【土木計画学研究・論文集 Vol.20 no.3 2003年9月】

予算制約をもつネットワークデザイン問題の貪欲解法*
Greedy Algorithms for the Network Design Problem with a Budget Constraint *

片山 直登**・百合本 茂**
By Naoto KATAYAMA** · Shigeru YURIMOTO**

1. はじめに

予算制約をもつネットワークデザイン問題(*BND*)は，与えられたデザイン費用の予算の範囲内で，ルーティング費用を最小にするリンクを選択し，ネットワークの形状を定める問題である．この問題は道路ネットワーク設計，輸送路線計画や通信ネットワーク設計など多くの分野に現れる基礎的な問題であり，総走行費用や総走行時間が交通量・フロー量に比例するモデルであり，混雑による遅れを考慮しない基本的なモデルである．

これまで，*BND*に対して多くの厳密解法，緩和問題や近似解法が提案されている．Gallo[1]，Ahuja-Murty[2]は，下界平面とよばれる下界関数を用いたナップサック型の緩和問題を示している．片山直登-春日井[3]は，Lagrange緩和問題とその解法を示している．Scott[4]，西村昴-日野泰雄[5]や森津秀夫[6]は，貪欲解法であるフォワード法やバックワード法とその改良法などを提案している．一方，デザイン費用を目的関数に含む固定費用をもつネットワークデザイン問題(*FND*)に対して，Minoux[7]や片山[8]は高速な貪欲解法を示し， Holmberg-Hellstrand[9]はLagrangeヒューリスティック法と分枝限定法を組合せた解法，Sastryら[10]は指数オーダーの最適解法を示している．Guierrezら[11]はロバスト解析を行い，Hellstrand[12]やBalakrishnanら[13]は多面体の研究を行っている．また，Balakrishnan[14]や片山[15]はサーベイを行っている．

*BND*や*FND*に対しては，Benders分解法，Lagrange緩和法，双対上昇法やバックワード法やLagrangeヒューリスティック法などの多くの解法が開発されており，50ノード程度までの疎なネットワークに対しては精度の高い解を求めることができるようになっている．しかしながら，100ノードを超える問題に適用できる解法はほとんど提案されておらず，実用規模の問題に適用できる効率的な解法の開発が課題として残されている．

一方，現実の交通ネットワークでは，混雑による遅れが発生する．このため，このような混雑による遅れを考慮するための条件である利用者均衡条件のもとで，リンクが所与であるネットワークに対するリンクの拡張容量を求めるネットワークデザイン問題に関する研究[16)17)18)]が数多く行なわれている．しかし，この問題は多峰性の非凸関数を制約にもつ非線形最適化問題となるため，数ノードの例題程度の小規模な問題でさえ最適解を求めることが困難であること[16)]が示されている．

また，新たなネットワークを構築する場合や，新たにリンクを追加するといったネットワークの形状を定める問題は，離散的・組合せ的な要因が付加されるため，さらに困難な問題となる．このため，このようなネットワークデザイン問題に対する最適解法・近似解法ともにほとんど開発されていないのが現状である．したがって，現実問題において，利用者均衡を考慮したネットワークの設計を行うためには，*BND*などの基本的な問題を解くことによって，事前にネットワークの形状を定めておくことが必要となる．

*BND*は混合整数計画問題となるため，ノード数が少ない小規模な問題であれば一般の汎用パッケージソフトウエアを用いて最適解が得られる可能性がある．しかし，密なネットワークの場合では，ノード数が30程度であっても，0-1変数であるリンク変数が約400個，フロー変数は約38万個となる．さらにノード数が100では，リンク変数が約5000個，フロー変数は約4900万個となり，一般的な汎用パッケージを用いてそのまま解くことは困難である．

ノード数を$|N|$とすると，リンクを選択してネットワークの形状を定めたときに，*BND*では単に目的関数値を評価するだけでも$O(|N|^3)$の計算量が必要となる．そのため，近似解法の中でも最も単純な貪欲解法であるバックワード法の計算量は$O(|N|^6)$であり，リンクを付け替える単純な局所探索法の計算量は$O(|N|^7)$となり，大変高次な多項式オーダーとなる．近年，タブーサーチ法，アニーリング法や遺伝的アルゴリズムなどのメタ解法が多くの問題に適用されて効果を挙げている．しかし，これらのメタ解法は目的関数値の評価や局所探索を繰り返す解法であるため，*BND*に対して単純に適用すると計算量はさらに高次なものとなり，小規模な問題にさえ適用が困難となる．

本研究では，*FND*に対するMinoux法を*BND*に適用した高速な貪欲的な近似解法とその改良法を提案し，数値実

---

*キーワーズ：交通網計画，道路計画

**正員，工修，流通経済大学流通情報学部
(茨城県竜ケ崎市平畑 120
TEL0297-64-0001, FAX0297-64-0011)

験により提案した解法の有効性を検討する．

2．問題の定式化

需要の発生・集中点，施設，集線装置などのように点で表すことのできるものをノードとよび，道路，路線，通信回線などのように点と点を結ぶ線をリンクとよぶ．車両，貨物，通信などのように，ネットワーク上にはノード間を移動する需要が存在する．この需要の起点・終点のノードの組をODペアとよび，ODペア間の単位時間当たりの移動量をOD需要量とよぶ．

リンクには，デザイン費用とルーティング費用が与えられている．デザイン費用は，道路建設費用，回線設置などのようにリンクを設置・選択するときに発生する固定費用である．ルーティング費用は，ODペア間のOD需要量がリンク上を通過するときに発生する費用で，走行費用，輸送費用，通信費用や，これらの所要時間を費用に換算した変動費用であり，フロー量の線形関数とする．また，使用できるデザイン費用の上限が与えられており，これを予算とよぶ．

ノード集合をN，リンク候補集合をA，選択するリンク集合をA'，ODペアの集合をKとする．ノード集合Nとリンク集合Aから構成されるネットワークを$G(N,A)$と表す．ネットワーク$G(N,A')$上のルーティング費用の総和を$\phi(A')$，リンク(i,j)上のODペアkのフロー量を表すリンクフロー変数をx_{ij}^kとする．リンク(i,j)を選択することによって発生するデザイン費用をf_{ij}，リンク(i,j)におけるODペアkの単位当たりのルーティング費用をc_{ij}^k，デザイン費用のための予算をBとする．ODペアkのOD需要量をd^kとし，ノードnがODペアkの始点であれば$-d^k$，終点であればd^k，それ以外では0である定数をd_n^kと表す．また，

$N^{n-}(A')=\{j\in N|(j,n)\in A'\}$,

$N^{n+}(A')=\{j\in N|(n,j)\in A'\}$

とおく．

ここでは，総ルーティング費用の合計が最小となるようにリンク候補集合AからA'を選択する問題とBNDを考える．このとき，BNDは次の2段階の最適化問題として定式化することができる．

(上位問題)

$$\min_{A'\subseteq A} \quad \phi(A') \tag{1}$$

$$st \sum_{(i,j)\in A'} f_{ij} \le B \tag{2}$$

(下位問題)

$$\phi(A') = \min \sum_{(i,j)\in A'} \left(c_{ij}^k x_{ij}^k + c_{ji}^k x_{ji}^k\right) \tag{3}$$

$$st \sum_{i\in N^{n-}(A')} x_{in}^k - \sum_{j\in N^{n+}(A')} x_{nj}^k = d_n^k \quad n\in N, k\in K \tag{4}$$

$$0\le x_{ij}^k \le d^k, 0\le x_{ji}^k \le d^k \quad (i,j)\in A', k\in K \tag{5}$$

(1)式は，選択したリンク集合A'に対するルーティング費用の総和であり，これを最小化することを表している．(2)式は，選択するリンクのデザイン費用の合計が予算以下であることを表している．(3)式は，リンク集合A'上におけるルーティング費用の総和を最小化することを表している．(4)式は，始点から出たフローが必ず終点に到着することを表すフロー保存式である．(5)式は，リンク(i,j)上のODペアkのフローが非負かつOD需要量以下となる条件である．

上位問題は，予算Bの範囲内で，ルーティング費用の総和ϕが最小となるようにリンク候補集合AからA'を選択するデザイン問題である．下位問題は，選択されたリンク集合A'で構成されるネットワークにおいて，各ODペア間のルーティング費用を最小化するルーティング問題である．なお，上位問題，下位問題ともに，最適解は一意なものとは限らない．このため，最適解が複数ある場合には，そのうちの1つの解を求めるものとする．

上位問題においてリンク候補集合AからA'を選択したときに，下位問題においてルーティング費用cをリンクの長さとしたA'から構成されるネットワーク上で各ODペア間の最短経路問題を解けば，上位問題の目的関数値$\phi(A')$を定めることができる．また，最適なフロー$\boldsymbol{x}$は，このネットワーク上の最短経路にOD需要量を流すことによって求めることができる．

3．従来の貪欲解法

BNDに対する基本的な貪欲解法として，次のようなバックワード法が提案されている．

〈バックワード法〉

[1] すべてのリンクを含む最大ネットワークを初期解とする．このネットワークに対する最適フローを求める．

[2] 各リンクをネットワークから削除したときの総ルーティング費用の増加量を計算する．

[3] “総ルーティング費用の増加量／デザイン費用”が最小であるリンクを求め，このリンクをネットワークから削除する．

[4] デザイン費用の合計が予算以下になれば[5]へ，そうでなければ[2]へ戻る．

[5] 残余予算に対してフォワード法を適用し，終了する．

[5]内のフォワード法は，予算の範囲内で“総ルーティング費用の減少量／デザイン費用”が最大となるリンクを付加していく方法であり，バックワードと逆の解法である．

[1]および[2]では，最短経路問題を解くことが必要となる．そこで，[1]ではダイクストラ法を使用し，[2]ではリンクを削除したネットワーク上の最短経路問題となるため，Murchland法[19]を利用する．Murchland法を用いると，リンクを削除したネットワーク上の最短経路を高速に求めることができる．ダイクストラ法およびMurchland法はOD間の最短距離の1経路を算出する解法である．このため，各OD間に最短経路が複数ある場合，すべての最短経路を算出することはできない．

バックワード法は良い解を算出する貪欲解法ではあるが，リンクを削除するごとに，残りの全リンクに対してそのリンクを削除したときの"総ルーティング費用の減少量／デザイン費用"を再計算するために，最短経路問題を繰り返し解くことが必要となる．Murchland法を用いても，バックワード法の計算量は$O(|A|^2|N|^2)$であり，密で規模の大きな問題に適用することには困難が伴う．

一方，*FND*に対して，Minouxは高速な貪欲解法を示している．*FND*と*BND*の相違点はデザイン費用を目的関数に含むか予算として制約条件にもつかの違いである．このため，*FND*に対するMinoux法を*BND*に適用すれば，効果的な解法となることが期待できる．ここで，*FND*に対するMinoux法を示しておく．

< FNDに対するMinoux法>

[1] すべてのリンクを含む最大ネットワークを初期解とする．このネットワークに対する最適フローを求める．

[2] 各リンクに対して，このリンクを削除したときのリンクの両端点間の最小ルーティング費用パスに，現在，このリンク上を流れているフローを流し代えたときの目的関数の減少量を求め，このリンクを削除したときの目的関数値を減少量の評価値とする．評価値の降順にリンクの削除リストを作成する．

[3] 評価値が正で最大であるリンクを求め，現在のネットワークにおける減少量の評価値を再計算する．減少量の評価値が正であるリンクがなければ終了する．

[4] 評価値がリスト中で最大であるときにリンクを削除する．そうでなければ評価値にしたがって，このリンクをリスト内の降順の適切な位置に格納する．[3]に戻る．

4．BNDに対する貪欲解法

*FND*とは異なり，*BND*はデザイン費用を制約式に含む．このため，*BND*ではリンクを取り除いたときに総ルーティング費用が非減少することになるので，総ルーティング費用の増加量を評価する必要がある．そこで，はじめに"総ルーティング費用の増加量／デザイン費用"である評価値を計算し，この値の小さい順の削除リストを作成しておく．そして，予算以下になるまで，リスト内で最小の評価値をもつリンクの削除を検討する．

実際に特定のリンクの削除を検討する時点では，既に幾つかのリンクが削除されているため，当該リンクの評価値を算出したときとネットワークの形状が変化していることになる．このため，リストに保存されている評価値が，現在のネットワークにおける評価値であるとは限らない．そこで，リスト内で最小の評価値を持つリンクに対してのみ，現在のネットワークにおける評価値を再計算する．この再計算した評価値が依然リスト内で最小であれば，このリンクをネットワークとリストから削除する．このように，実際にリンクが削除の対象になるときだけ当該リンクの評価値を再計算するため，計算量を大幅に減少させることができる．

$G(N,A')$上で，あるリンク(i,j)を削除したときのノードi, j間の最小ルーティング費用パスに，現在リンク(i,j)上を流れているフローを流し代えたときの総ルーティング費用の増加量を$\phi_{ij}(A')$とおく．$\phi_{ij}(A')/f_{ij}$をリンク(i,j)を削除した場合における総ルーティング費用の増加量の評価値$\pi_{ij}(A')$とする．また，リンクを取り除いたときに，あるODペア間が非連結になるときは実行不可能となるが，このときの評価値$\pi_{ij}(A')$は$+\infty$と定義する．

*BND*に対する貪欲解法1を示す．

〈貪欲解法1〉

[1] $G(N,A)$を初期ネットワークとする．リンクの長さを$\boldsymbol{c}$としたネットワーク上で，各ODペア間の最短経路問題を解き，最短経路上にOD需要量を流して，フロー$\boldsymbol{x}$を求める．総ルーティング費用$\phi(A)$を求める．$A':=A$とする．

[2] $^\forall(i,j)\in A'$について，$G(N,A')$における$\phi_{ij}(A')$を求め，$\pi_{ij}(A'):=\phi_{ij}(A')/f_{ij}$とする．

[3] $^\forall(i,j)\in A'$について，$\pi_{ij}(A')$の昇順にリンク(i,j)と$\pi_{ij}(A')$をリストに格納する．

[4] リスト内の$\pi_{ij}(A')$が最小のリンク(i^*,j^*)を選ぶ．

[5] リンク(i^*,j^*)に対して，現在の$G(N,A')$における$\phi_{i^*j^*}(A')$を再計算し，$\pi_{i^*j^*}(A'):=\phi_{i^*j^*}(A')/f_{ij}$とする．
$\pi_{i^*j^*}(A')$がリスト内で最小であれば，[6]へ行く．そうでなければ，$\pi_{i^*j^*}(A')$の値にしたがってリンク(i^*,j^*)と$\pi_{i^*j^*}(A')$をリスト内の昇順の適切な位置に移動し，[4]へ戻る．

[6] リンク(i^*,j^*)と$\pi_{i^*j^*}(A')$をリストから削除し，$A':=A'\setminus(i^*,j^*)$とする．A'に含まれているリンクのデザイン費用の合計が予算以下になれば[7]へ、そうでなければ[4]へ戻る．

[7] 残余予算に対してフォワード法を適用し，終了する．

ここで，":="は右辺の数値や集合を左辺に代入することを表し，"\"は集合の要素を取り除くことを表し

ている．

[4]において$\pi_{ij}(A')$が最小のリンク(i^*,j^*)を選んでいるにもかかわらず，[5]において$\pi_{i^*j^*}(A')$が最小であるかを再び判断している．これは，[4]において$\pi_{ij}(A')$を計算した時点のネットワークの形状が現在のネットワークのものとは異なっているため，[5] において現在のネットワークで再計算すると$\pi_{i^*j^*}(A')$が変化している可能性があるためである．

この貪欲解法では，リンク(i,j)が実際に削除の対象となる場合に限って増加量の評価値を計算している．このため，[7]を除けば計算量は$O(|A|^2|N|^2)$であるが，平均的には$O(|A||N|^2)$となることが知られている[7]．また，[7]では，一般に数本のリンクの付加を行うだけであるので，計算時間への影響は少ない．

貪欲解法1では，*FND*に対するMinoux法と同様に総ルーティング費用の増加量の評価値を近似値として求めている．この近似値は2点間の最短経路問題を解くことによって求めることができるので，その計算量は$O(|N|^2)$となる．一方，1本のリンクが削除されたネットワーク上の全ノード間の最短経路問題は，Murchland法を用いて$O(|N|^2)$で最適に解くことができる．このため，$G(N,A)$上でリンク(i,j)を削除したときの総ルーティング費用の厳密な増加量を$\omega_{ij}(A)$とおくと，Murchland法を用いて$\omega_{ij}(A)$を算出しても計算量は$O(|N|^2)$であり，近似値として求めた場合と計算量は変化しない．

そこで，貪欲解法1の[2]および[5]における総ルーティング費用の増加量の評価値を厳密に算出するように改良した方法を貪欲解法2とする．貪欲解法2は，貪欲解法1の[2]を[2']，[5]を[5']に変更したものとなる．

〈貪欲解法2〉

[2'] $\forall(i,j)\in A'$について，$G(N,A')$における$\omega_{ij}(A')$を求め，$\pi_{ij}(A'):=\omega_{ij}(A')/f_{ij}$とする．

[5'] リンク(i^*,j^*)に対して，現在の$G(N,A')$における$\omega_{i^*j^*}(A')$を再計算し，$\pi_{i^*j^*}(A'):=\omega_{i^*j^*}(A')/f_{ij}$とする．$\pi_{i^*j^*}(A')$がリスト内で最小であれば，[6]へ行く．そうでなければ，$\pi_{i^*j^*}(A')$の値にしたがってリンク(i^*,j^*)と$\pi_{i^*j^*}(A')$をリスト内の昇順の適切な位置に移動し，[4]へ戻る．

5．数値実験

提案した貪欲解法を評価するために，ランダムデータおよび高速道路データを対象とした2種類の数値計算を行った．使用した計算機および言語は，IBM PC互換機，CPU Pentium1.7GHz，メモリ256Mb，OS Windows2000，Microsoft Fortran Power Station Ver.4である．

(1) ランダムデータ

ランダムデータを用いて，Scottのバックワード法(Scott法)，提案した貪欲解法1および貪欲解法2を比較した．100×100の平面上にランダムにノードを発生させ，ノード間のユークリッド距離値をデザイン費用とした．ルーティング費用はすべてのODペアで同一とし，デザイン費用に比例するものとした．予算制約は，デザイン費用をリンクの重みとした最小木のデザイン費用の2倍と4倍に設定した．すべてのノード対間のリンクを候補集合A，すべてのノード対をODペア集合Kとし，すべてのOD需要量を同一とした．

ノード数は10から100までとし，同一ノード数では各10組のデータセットを使用した．使用したランダムデータの問題の規模を表1に示す．30ノードではリンク変数が435個，フロー変数が約38万個となり，100ノード数ではリンク変数が4950個，フロー変数は約4900万個と大規模なものとなる．また，近似解の誤差を定めるために，Lagrange緩和法[3]を用いて下界値を算出した．

各解法を用いて，“予算=最小木の2倍”のデータセットから得られた近似解の目的関数値の平均誤差と1問当りの平均計算時間を表2に，“予算=最小木の4倍”の結果を表3に示す．なお，誤差は，

(近似解の目的関数値－Lagrange緩和法による下界値)

／Lagrange緩和法による下界値×100

の平均値である．また，貪欲解法１を用いて，“予算=最小木の2倍”，50ノード，1225リンクのデータに対して求めた解のネットワークの例を図1に示す．

貪欲解法1と2の間では，誤差に顕著な差は見られない．Scott法と誤差を比べると，貪欲解法1および2では，“予算＝最小木の2倍”のノード数60で0.3%，それ以外では0.1%程度悪い解となっている．厳密な貪欲解法であるScott法の方が，提案した解法よりも良い解が求められることが分かる．

貪欲解法1および2の両方において，問題の規模が大きくになるにしたがって，誤差は増加している．“予算=最小木の2倍”では，50ノードで誤差が1.5%，100ノードで2.5%である．また，“予算=最小木の4倍”では，50ノードで誤差が0.3%，100ノードで0.5%である．“予算=最小木の4倍”に比べて“予算=最小木の2倍”の誤差が大きくなっているのは，次のような理由が挙げられる．予算が少ないため選ばれるリンク数が少なく，解は比較的疎なネットワークとなる．このようなネットワークでは各OD間の最小費用路のルーティング費用と経路迂回のルーティング費用の差が大きく，個々のリンクの選択がルーティング費用に与える影響が大きくなる．このため，適切なリンクが選択されないとルーティング費用が大きく増加することになり，これが目的関数値を悪化させていると考えられる．また，デザイン費用に比べて予算がそれ

表－１　ランダムデータの問題の規模

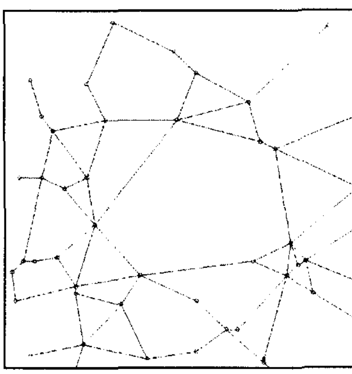
ノード数	リンク変数	ODペア数	フロー変数
10	45	45	4050
20	190	190	72200
30	435	435	378450
40	780	780	1216800
50	1225	1225	3001250
60	1770	1770	6265800
70	2415	2415	11664450
80	3160	3160	19971200
90	4005	4005	32080050
100	4950	4950	49005000

表－２　近似解の比較（予算=最小木の2倍）

ノード数	Scott法		貪欲解法1		貪欲解法2	
	誤差(%)	計算時間(秒)	誤差(%)	計算時間(秒)	誤差(%)	計算時間(秒)
10	0.22	0.0	0.30	0.0	0.30	0.0
20	0.49	0.1	0.53	0.0	0.53	0.0
30	0.69	1.1	0.64	0.0	0.64	0.0
40	0.98	6.3	1.10	0.0	1.09	0.1
50	1.48	23.7	1.53	0.2	1.53	0.2
60	1.34	69.7	1.66	0.4	1.62	0.3
70	1.75	175.5	1.80	0.7	1.83	0.6
80	1.84	390.8	1.87	1.1	1.92	0.9
90	2.06	805.6	2.20	1.7	2.18	1.4
100	2.47	1500.7	2.48	2.5	2.52	2.1

表－３　近似解の比較（予算=最小木の4倍）

ノード数	Scott法		貪欲解法1		貪欲解法2	
	誤差(%)	計算時間(秒)	誤差(%)	計算時間(秒)	誤差(%)	計算時間(秒)
10	0.01	0.0	0.01	0.0	0.01	0.0
20	0.09	0.1	0.10	0.0	0.10	0.0
30	0.11	1.2	0.11	0.0	0.11	0.0
40	0.15	6.2	0.18	0.1	0.17	0.1
50	0.26	23.5	0.28	0.2	0.28	0.1
60	0.27	69.2	0.29	0.4	0.30	0.3
70	0.31	174.6	0.34	0.6	0.33	0.6
80	0.31	388.9	0.36	1.0	0.37	0.9
90	0.35	802.5	0.40	1.6	0.38	1.4
100	0.48	1495.7	0.53	2.5	0.53	2.1



図－１　貪欲解法1による解のネットワーク
（予算=最小木の2倍，50ノード）

ほど大きくないために，最適解において予算に余剰が生じ易くなり，これによって主問題と双対問題の間の双対ギャップが大きくなり，Lagrange緩和法による下界値が悪化していることも要因と考えられる

Scott法における計算時間は，50ノードに対して24秒程度であり，100ノードに対して1500秒程度である．ノード数$|N|$に対してScott法の計算量は$O(|N|^6)$であり，計算時間はノード数の6乗に比例すると考えられる．実際，100ノードの計算時間は50ノードの計算時間の約63≒2^6倍であり，ノード数が2倍になると約2^6倍の計算時間が必要となる．100ノードに対して1500秒であることを考慮すると，Scott法をさらに大規模な問題に対してそのまま適用することは困難であることが分かる．一方，貪欲解法1や貪欲解法2では，50ノードに対して0.2秒，100ノードに対して2.1～2.5秒で近似解を算出しており，さらに大規模な問題に対しても有効な解法であることが分かる．

貪欲解法1に比べて，貪欲解法2の計算時間は10～20%程度短くなっている．これは，[2']および[5']において厳密な目的関数値の増加量を求めているため，アルゴリズムの[5']で$\pi_{ij}^{*}(A')$がリスト中で最小となることが多くなり，$\pi_{ij}^{*}(A')$の再格納や再計算の回数が減少するため，計算時間が減少していると考えられる．

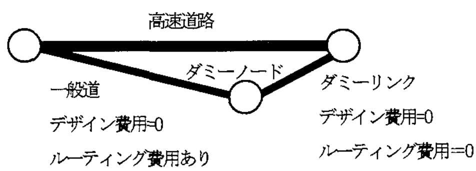
(2) 高速道路データ

高速道路ネットワークをイメージしたデータを用いた数値例を計算した．都道府県庁所在地(ただし，北海道は道北，道東，道央，道南に4分割，長野県は東部，西部に2分割，沖縄を除く)をノードとし，長さが400km以下のリンクを候補集合とした．ただし，本州－北海道間は青函連絡船，本州－四国間は3本の本四架橋，本州－九州間は関門橋の利用に限定した．図2に対象とするネットワークを示す．

また，一般道を考慮するため，各リンクに対して図3に示すような高速道路に対応するデザイン費用をもつリンク，一般道に対応するデザイン費用が0であるリンク，およびダミーノードとダミーリンクを設定した．

ODペアは全ノード対とし，OD需要量は平成７年度の代表交通機関別府県相互間純流動量の自動車利用量を用いた．デザイン費用は，高速道路ではノード間距離に対応させ，一般道では既存のものとして0とし，ダミーリンクも0に設定した．なお，ノード間距離には貨物自動車営業キロ程を用いた．また，ルーティング費用は走行時間に対応させ，高速道路では“ノード間距離／80km”，一般道では“ノード間距離／30km”，ダミーリンクでは0とした．予算は総延長距離に対応させ，7000，8000，9000に設定し，貪欲解法2を用いて数値計算を行った．問題の規模を表4に示す．候補リンク数は328本，フロー変

図－2　対象ネットワーク



図－3　ダミーリンクとダミーノード

表－4　高速道路データの問題規模

ノード数	ODペア数	候補リンク数
50	1225	328
ダミーノード数	一般道＋ダミーリンク数	フロー変数
328	654	1284456

表－5　高速道路データの計算結果

予算	総デザイン費用(総延長)	総ルーティング費用（台キロ）	高速道路利用率（%）	計算時間（秒）
7000	6980	19018890	94.6	10
8000	7997	18174424	100.0	8
9000	8964	17857498	100.0	7

数は約130万個である．

高速道路の総延長に対応する総デザイン費用および台キロに対応する総ルーティング費用，台キロベースの高速道路利用率および計算時間を表5に示す．また，予算7000の解における高速道路部分を図4に，予算8000の解を図5に，予算9000の解を図6に示す．

ODノードを都道府県庁所在地などの50地点に集約しているため，現実とはある程度の乖離がみられる．しかし，都道府県庁を通過しない高速道路以外に関しては，ある程度再現できていると思われる．より詳細なデータを用いて計算を行えば，さらに現実的な分析を行うことができると考える．

ここでは，高速道路ネットワークをイメージしたデータを対象として，簡単な数値例を示した．しかし，現実の高速道路を評価するためには，走行時間短縮，走行費用節約，定時性，採算性，地域からのインターチェンジへのアクセス，空港・新幹線駅や拠点都市へのアクセス，NO_XやSPM排出量削減など，数多くの項目を考慮しなければならない．しかしながら，走行時間短縮量や走行費用節約量，NO_XやSPM排出量削減量などは平均値として目的関数に取り込むことが可能であり，インターチェンジへのアクセスや空港・新幹線駅や拠点都市へのアクセスなども制約条件として容易に取り込むことができる．このような要因や制約を取り込んだモデルに対しても，評価値の変更や，制約を満たさない解の評価値を$+\infty$に設定するなどの処置を行うことによって，提案した貪欲解法を適用させることが可能である．

6．おわりに

本研究では，予算制約をもつネットワークデザイン問題に対する定式化を示し，この問題に対する2種類の貪欲解法を提案した．

ランダムデータを用いた数値実験によって，提案した2つの解法では予算が最小木の2倍の場合は2.5%以下，予算が最小木の4倍では0.5%以下の解を求めることができ，Scott法と0.3%以内の差の解を算出できることを示した．また，ノード100までの問題に対して2.5秒以内で近似解を求めることができることを示し，大規模な問題に対しても有効な解法であることを示した．さらに，高速道路網をイメージした数値例も示し，ODノードが50であるデータに対して10秒以内で近似解を求めることができた．

対象としたモデルはネットワークを新規に設計するものである．しかし，既存のリンクの費用を0とおけば，既存の交通ネットワークに対して，整備予算制約のもとで追加整備ネットワークを求める問題に適用することができる．さらに，さまざまな整備予算シナリオを設定して，それぞれに対して分析を行い，各シナリオを評価することも可能である．

また，対象としたモデルは総走行費用や総走行時間が交通量に比例するモデルであり，混雑による遅れを考慮しない基本的なモデルである．現実の交通ネットワーク計画，特に地域内の道路ネットワーク計画では，混雑による遅れを考慮することが必要である．しかしながら，混雑による遅れを表す利用者均衡条件を考慮し，拡張容量を求めるだけではなく，追加リンクも求める計画問題に対しては，実用的な解法が開発されていないのが現状である．そこで，はじめに利用者均衡条件を考慮しない基本モデルである*BND*を解くことによって追加リンクを

図－4　ネットワーク(予算7000)

図－5　ネットワーク(予算8000)

図－6　ネットワーク(予算9000)

求め，続いてリンクを追加したネットワークを対象として，利用者均衡条件を考慮したリンク拡張容量を決定する問題を解く，のように2つの解法を組合せることによって，利用者均衡条件のもとで追加リンクおよび拡張容量を決定する問題に適用することが可能であると考えられる．

本論文では，大規模な問題にも適用可能な高速な貪欲解法を提案した．一方，近年，タブーサーチ法，アニーリング法や遺伝的アルゴリズムなどのメタ解法が多くの問題に適用されて大きな成果を挙げている．しかし，*BND*は$O(|N|^4)$個の変数を含み，単に目的関数値を評価するだけでも$O(|N|^3)$である大きな計算量を必要とする問題である．このため，リンク付替えのような単純な局所探索法でさえ計算量は$O(|N|^7)$となる．メタ解法では目的関数値の評価や局所探索を膨大な回数繰り返す必要があるために，メタ解法を*BND*に単純に適用すると計算量はさらに高次なものとなり，小規模な問題にさえも適用が困難となる．しかしながら，提案した高速な貪欲解法の概念を局所探索やメタ解法に組み込むことによって，実用的な解法を開発できる可能性があると考えられる．

参考文献

1) Gallo,G.: lower planes for the network design problem, Networks, Vol.13, pp.411-425, 1983.

2) Ahuja,R. and Murty,V.: new lower planes for the network design problem, Networks, Vol.17, pp.113-127,1987.

3) 片山 直登, 春日井 博: ラグランジュ緩和法を用いた予算制約をもつネットワークデザイン問題の解法, 日本経営工学会誌, Vol.46, pp.21-27, 1995.

4) Scott,A.: the optimal network problem: Some computational procedures, Transportation Research, Vol.3, pp.201-210, 1969.

5) 西村 昂，日野 泰雄: 最適ネットワーク構成に関する一考察，土木学会論文報告集，Vol.250, pp.85-97, 1976.

6) 森津 秀夫: 最適交通網構成手法に関する基礎的手法，神戸大学，1984.

7) Minoux,M.: network synthesis and optimum network design problems: models, solution methods and applications, Networks, Vol.19, pp.313-360,1989.

8) 片山 直登: ネットワークデザイン問題の近似解法，流通経済大学流通情報学部開校記念論文集，pp.171–191, 1997.

9) Holmberg,K. and Hellstrand,J.: solving the uncapacitated network design problem by a Lagrangean heuristic and branch-and-bound, Operations Research, Vol.46, pp.247-259, 1998.

10) Sastry,T.: algorithms and complete formulations for the network design problem, Indian Institute of Management,

Working Paper, 1997.
11) Guierrez,G. et al.: a robustness approach to uncapacitated network design problems, European Journal of Operations Research, Vol.94, pp.362-376, 1996.
12) Hellstrand,J. et al.: a characterization of the uncapacitated network design polytope, Operations Research letters, Vol.12, pp.159-163, 1992.
13) Balakrishnan,A. et al.: Heuristics, LPs, and trees on trees: network design analyses, Operations Research, Vol.44, pp.478-496, 1996.
14) Balakrishnan,A. et al.: Network design (in annotated bibliographies in combinatorial optimization), John Wiley & Sons,1997.
15) 片山 直登: ネットワークデザイン問題(in 応用数理計画ハンドブック), 朝倉出版, pp.1184-1282, 2002.
16) Marcotte,P: network optimization with continues control parameters, Transportation Science, Vol.17, pp.181-197, 1983.
17) Friesz,T.L. et al.: sensitivity analysis based heuristic algorithms for mathematical programs with variational inequality constraints, Mathematical Programming, Vol.48, pp.265-284, 1990.
18) 片山 直登: 連続型ネットワークデザイン問題の近似解法, 流通経済大学流通情報学部紀要, Vol.3, pp.1-14, 1999.
19) Steenbrink,P.: optimization of transport networks, John Wiley & Sons,1974.

予算制約をもつネットワークデザイン問題の貪欲解法*

片山　直登**・百合本　茂**

予算制約をもつネットワークデザイン問題は，与えられたデザイン費用の予算の範囲内で，ルーティング費用を最小にするようなリンクを選択し，ネットワークの形状を定める問題である．本論文では，この問題に対して，固定費用をもつネットワークデザイン問題に対するMinoux法を適用した解法と，これを改良した解法の2種類の貪欲的な近似解法を提案した．ランダムデータを用いた数値実験によって，ノード数100,リンク数4950までの問題に対して，2.5秒以内の計算時間で誤差2.5%以下の近似解を求めることができることを示した．また，高速道路網をイメージした数値例も示した．

Greedy Algorithms for Network Design Problem with a Budget Constraint*

By Naoto KATAYAMA**・Shigeru YURIMOTO***

Network design problem with a budget constraint consists of selecting a subset of arcs that minimizes the total routing cost subject to a budget constraint and designing a network. In this Paper, we propose two approximate solution methods which arc the Minoux type solution method and its improvement method. Our computational results for random data sets up to 100 nodes and 4950 arcs show that our approximate solution methods are guaranteed to be within 2.5% of optimality and 2.5 seconds of computation time. Finally we show numeric examples for the Japan highway network.