end{bmatrix}
\quad
\begin{bmatrix} 0.182 & 3.865 \\ 0.561 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.094 & 0.545 \\ 5.525 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.323 & 1.836 \\ 1 & 1 \\ 1.786 & 0.475 \end{bmatrix}
$$

ステップ5

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.090 & 0.545 \\ 5.515 & 0.259 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.324 & 1.836 \\ 1 & 1 \\ 1.785 & 0.475 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0.181 & 3.865 \\ 0.560 & 2.105 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

評価値一斉法は上の流れにもあるように，最初の異なる評価値の数だけ，つまり代替案の視点の数だけステップに評価値が出現するが，最終的に収束した評価値はいずれも正規化すると，

$$
E = \begin{bmatrix} 0.104 & 0.554 \\ 0.322 & 0.302 \\ 0.574 & 0.144 \end{bmatrix}
$$

となり，同一の値となっており，これが唯一の代替案の評価値である．

## 7．おわりに

本稿では，従来の一斉法を「重み一斉法」と名付け，重み一斉法のように単一の評価値，つまり安定している各代替案の評価値によって不安定な評価基準の重みを収束させる手法に加え，新たに評価値そのものが不安定である場合，それを補正し収束させる一斉法として「評価値一斉法」を提案した．繰り返して述べるが，安定した各代替案の評価値のもと，不安定な評価基準の重みのずれを収束させるのが，重み一斉法であり，安定した評価基準の重みのもと，不安定な評価値を収束させる手法が評価値一斉法である．

そして，本稿において示してきたことから"一斉法"は，不安定な要因により，評価値にずれが生じる場合，まず評価値一斉法を用い評価値を一つに収束させる必要がある．そして，さらに評価基準の重みが不安定であるなら，その後さらに重み一斉法を用いることが必要となる．そうすることで，"一斉法"が完全に構築されることになる．

従来のAHPのように代替案を均等に見渡さず，差別的個性を明確にする支配代替案という視点や，評価単価比一定の法則という概念は従来のAHPには存在しないものである．この支配代替案法に始まる独自の視点が，一連の一斉法つまり「重み一斉法」と「評価値一斉法」にも欠かすことのできない重要な定理である．そして，支配代替案法を基礎とする，重み一斉法と評価値一斉法によってAHPの新しい体系が構築されているのである．


参考文献

1) 木下栄蔵:入門AHP，日科技連，2000.
2) 木下栄蔵，中西昌武：AHPにおける新しい視点の提案，土木学会論文集，No. 569/4-36，pp.1-8，1997.
3) 木下栄蔵，中西昌武：支配代替案法における追加データの処理手法「一斉法」の提案，土木学会論文集No. 611/?-42，pp.13-19，1999.
4) 木下栄蔵：支配型AHPと一斉法，オペレーションズリサーチ，48（11），pp.840-848.
5) 高橋磐郎:Saaty型Supermatrix法と木下・中西型一斉法の比較，第40回日本OR学会シンポジウム，pp.5-8，1998.
6) 木下栄蔵編著:AHPの理論と実際，日科技連，2000.
7) E．Kinoshita，K．Sekitani，J．SHI：Mathematical Properties of Dominant AHP and Concurrent Convergence Method，Journal of Operations Research Society of Japan，Vol. 45，No2，pp.198-213，2002.


## 評価値一斉法の提案*


杉浦伸**・木下栄蔵***



本稿ではAHPの新しいモデルである評価値一斉法を提案する．木下・中西らによって，従来のAHPとは違う視点を持つ支配代替案法，さらに支配代替案法の発展系である一斉法が提案されている．本論文では従来の一斉法を"重み一斉法"と命名し，さらに新たなモデルである"評価値一斉法"と区別している．そして，これら一斉法を説明するとともに一斉法が"評価単価比一定"の法則に基づいていることを説明する．


## A Proposal of Concurrent Convergence Method of Evaluation Value*


By Shin SUGIURA**･Eizo KINOSHITA***



This research proposes new AHP model which is named "CCM of Evaluation Value". Dominant AHP was proposed by Eizo KINOSHITA and Masatake NAKANISHI. General AHP and Dominant AHP, there are two types of AHP. Concurrent Convergence Method was also proposed by Eizo KINOSHITA and Masatake NAKANISHI as development model of Dominant AHP. Newly this research names Concurrent Convergence Method "Weight CCM" and proposes CCM of Evaluation Value as different model of "Weight CCM". This research shows difference of "Weight CCM" and CCM of Evaluation Value. Weight CCM and CCM of Evaluation Value follow the law of fixed ratio of evaluation unit as changing bench mark.