

Mixed Mode ネットワーク均衡モデルによるP & Rシステムの需要予測*

Demand Forecasting for Park and Ride system through Mixed-Model Network Equilibrium Model

溝上 章志** 河内 誠***

By Shoshi MIZOKAMI and Makoto KOUCHI

1. はじめに

地方都市圏においても朝夕の通勤・通学時の交通渋滞が深刻化している中で、道路整備のようなハードな対策と共に、交通システムマネジメント (TSM) や交通需要マネジメント (TDM) といったソフトな交通渋滞対策が試みられている。その中でも、交通利用者の時間や経路・手段の変更、自動車の効率的利用、発生源の調整など、人の交通行動そのものを調整・管理する TDM 施策は、今後、その重要性が増していくと考えられる。

TDM 施策の 1 つである P & R システムは、各地で導入のための試行実験が実施され、その有用性が再評価されてきている。しかし、P & R システムは、端末部の自動車と幹線部の公共交通という旧来型の交通機関を効果的に組み合わせるというシステム改善にすぎず、既存の公共交通機関に比べてそのサービス水準が飛躍的に改善されるわけではないことから、その需要予測や導入効果の評価はなかなか困難である。そのアプローチとしては、交通ネットワーク上での交通フローだけでなく、P & R 路線や駐車場位置・規模などをも検討することができるネットワーク均衡分析が有用であろう。本研究は、ネットワーク均衡モデルに基づいた P & R システムの需要予測手法を提案するものである。

本研究では、P & R のような複数の代表交通手段の組合せで 1 つの代替交通手段となっているものを Mixed Mode として、自動車や鉄道などの単一の代表交通手段と区別する。その上で、P & R システムの需要を予測するため、Mixed Mode という交通機関選択を含む Mixed Mode ネットワーク均衡モデルを数学的に定式化し、その解法を開発することを目的とする。まず、第 2 章で Mixed Mode ネットワーク均衡を定義し、Mixed Mode 選択、ターミナル選択、端末手段選択を Nested Logit モデルを用いて表現した交通ネットワーク均衡モデル (以後、[NLSUE/ Mixed Mode (Nested Logit based Stochastic User Equilibrium Model with Elastic Mixed Mode Demand)] と記す) が満足すべき必要条件を記述

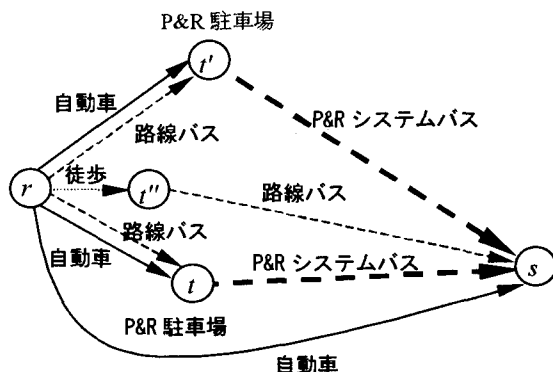


図-1 MixedMode ネットワーク

する。第 3 章では、上記の必要条件と等価な数理最適化問題を定式化し、その十分条件を示すことによって解の一意性を証明する。次に、第 4 章では [NLSUE/ Mixed Mode] モデルの計算アルゴリズムについて述べる。さらに、「熊本市 P & R に関するアンケート調査」データによって推定したターミナル選択モデル、端末手段選択モデルを用いて、モデルネットワーク上で主要サービス要因に対する感度分析を行い、本モデルとアルゴリズムのフィージビリティを検討する。最後に第 5 章で本研究の成果と今後の課題について述べる。

2. Mixed Mode ネットワーク均衡の定義

(1) Mixed Mode ネットワーク均衡モデル

アクセス部は自動車、幹線部は鉄道やバスで構成される P & R システムのように、複数の代表交通手段の組合せで 1 つの代替手段となる交通手段を Mixed Mode と定義し、自動車などの単一モードと区別する。このような Mixed Mode を取り扱うネットワーク分析では、従来、アクセス部分の自動車ネットワークを自動車を代表手段とするネットワークとは別個に取り扱ってきた。しかし、P & R システムの路線や駐車場位置などを計画する際には、アクセス部における交通需要とネットワークパフォーマンスとの均衡をその他の部分と同様に取り扱う必要がある。このような問題を取り扱うネットワーク均衡モデルを Mixed Mode ネットワーク均衡モデルと定義する。

図-1 は P & R システムが導入されている Mixed Mode ネットワークを模式的に示したものである。発地 r から

*キーワード：公共交通需要、ネットワーク交通流、TDM

**正会員 工博 熊本大学工学部環境システム工学科

(〒860-8555 熊本市黒髪 2-39-1,

TEL/FAX: 096-342-3541, e-mail: smizo@gpo.kumamoto-u.ac.jp)

***正会員 修(工学) 熊本県

着地 s までの代表交通手段は、自動車を単一の代表手段とするもの、P&R システム (P&R 駐車場として t と t' が、アクセス手段として自動車か路線バスを利用可能な Mixed-Mode)、路線バス (バス停 t'' までは徒歩) という3種類に分類できる。このような Mixed Mode と自動車の競合を考慮したネットワーク均衡モデルを構築するためには、

- 1) Mixed Mode の選択構造と、
 - 2) ネットワークフローの均衡状態
- を表現する数学的条件の記述が必要である。さらに、
- 3) これらの条件を同時に満足する計算可能な数学モデルの定式化、およびその十分条件と解法の開発
- が求められる。

1)については、主として、P&R 駐車場とアクセス手段と経路の組合せから成る Mixed Mode の経路選択肢を自動車の代替選択肢として設定する方法と、下位レベルで P&R 駐車場とアクセス手段と経路の選択を、上位レベルで Mixed Mode と単一モードとの選択という段階的選択構造を想定する方法が考えられる。後者は、Mixed Mode 経路を単に自動車経路の代替経路と考えるのではなく、人のアクセス手段・経路、ターミナル、代表手段選択の段階的選択構造を明示的にモデル化できること、および後者の特殊なケースとして前者が表現できることなどの理由から、本研究では後者の方法を採用し、その記述には Nested Logit モデルを適用する。

一方、2)のネットワークフローの均衡状態の記述については、利用者効用の不確実性が反映される確率的利用者均衡がより一般的で拡張可能性が高いことから、有用であると考えられる。

Mixed Mode を含むネットワーク均衡モデルには、端末部分に P&R システム用の自動車ネットワークを明示的に設定した Fernandez ら¹⁾のモデルや、段階的手段選択構造としているものの自動車ネットワーク上の均衡状態に確定的利用者均衡を仮定した宮城²⁾のモデルがある。本モデルは両者を拡張し、図-2に示す段階的選択構造とネットワーク上での確率的利用者均衡を満足する [NLSUE/Mixed Mode] モデルを提案する。勿論、特に経路選択のように経路選択肢自体が物理的なネスト構造を持っている場合には、図-2の意志決定のネスト構造は図-1の物理的ネットワークのそれと無関係に設定できない。しかし、ここでは以後の数理モデルを簡略化するために、意志決定のネスト構造をネットワーク構造とは独立に取り扱っていく。

(2) 定式化のための仮定と変数の定義

モデルの定式化を行うに当たり、簡略化のために以下のような仮定を設ける。

- 1)単一の代表交通手段としての自動車では発着地間で、Mixed Mode でも発地と P&R 駐車場間で確率的利用者

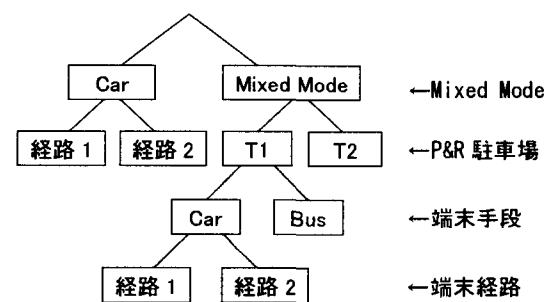


図-2 NLSUE/MixedMode ネットワークモデルの選択構造

- 均衡が成立する。
- 2)自動車以外の代表交通手段としては、路線バスとP&R システムが存在するが、Mixed Mode 選択段階では両者を同一の手段とみなす。したがって、以後は P&R システム駐車場とバス停を乗換えターミナルと記す。
- 3)路線バスへのアクセスは徒歩のみとし、P&R システムへは自動車と路線バスが利用可能である。
- 4)アクセス手段としての自動車には P&R 駐車場で料金などのコストを別途加算することによって、アクセス路線バスと区別する。
- 5)Mixed Mode の幹線部の所要時間は交通量に依存せず、固定値とする。

次に、本モデルで扱う変数を以下のように定義する。

■所要時間

$t_a(\omega)$: 自動車ネットワーク上のリンク a ($\in A$) のリンクコスト関数

t_a^m : P&R, および既存バスネットワーク上のリンク a ($\in M$) の走行時間 (所与の定数)

■リンク交通量

x_a : 自動車ネットワーク上のリンク a のリンク交通量

x_a^m : P&R, および既存バスネットワーク上のリンク a のリンク交通量 (乗客数)

■OD 交通量(rs 間, rt 間, ts 間)

$\bar{q}_{rs}$: OD ペア rs 間の総トリップ数

q_{rs} : OD ペア rs 間の自動車利用トリップ数

$\hat{q}_{rs}$: OD ペア rs 間の Mixed Mode 利用トリップ数

$\hat{q}_{rs,t}$: OD ペア rs 間で乗換えターミナル t を利用するトリップ数

$\hat{q}_{rs,t}^a$: OD ペア rs 間で乗換えターミナル t を利用する端末自動車トリップ数

$\hat{q}_{rs,t}^b$: OD ペア rs 間で乗換えターミナル t を利用する端末バstriップ数

$\hat{q}_{r,t}$: 起点を r とする Mixed Mode トリップのうち、乗換えターミナル t を利用するトリップ数

$\hat{q}_{t,s}$: 終点を s とする Mixed Mode トリップのうち、乗換えターミナル t を利用するトリップ数

■経路交通量

f_k^{rs} : P&R 利用者を除く自動車トリップで OD ペア rs

間第 k 経路を利用するトリップ数

$\hat{f}_l^{rs,t}$: P&R 利用の端末自動車トリップで OD ペア rt 間第 l 経路を利用するトリップ数

$\hat{f}_k^{rs,t}$: P&R, および既存バスネットワーク上の OD ペア ts 間第 k 経路を利用するトリップ数 (乗客数)

■ダミー変数

δ_{ak}^{rs} : 自動車による OD ペア rs 間第 k 経路が自動車ネットワーク上のリンク a を含むとき 1, そうでないとき 0 をとるダミー変数

δ_{al}^{rt} : P&R 利用の自動車トリップで自動車による OD ペア rt 間第 l 経路が自動車ネットワーク上のリンク a を含むとき 1, そうでないとき 0 をとるダミー変数

$\delta_{ak}^{rs,t}$: P&R, または既存バスネットワーク上の OD ペア rs 間第 k 経路が P&R, および既存バスネットワーク上のリンク a を含むとき 1, そうでないとき 0 をとるダミー変数

■利用可能経路集合

K_{rs}^a : 自動車ネットワーク上における自動車による OD ペア rs 間の利用可能経路集合

$K_{r,t}^a$: 自動車ネットワーク上における起点 r から乗換えターミナル t までの利用可能経路集合

K_{ts}^a : P&R, 既存バスネットワーク上における乗換えターミナル t から終点 s までの利用可能経路集合

■P&R 駐車場関連

T_{rs} : OD ペア rs 間で P&R, または既存バス利用の場合の利用可能な乗換えターミナル集合

π_t : ターミナル利用コスト (P&R 駐車料金など)

(3) 解が満足すべき必要条件

[NLSUE/Mixed Mode] において, アクセス手段, 乗換えターミナル, Mixed Mode の各選択需要, およびターミナルへのアクセスを含む自動車ネットワーク上の交通需要が満足すべき均衡条件は以下のように表される。

(a) 端末手段選択モデル

乗換えターミナル t への路線バス, 自動車の選択需要は,

$$\hat{q}_{rs,t}^b = \hat{q}_{rs,t} \frac{\exp(-\theta_2 \hat{c}_{rs,t}^b)}{\exp\{-\theta_2(\hat{c}_{rs,t}^a + \pi_t)\} + \exp(-\theta_2 \hat{c}_{rs,t}^b)} \quad (1)$$

$$\hat{q}_{rs,t}^a = \hat{q}_{rs,t} \frac{\exp\{-\theta_2(\hat{c}_{rs,t}^a + \pi_t)\}}{\exp\{-\theta_2(\hat{c}_{rs,t}^a + \pi_t)\} + \exp(-\theta_2 \hat{c}_{rs,t}^b)} \quad (2)$$

で表される。ここで, θ_2 は未知パラメータ, $\hat{c}_{rs,t}^b$ ($\hat{c}_{rs,t}^a$) は rt 間を路線バス (自動車), ts 間を P&R, もしくは路線バスを利用するときの rs 間 Mixed Mode 利用の所要時間で,

$$\hat{c}_{rs,t}^a = \hat{c}_{r,t}^a + \hat{c}_{t,s}^m = -\frac{1}{\mu_2} \ln \sum_{k \in K_{r,t}^a} \exp(-\mu_2 c_k^{r,t}) + \hat{c}_{t,s}^m \quad (3)$$

$$\hat{c}_{rs,t}^b = \hat{c}_{r,t}^b + \hat{c}_{t,s}^m \quad (4)$$

である。ここで, μ_2 は未知パラメータ, $c_k^{r,t}$ は自動車による rt 間第 k 経路所要時間 ($k \in K_{r,t}^a$), $\hat{c}_{r,t}^b$ ($\hat{c}_{r,t}^a$) は Mixed Mode 利用の rt 間路線バス (自動車) による合成費用, $\hat{c}_{t,s}^m$ は Mixed Mode 利用の ts 間 P&R, または路線バス利用の場合の所要時間であり, 端末手段には依存せず同じであるから, 式(1)と(2)は

$$\hat{q}_{rs,t}^b = \hat{q}_{rs,t} \frac{\exp(-\theta_2 \hat{c}_{rs,t}^b)}{\exp\{-\theta_2(\hat{c}_{rs,t}^a + \pi_t)\} + \exp(-\theta_2 \hat{c}_{rs,t}^b)} \quad (5)$$

$$\hat{q}_{rs,t}^a = \hat{q}_{rs,t} \frac{\exp\{-\theta_2(\hat{c}_{rs,t}^a + \pi_t)\}}{\exp\{-\theta_2(\hat{c}_{rs,t}^a + \pi_t)\} + \exp(-\theta_2 \hat{c}_{rs,t}^b)} \quad (6)$$

のように書き換えられる。つまり, 端末手段選択需要は, rt 間の費用と乗り換えターミナル t での利用コスト, 例えば, P&R 駐車料金だけに依存する。

(b) ターミナル選択モデル

乗り換えターミナル t の選択需要は

$$\hat{q}_{rs,t} = \hat{q}_{rs} \frac{\exp\{-\beta(\hat{c}_{rs,t} + \pi_t)\}}{\sum_{t \in T_{rs}} \exp\{-\beta(\hat{c}_{rs,t} + \pi_t)\}} \quad (7)$$

で与えられる。ここで, β は未知パラメータ, $\hat{c}_{rs,t}$ はターミナル t を経由する Mixed Mode 利用による rs 間所要時間であり, 次式の合成費用で与えられる。

$$\hat{c}_{rs,t} = -\frac{1}{\theta_2} \ln[\exp\{-\theta_2(\hat{c}_{rs,t}^a + \pi_t)\} + \exp(-\theta_2 \hat{c}_{rs,t}^b)] \quad (8)$$

(c) Mixed Mode 選択モデル

rs 間の Mixed Mode 選択需要は次式で与えられる。

$$\hat{q}_{rs} = \bar{q}_{rs} \frac{\exp(-\theta_1 \Phi_{rs})}{\exp(-\theta_1 c_{rs}) + \exp(-\theta_1 \Phi_{rs})} \quad (9)$$

θ_1 は未知パラメータ, c_{rs} は自動車利用による OD ペア rs 間所要時間であり, 次式のような合成費用である。

$$c_{rs} = -\frac{1}{\mu_1} \ln \sum_{k \in K_{rs}^a} \exp(-\mu_1 c_k^{rs}) \quad (10)$$

Φ_{rs} は次の Mixed Mode 利用による rs 間合成費用である。

$$\Phi_{rs} = -\frac{1}{\beta} \ln \sum_{t \in T_{rs}} \exp(-\beta \hat{c}_{rs,t}) \quad (11)$$

(d) 経路選択モデル

OD ペア rs 間, rt 間の確率的均衡交通量は, 次式のよう

$$f_k^{rs} = q_{rs} \frac{\exp(-\mu_1 c_k^{rs})}{\sum_{k \in K_{rs}^a} \exp(-\mu_1 c_k^{rs})} \quad (12)$$

$$\hat{f}_l^{rs,t} = \hat{q}_{rs,t} \frac{\exp(-\mu_2 c_k^{r,t})}{\sum_{k \in K_{r,t}^a} \exp(-\mu_2 c_k^{r,t})} \quad (13)$$

ここで、 μ_1 は未知パラメータ、 $c_k^{r,t}$ は rt 間第 k 経路所要時間 ($k \in K_{r,t}^a$) である。

3. [NLSUE/Mixed Mode] の最適化問題としての定式化

(1) 等価な数理最適化問題

前述した必要条件と等価な数理最適化問題である [NLSUE/Mixed Mode] モデルは以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 \min : & Z(x_a, x_a^m, \hat{q}_{rs}, q_{rs}, \hat{q}_{rs,t}^a, \hat{q}_{rs,t}^b, \hat{q}_{rs,t}, f_k^{rs}, \hat{f}_l^{rs,t}, \hat{f}_k^{rs,t}) \\
 = & \sum_{a \in A} \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega + \sum_{a \in M} t_a^m x_a^m + \frac{1}{\mu_1} \sum_{rs} \sum_{k \in K_{rs}^a} f_k^{rs} \ln \left(\frac{f_k^{rs}}{q_{rs}} \right) \\
 & + \frac{1}{\mu_2} \sum_{rs} \sum_t \sum_{l \in K_{r,t}^a} \hat{f}_l^{rs,t} \ln \left(\frac{\hat{f}_l^{rs,t}}{\hat{q}_{rs,t}} \right) + \sum_{rs} \int_0^{\hat{q}_{rs}} \frac{1}{\theta_1} \ln \frac{\omega}{\hat{q}_{rs} - \omega} d\omega \\
 & + \sum_{rs} \sum_t \int_0^{\hat{q}_{rs,t}^b} \left(\frac{1}{\theta_2} \ln \frac{\omega}{\hat{q}_{rs,t} - \omega} - \pi_t + \hat{c}_{rs,t}^b \right) d\omega \\
 & - \frac{1}{\beta} \sum_{rs} \hat{q}_{rs} (\ln \hat{q}_{rs} - 1) + \sum_{rs} \sum_t \hat{q}_{rs,t} \left\{ \frac{1}{\beta} (\ln \hat{q}_{rs} - 1) + \pi_t \right\} \quad (14) \\
 s.t. & q_{rs} + \hat{q}_{rs} = \bar{q}_{rs}, \quad \forall rs \quad (\lambda_{rs}) \quad (15) \\
 & \sum_{k \in K_{rs}^a} f_k^{rs} = q_{rs}, \quad \forall rs \quad (\eta_{rs}) \quad (16) \\
 & \sum_{l \in K_{r,t}^a} \hat{f}_l^{rs,t} = \hat{q}_{rs,t}^a, \quad \forall rs, t \quad (\xi_{rs,t}) \quad (17) \\
 & \sum_{rs} \sum_t \sum_{l \in K_{r,t}^a} \hat{\delta}_{al}^{rs,t} \hat{f}_l^{rs,t} \\
 & + \sum_{rs} \sum_{k \in K_{rs}^a} \delta_{ak}^{rs} f_k^{rs} = x_a, \quad \forall a \in A \quad (\varepsilon_a) \quad (18) \\
 & \sum_{rs} \sum_t \sum_{k \in K_{r,t}^a} \hat{\delta}_{ak}^{rs,t} \hat{f}_k^{rs,t} = x_a^m, \quad \forall a \in M \quad (\varepsilon_a^m) \quad (19) \\
 & \sum_s \sum_{l \in K_{r,t}^a} \hat{f}_l^{rs,t} + \sum_s \hat{q}_{rs,t}^b = \hat{q}_{rs,t}, \quad \forall r, t \quad (\omega_{r,t}) \quad (20) \\
 & \sum_r \sum_{l \in K_{t,s}^a} \hat{f}_l^{rs,t} + \sum_r \hat{q}_{rs,t}^b = \hat{q}_{t,s}, \quad \forall t, s \quad (\omega_{t,s}) \quad (21) \\
 & \sum_s \hat{q}_{rs,t} = \hat{q}_{r,t}, \quad \forall r, t \quad (\varphi_{r,t}) \quad (22) \\
 & \sum_r \hat{q}_{rs,t} = \hat{q}_{t,s}, \quad \forall t, s \quad (\varphi_{t,s}) \quad (23) \\
 & \sum_t \hat{q}_{rs,t} = \hat{q}_{rs}, \quad \forall rs \quad (\phi_{rs}) \quad (24)
 \end{aligned}$$

ただし、 $\beta = 1/\theta_2 - 1/\theta_3$ である。また、各制約条件の右側にある括弧内は Lagrange 乗数であり、式(15)~(24)はそれぞれ、自動車と Mixed Mode の OD 交通量、自動車の OD 間経路交通量、Mixed Mode 端末部分の自動車の経路交通量、Mixed Mode 端末部分を含む自動車リンク交通量、Mixed Mode のリンク交通量、Mixed Mode 端末部分の経路交通量、Mixed Mode ラインホール部分の経路交通量、端末部分の Mixed Mode 交通量、ラインホール部分の Mixed Mode 交通量、OD ペア rs 間の Mixed Mode 交通量についての保存条件である。

いま、[NLSUE/Mixed Mode] モデルの Lagrange 関数

を L とするとき、Kuhn-Tucker 条件から [NLSUE/Mixed Mode] の解が前述の必要条件を満足することを以下で簡潔に説明する。

自動車リンク交通量 x_a については、 $\partial L / \partial x_a = 0$ より

$$\varepsilon_a = -t_a(x_a) \quad (25)$$

が成立する。また、Mixed Mode リンク交通量 x_a^m については、 $\partial L / \partial x_a^m = 0$ より次式が成立する。

$$\varepsilon_a^m = -t_a^m \quad (26)$$

次に、OD ペア rs 間の自動車経路交通量 f_k^{rs} については、 $\partial L / \partial f_k^{rs} = 0$ と式(16)より、 rs 間の確率均衡交通量を表す条件式(12)を導くことができる。さらに、 $\partial L / \partial f_k^{rs} = 0$ と式(12)より、

$$\eta_{rs} = -\frac{1}{\mu_1} \ln \sum_{k \in K_{rs}^a} \exp(-\mu_1 c_k^{rs}) \quad (27)$$

という関係が得られる。

OD ペア rt 間の自動車経路交通量 $\hat{f}_l^{rs,t}$ については、 $\partial L / \partial \hat{f}_l^{rs,t} = 0$ と式(17)より rs 間の確率均衡交通量を表す条件式(13)が得られる。さらに、 $\partial L / \partial \hat{f}_l^{rs,t} = 0$ と式(13)より、

$$\xi_{rs,t} = \frac{1}{\mu_2} \quad (28)$$

$$\omega_{r,t} = -\frac{1}{\mu_2} \ln \sum_l \exp(-\mu_2 c_l^{r,t}) \equiv \hat{c}_{r,t}^a \quad (29)$$

なる関係が得られる。一方、Mixed Mode の経路交通量については、 $\partial L / \partial \hat{f}_l^{rs,t} = 0$ より次式が成立する。

$$\omega_{t,s} = \hat{c}_{t,s}^m. \quad (30)$$

Mixed Mode 端末経路交通量 $\hat{q}_{r,t}$ と幹線部経路交通量 $\hat{q}_{t,s}$ については、 $\partial L / \partial \hat{q}_{r,t} = 0$ と $\partial L / \partial \hat{q}_{t,s} = 0$ より、

$$-(\varphi_{r,t} + \varphi_{t,s}) = \hat{c}_{r,t}^c + \hat{c}_{t,s}^m \equiv \hat{c}_{r,t}^a \quad (31)$$

なる関係が得られる。

端末バストリップに関しては、 $\partial L / \partial \hat{q}_{rs,t}^b = 0$ より、乗換えターミナル t への路線バス選択需要を表す式(1)が導かれる。一方、ターミナル選択に関する条件については、 $\partial L / \partial \hat{q}_{rs,t} = 0$ と式(2)と式(24)より、ターミナル選択需要を表す条件式(7)、および

$$\phi_{rs} = \frac{1}{\beta} \ln \hat{q}_{rs} - \frac{1}{\beta} \ln \sum_t \exp(-\beta \hat{c}_{rs,t}). \quad (32)$$

が得られ、これより式(11)が得られる。

最後に、Mixed Mode 選択については、 $\partial L / \partial \hat{q}_{rs} = 0$ と $\partial L / \partial q_{rs} = 0$ より、Mixed Mode 選択需要の条件式(9)を導くことができる。以上より、[NLSUE / Mixed Mode] 満足すべき必要条件と本問題との等価性が証明された。

次に、本モデルの持つ意味合いについて考察する。目的関数の第3項と第4項によって自動車ネットワークの確率的利用者均衡状態を表現することになるが、これらの項のパラメータ μ_1 、 μ_2 を無限大とすることによって自動車ネットワーク上での確定的利用者均衡状態を表現することができることから、本モデルは宮城²⁾の提案したモデルを包含した、より一般化されたモデルであるといえる。また、Mixed Mode 選択段階を自動車の一般道路と高速道路との選択問題に、ターミナル選択を高速道路利用条件下でのオンランプ選択問題に置き換え、端末手段選択を自動車のみとした場合には、森川³⁾の複数の高速道路経路を利用した均衡配分モデルを表現することができる。このように、本モデルは過去に提案されている段階的選択構造を持つネットワーク均衡配分モデルを統一的に説明し、各種の場面に適用することができる。

4. NLSUE/Mixed Mode モデルの計算手法⁴⁾

[NLSUE/Mixed Mode] モデルは需要変動型の確率均衡配分問題の一種である。また、目的関数の狭義凸性が証明できるので解は一意に定まる。したがって、何らかの確率的ネットワーク負荷法を用いて交通需要をネットワークに負荷しながら逐次平均法(MSA: Method of Successive Averages)を用いてフロー変数を均衡させ、そのたびに各種選択需要の更新を行うという計算アルゴリズムが有効に機能する。なお、解の一意性の証明は付録を参照されたい。

(1) 計算アルゴリズム

本モデルの解法アルゴリズムは図-3 のようになり、それぞれのステップを以下で説明する。

- Step-1: 初期の Mixed Mode 分担率、ターミナル選択、端末手段選択を与える。
- Step-2: Dial のアルゴリズムによりリンク交通量を求める。リンク交通量についての収束判定条件を満足すれば Step-3 へ、そうでなければ逐次平均法を用いてリンク交通量の改訂を行う。
- Step-3: 均衡リンク交通量から得られるリンクコストに対してリンクウェイトを算出する。
- Step-4: リンクウェイトにより rs 、 rt 間の期待最小コストを次式より求める。

$$c_{rs} = c_{rs}^{\min} - \frac{1}{\mu_1} \ln \sum_{m \in I} W[m \rightarrow s] \quad (33)$$

$$c_{rs,t}^a = c_{rs,t}^{\min} - \frac{1}{\mu_2} \ln \sum_{m \in I} W[m \rightarrow t] \quad (34)$$

ここで、 $c_{rs}^{\min}$ 、 $c_{rs,t}^{\min}$ は rs 、 rt 間の最短所要時間であり、 I は着ノードに接続するノード集合である。

Step-5: 式(5)、(6)により、P&R 駐車場 t への路線バス

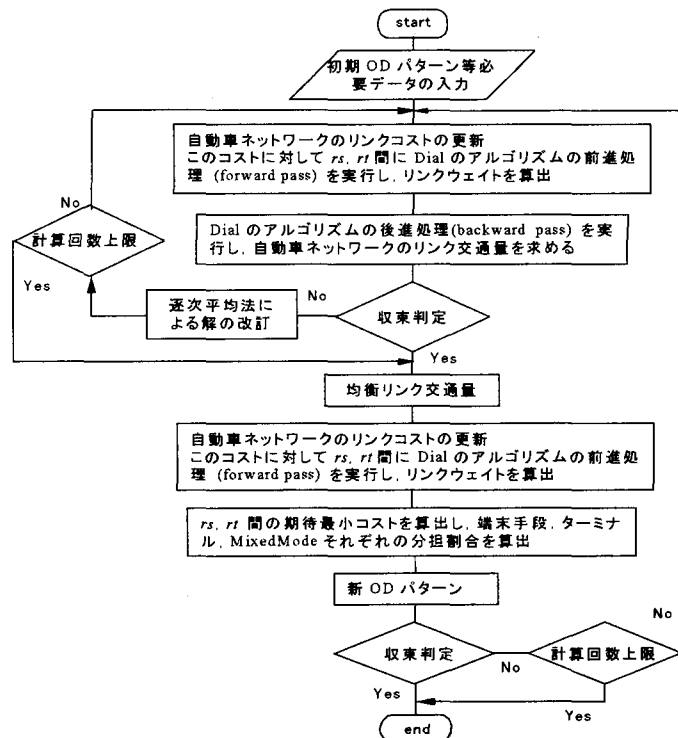


図-3 計算アルゴリズム

と自動車、それぞれの選択需要を求める。

Step-6: 式(7)により、P&R 駐車場選択需要を求める。

Step-7: 式(9)により Mixed Mode 選択需要を求める。

Step-8: 交通手段別 OD 交通量に対して収束判定を行う。

収束判定条件を満足すれば終了、そうでなければ

Step-2 へ戻る。

(2) パラメータの設定

[NLSUE/Mixed Mode] モデルに含まれる端末手段選択モデル、駐車場選択モデルのパラメータを実データから設定する。これは、次節の感度分析においても現実的な駐車場料金や所要時間の水準に対する感度のリアリティを高めたいためである。したがって、得られたパラメータ値だけが重要であって、その統計的有意性や実用可能性などについてはここでは問わないことにしたい。データは「熊本市 P&R 試行実験アンケート調査」データである。この調査は、平成8年に熊本市都心事業所への通勤者を対象にして実施され、12の P&R システム計画路線と駐車場候補地とを地図上に具体的に挙げ、システムの利用意向や利用駐車場などのデータを収集している。端末手段選択モデル、乗換え

表-1 端末手段選択モデル

説明変数	パラメータ	t 値
rt 間所要時間 (分)	-0.0561	2.22
サンプル数	64	
尤度比的比率	0.062	
	68.8	

表-2 乗換えターミナル選択モデル

説明変数	パラメータ	t 値
鉄道ダミー	1.228	1.35
rt 間所要時間 (分)	-0.078	2.40
ts 間所要時間 (分)	-0.123	1.88
ts 運賃 (千円/月)	-0.161	0.74
サンプル数	89	
尤度比	0.11	
的中率	62.9	

ターミナル選択モデルのパラメータ推定結果を表-1と表-2に示す。

(3) モデルネットワークによる感度分析

(a) 前提条件

感度分析に用いたモデルネットワークは図-4 であり、ノード 1~27 の自動車ネットワークと斜体で表示したノード 8~20 の Mixed Mode ネットワークから構成されている。自動車リンクは道路種別（リンクの太さの違い）によって3種類に分類している。表-3は各セントロイドから都心ノード 3 への利用可能な交通手段と乗換えターミナル、および所要時間の設定一覧である。基準とする総トリップ数は 10,000 トリップであり、表-4のように OD 構成比は一定で、都心への集中率を大きく設定している。

各手段・ターミナル選択に関する未知パラメータは、 $\theta_1 = -0.0500$ 、 $\theta_2 = -0.0561$ 、 $\pi' = -0.0001605$ とした。ただし、 π' は $\pi_i = \pi' \times (\text{P\&R 駐車場 } i \text{ の駐車料金})$ の関係にある。 θ_2 と π' については表-1、表-2の推定値をそのまま用い、Mixed Mode 選択の感度パラメータ θ_1 には端末部所要時間より 1 割程度小さい値を用いている。一方、経路選択感度パラメータである μ_1 と μ_2 は従来の実証的研究成果を参考にして $\mu_1 = -0.1$ 、 $\mu_2 = -0.1$ と設定した。P\&R システム A,B の駐車場料金は、それぞれ 4,000 円、5,000 円に設定した。以上の前提条件の基でモデルネットワーク上での感度分析により[NLSUE/Mixed Mode]モデルの計算可能性と現実道路網での実用可能性についての検証を行う。

(b) 解の収束性

図-5は、前回の繰り返し時との全リンク交通量の相対誤差の平均値を示したものである。本来ならば目的

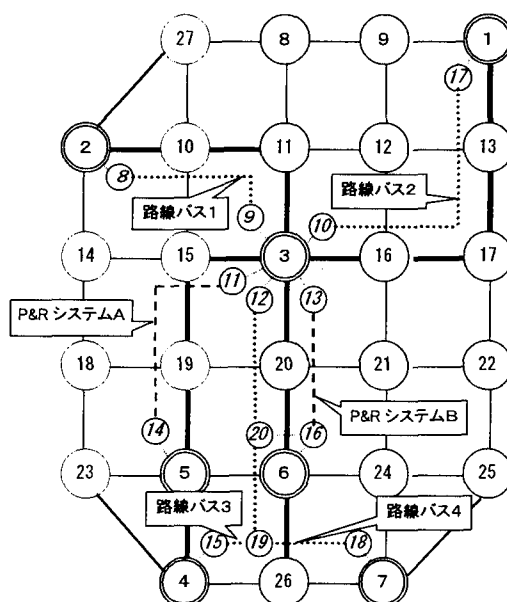


図-4 感度分析用モデルネットワーク

表-4 OD パターン

	1	2	3	4	5	6	7	発生パターン
1		0.01	0.05	0.01	0.01	0.01	0.01	0.10
2	0.02		0.10	0.02	0.02	0.02	0.02	0.20
3	0.01	0.01		0.01	0.03	0.03	0.01	0.10
4	0.02	0.02	0.10		0.02	0.02	0.02	0.20
5	0.01	0.01	0.05	0.01		0.01	0.01	0.10
6	0.01	0.01	0.05	0.01	0.01		0.01	0.10
7	0.02	0.02	0.10	0.02	0.02	0.02		0.20
集中パターン	0.09	0.08	0.45	0.08	0.11	0.11	0.08	1.00

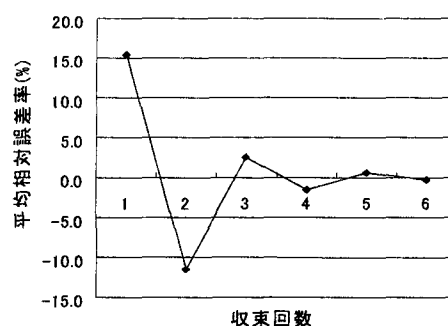


図-5 解の収束状況

表-3 利用可能交通手段の設定

ノード 発着	自動車	路線バス (所要時間)	バス停 ノード	P\&R システム (所要時間)	駐車場 ノード
1 3	可	可 (29 分)	17	不可	—
2 3	可	可 (24 分)	8	不可	—
3 —	可	不可	—	不可	—
4 3	可	可 (49 分) (6 までは 19 分)	15	可 (29 分) 可 (29 分)	14 16
5 3	可	不可	—	不可	—
6 3	可	不可	—	不可	—
7 3	可	可	18	可 (29 分)	16

変化率

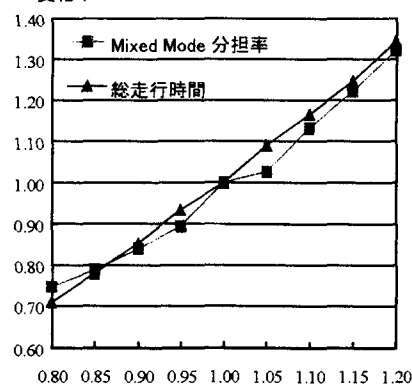


図-6 総トリップ数の変化に対する感度

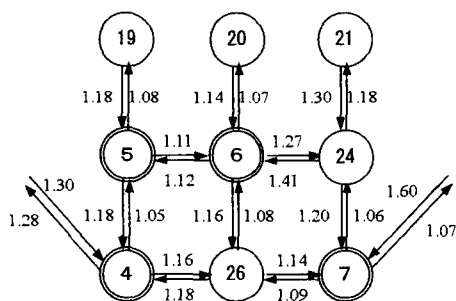


図-7 リンク交通量の増加率

関数値の収束状況を知りたいが、リンク交通量による目的関数値は計算不可能であるため、解の収束を示す指標としてこの指標を用いた。リンク交通量は 5 回程度の繰り返し計算でほぼ収束しており、かつ各交通手段別 OD 交通量も均衡していることが確認されたことから、本計算アルゴリズムの利用可能性が検証された。

(c) 感度分析

本研究では、1)総トリップ数と、2)P&R 駐車場料金の変化に対する感度分析を行う。

1) 総トリップ数の変化に対する感度

基準の総トリップ数を 5%刻みで±20%まで変化させた場合(横軸)の Mixed Mode 分担率と総走行時間の変化率(縦軸)を図-6に示す。総トリップ数が増加するにしたがって、自動車ネットワークが混雑するために総走行時間は必然的に増加するが、同時に自動車ネットワークの混雑は Mixed Mode の効用を相対的に高めるために Mixed Mode 分担率は上昇している。Mixed Mode への転換がネットワーク全体の総走行時間の増加を抑えている。また、基準総トリップ数では、2 路線の P&R システム導入により導入されない場合と比較して 3.2%の総走行時間の節約が計られている。

図-7には、総トリップ数を基準の+20%にしたときの、P&R 駐車場回りのリンク交通量の基準時に対する増加率を示す。P&R 駐車場までのアクセスリンク、および都心への幹線リンクの交通量の増加率は、路線バスへの転換や他の自動車経路への迂回が生じ

たために、一部のリンクを除いて、総トリップの増加率 1.20 を下回っている。これらの結果は、交通需要の増加に対する P&R システムの効果を本システムが予測・評価可能であることを示している。

2) P&R 駐車場料金の変化に対する感度

2 つの P&R 駐車場の料金を 5%刻みで±20%まで変化させた場合の P&R 分担率と P&R 駐車場分担比、P&R システム B までの端末手段分担比の感度について分析する。P&R システム A と B の基準駐車場料金をそれぞれ 4,000 円と 5,000 円に設定しているので、両駐車場料金の差は-20%で最小 800 円、+20%で最大 1,200 円となる。図-8は上記の変動に対する P&R システム全体の分担率の変化であり、その感度は-10%~+12%である。図-9は両駐車場の分担比の感度であるが、料金差が拡大するにしたがって駐車場料金が相対的に高くなる P&R システム B から A へ利用率がシフトする。図-10は P&R システム B までの端末手段分担であり、駐車場料金が高くなるにしたがって端末バスの分担割合が高くなっていく状況を予測している。このように、本モデルでは P&R 駐車場選択や端末手段選択に対する P&R 駐車場料金の感度も十分に把握できる。

以上の感度分析結果より、本モデルとその計算アルゴリズムは P&R システムの主要なサービス要因に対する需要や効果の感度を分析できることが検証されたことから、現実の道路網での適用にも十分に供すると考えられる。

5. おわりに

本研究では、P&R システムを複数の代表交通手段の組合せから構成される Mixed Mode とみなし、その選択を端末手段選択、乗換えターミナル選択、Mixed Mode 選択という階層的選択として表現した。さらに、自動車単一モードと Mixed Mode との需要変動型確率均衡配分モデルである [NLSUE / Mixed Mode] モデルを提案し、それと等価な数理最適化問題を定式化した。このモデルは過去に開発された種々の統合型均衡配分モデ

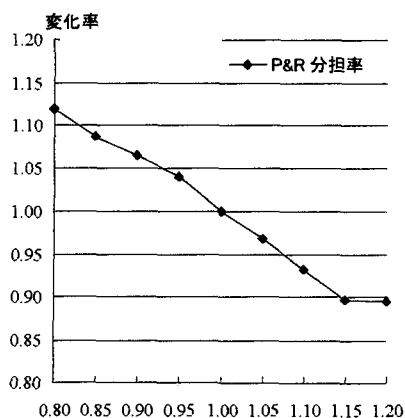


図-8 駐車場料金の変化に対する感度

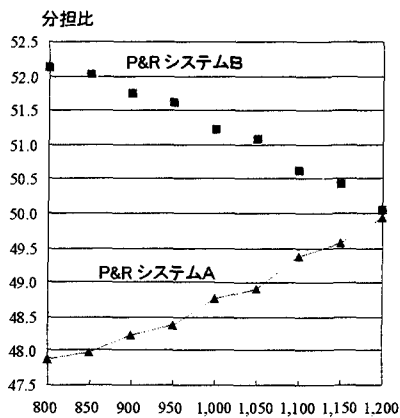


図-9 駐車場分担比

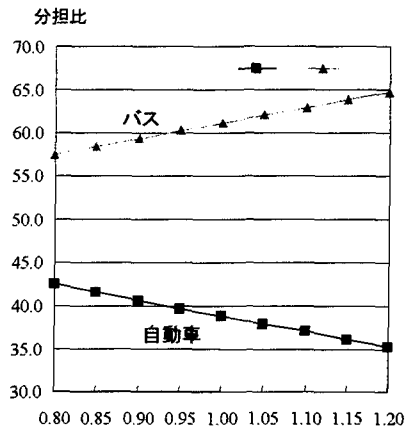


図-10 端末手段選択比

ルをより一般的に表現できるモデルとなっており、種々の需要変動型ネットワーク均衡分析への適用が可能である。さらに、その計算アルゴリズムを示し、モデルネットワーク上での総トリップ数やP&R駐車場料金に対する感度分析より、本モデルとその計算アルゴリズムの実用可能性を検証した。

ここではP&Rシステムが導入された道路網における交通ネットワーク均衡分析の理論的な枠組みと計算手法を提案したが、本モデルを現実道路網におけるP&Rシステムの需要予測と整備効果の評価に用いるには、

- ① 端末手段選択モデルや乗換えターミナル選択モデル、および自動車の経路選択モデルの未知パラメータを推定するための調査が必要である。さらに、
- ② 目的関数の直接的な最適化を可能にする部分線形化法などを用いた計算アルゴリズムの効率化、

- ③ 実ネットワークでの計算可能性などについて検討することも今後の課題として挙げられよう。

参考文献

- 1) E. Fernandez, D. C. Joaquin, Florian, M. and C. Enrique : Network Equilibrium Models with Combined Models, Transpn. Sci., Vol.28, No.3, 1994
- 2) 宮城俊彦・水口晴男：複合交通手段を考慮した交通ネットワーク均衡モデルに関する研究，土木学会論文集 No.512/IV-27, 1995
- 3) 森川高行・三輪富生：複数の高速道路経路選択を考慮した均衡配分モデルに関する研究，土木学会第 53 回年次学術講演会集，IV-299, 1998
- 4) 土木学会 土木計画学研究委員会：交通ネットワークの均衡分析－最新の理論と解法－，土木学会，1998

Mixed Mode ネットワーク均衡モデルによるP&Rシステムの需要予測

溝上 章志・河内 誠

TDM 施策の 1 つである P&R システムは、各地で導入のための試行実験が実施され、その有用性が再評価されてきている。しかし、P&R システムは、端末部の自動車と幹線部の公共交通という旧来型の交通機関を効果的に組み合わせるというシステム改善にすぎず、既存の公共交通機関に比べてそのサービス水準が飛躍的に改善されるわけではないことから、その需要予測や導入効果の評価はなかなか困難である。そのアプローチとしては、交通ネットワーク上での交通フローだけでなく、P&R 路線や駐車場位置・規模などをも検討することができるネットワーク均衡分析が有用であろう。本研究は、複数の代表手段で構成される Mixed Mode と自動車との手段選択需要変動を考慮したネットワーク均衡モデルに基づいた P&R システムの需要予測手法を提案するものである。

Demand Forecasting for Park and Ride system through Mixed-Model Network Equilibrium Model

By Shoshi MIZOKAMI and Makoto Kochi

Park & Ride system is an effective transportation system of the TDM policies. However, it is difficult to forecast its demand, because this system is a kind of mixed modes which consists of the combination of some transportation systems and uses the same road network at the part of access to terminals with car demand. We develop the stochastic user equilibrium network model with elastic mixed mode demand based on Nested Logit choice structure, so called [NLSUE/Mixed Mode] and its calculation algorithm. By the sensitivity analysis using a model network, this model and algorithm can be applied to predict demands of a P&R system.

付録

[NLSUE/Mixed Mode] の解の一意性を証明する．制約条件はすべて線形で解集合は凸集合であるから，解の一意性を証明するには，目的関数の凸性，つまり目的関数の Hessian が正値定符号行列であることを示せばよい．本モデルでの Hessian は付式(1)のような 9 行 9 列の行列になる．

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^{m^2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs^2}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t^2}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^{a^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^{b^2}} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^b \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^b \partial \hat{q}_{rs,t}^a} & \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} \end{bmatrix} \quad \text{付式(1)}$$

この Hessian が正値定符号行列であるためには，主小行列式の符号が正値であればよい．この対角成分と 0 以外の成分を考慮すると，行列式は付式(2)のようになる．

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^{a^2}} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^{b^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^b \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \right)^2 \right\} \quad \text{付式(2)}$$

ただし， t_a^m は定数で $\partial^2 Z / \partial x_a^{m^2} = 0$ であることから，この Hessian の 2 行目と 2 列目を外している．したがって，この Hessian は 8 行 8 列となり，8 つの主小行列式の符号が正値であることを証明すればよい．

以下で，それぞれの主小行列式が正値になることを証明する．

■ t_a について

$t_a(\omega)$ に BPR 型関数のような単調増加関数を仮定すると， $\partial^2 Z / \partial x_a^2 = \partial t_a(x_a) / \partial x_a > 0$ となる．したがって，1 行 1 列の主小行列式の符号は正となる．

■ f_k, q_{rs} について

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs^2}} = \frac{1}{\mu_1 f_k^{rs}} > 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} = \frac{\sum_k f_k^{rs}}{\mu_1 q_{rs}^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} = -\frac{1}{\mu_1 q_{rs}} < 0 \text{ より, } \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} \right)^2 > 0 \text{ となる.}$$

2 行 2 列の主小行列式は $\partial^2 Z / \partial x_a^2 = \partial t_a(x_a) / \partial x_a > 0$ となる．さらに，3 行 3 列の主小行列式は $\frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} \right)^2 \right\}$

となり，その符号は正となる．

■ $\hat{f}_l^{rs,t}, \hat{q}_{rs,t}^a$ について

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t^2}} = \frac{1}{\mu_2 \hat{f}_l^{rs,t}} > 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^{a^2}} = \frac{1}{\mu_2 \hat{q}_{rs,t}^a} > 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} = -\frac{1}{\mu_2 \hat{q}_{rs,t}^a} < 0 \text{ より, } \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^{a^2}} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \right)^2 > 0 \text{ となる.}$$

したがって，4 行 4 列の主小行列式は $\frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t^2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^{a^2}} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \right)^2 \right\}$ となり，その符号は正となる．さらに，

5行5列の主小行列式は $\frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs2}} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} \right)^2 \right\} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t2}} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \right)^2 \right\}$ となり、その符号も正である。

■ $\hat{q}_{rs}$, $\hat{q}_{rs,t}^b$, $\hat{q}_{rs,t}$ について

$$\begin{aligned} \beta > \theta_1 \text{ が成立するとすれば, } \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs}^2} &= -\frac{(\beta - \theta_1)\bar{q}_{rs} + \theta_1 \hat{q}_{rs}}{\theta_1 \beta \hat{q}_{rs}(\bar{q}_{rs} - \hat{q}_{rs})} > 0 \text{ となる. また, } \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} = \frac{\hat{q}_{rs,t}}{\theta_2 \hat{q}_{rs,t}^b(\hat{q}_{rs,t} - \hat{q}_{rs,t}^b)} > 0, \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^b \partial \hat{q}_{rs,t}} &= -\frac{1}{\theta_2(\hat{q}_{rs,t} - \hat{q}_{rs,t}^b)} < 0 \text{ であり, } \beta > \theta_2 \text{ が成立するとすれば, } \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} = -\frac{(\beta - \theta_2)\hat{q}_{rs,t}^b + \theta_2 \hat{q}_{rs,t}}{\theta_2 \beta \hat{q}_{rs,t}(\hat{q}_{rs,t} - \hat{q}_{rs,t}^b)} > 0 \text{ より,} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^b \partial \hat{q}_{rs,t}} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^b \partial \hat{q}_{rs,t}} \right)^2 &> 0 \text{ となる. したがって, 6行6列の主小行列式は, } \beta > \theta_1 \text{ が成立するとすれば,} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs}^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs2}} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} \right)^2 \right\} &\left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t2}} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \right)^2 \right\} > 0 \text{ となる. さらに, 7行7列の主小行列式は,} \\ \beta > \theta_1, \beta > \theta_2 \text{ が成立すれば, } \frac{\partial^2 Z}{\partial x_a^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs}^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} \left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs2}} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial q_{rs}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial f_k^{rs} \partial q_{rs}} \right)^2 \right\} &\left\{ \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t2}} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{q}_{rs,t}^2} - \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \hat{f}_l^{rs,t} \partial \hat{q}_{rs,t}^a} \right)^2 \right\} > 0 \text{ となる.} \end{aligned}$$

したがって、(1)～(4)より、 $\beta > \theta_1$, $\beta > \theta_2$ さえ満足されれば、付式(2)で表される8行8列の主小行列式の符号も正となる。

以上より、すべての主小行列式は正となり、目的関数の Hessian は正値定符号行列であるといえる。したがって、本モデルの目的関数は凸関数となり、一意的に解が求まることが証明できた。ただし、 t_a を考慮する場合は半正値定符号行列となるので、大局的には解の一意性は示せないが、局所的最適解は得ることができる。